

調和次元について

大同工大 瀬川重男

1. Ω を Heins の意味の end ([2]), 即ち Ω は O_G に属する Riemann 面の相対非コンパクト部分領域でその相対境界 $\partial\Omega$ は有限個の解析閉曲線から成り, さらに Ω の理想境界成分は唯一つである, とする. \mathcal{P}_Ω を Ω 上の非負値調和函数で $\partial\Omega$ 上境界値 0 を持つもの全体とする. \mathcal{P}_Ω の正規化された minimal 函数の集合の濃度を Ω の調和次元 (harmonic dimension) と呼び ([2]) $\dim \mathcal{P}_\Omega$ と表わす. 与えられた濃度 c ($\leq \aleph$) に対して $\dim \mathcal{P}_\Omega = c$ となる Ω が実際に存在するかどうかは問題になるが, $\dim \mathcal{P}_\Omega = n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) となる Ω の存在, $\dim \mathcal{P}_\Omega = \aleph_0$ となる Ω の存在, $\dim \mathcal{P}_\Omega = \aleph$ となる Ω の存在は, それぞれ, Heins ([2]), Kuramochi ([3]), Constantinescu-Cornea ([1]) によって証明されている. 一方 [2] において Heins はまた, $\dim \mathcal{P}_\Omega$ と $\bar{\Omega}$ 上の有界調和函数の性質との関係について次のことを証明している:

定理 A. $\dim \mathcal{P}_\Omega = 1$ となるための必要十分条件は, $\bar{\Omega}$ 上の任意の有界調和函数が理想境界で極限を持つことである.

$\bar{\Omega}$ 上の有界調和函数全体を B_Ω とし, B_Ω の元で理想境界で極限值 0 を持つものの全体を B_0 とする. B_0 は B_Ω の線型部分空間であるから商空間 B_Ω/B_0 が考えられ, それを \mathcal{B}_Ω と表わせ, \mathcal{B}_Ω の線型空間としての次元を $\dim \mathcal{B}_\Omega$ と表わす.

$\dim \mathcal{B}_\Omega$ を使えば定理 A は「 $\dim \mathcal{P}_\Omega = 1$ となるための必要十分条件は $\dim \mathcal{B}_\Omega = 1$ となることである。」と言い換えることができる. この様な観点から定理 A は次の様に一般化される:

定理 1. $\dim \mathcal{P}_\Omega$ または $\dim \mathcal{B}_\Omega$ が有限ならば, $\dim \mathcal{P}_\Omega = \dim \mathcal{B}_\Omega$ である.

3 で定理 1 の応用について述べる.

2. 定理 1 の証明に入る前に補題を 1 つ用意する. $u \in B_\Omega$, $h \in \mathcal{P}_\Omega$ に対して $\langle u, h \rangle = -\int_{\partial\Omega} u * dh = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial h}{\partial n} d\Delta$ と定義する. ここで $\partial/\partial n$ は内法線方向微分である. また $Q_\Omega = \{h \in \mathcal{P}_\Omega; -\int_{\partial\Omega} * dh = 1\}$ とする. このとき次のことが言える:

補題. $u (\in B_\Omega)$ の理想境界における集積値集合は $\langle u, Q_\Omega \rangle = \{ \langle u, h \rangle; h \in Q_\Omega \}$ である.

証明は [2] (p. 313) を参照されたい.

定理 1 の証明. $E_\Omega = \mathcal{P}_\Omega - \mathcal{P}_\Omega = \{ h_1 - h_2; h_1, h_2 \in \mathcal{P}_\Omega \}$ と

おけば E_Ω は線型空間で、その線型空間としての次元を $\dim E_\Omega$ と表わす。先づ、 E_Ω または \mathcal{B}_Ω が有限次元であるならば $\dim E_\Omega = \dim \mathcal{B}_\Omega$ であることを注意しておく。 $u \in \mathcal{B}_\Omega$, $h \in E_\Omega$ ($h = h_1 - h_2$; $h_1, h_2 \in \mathcal{B}_\Omega$) に対して $\langle u, h \rangle = \langle u, h_1 \rangle - \langle u, h_2 \rangle$ と定義すれば $(u, h) \mapsto \langle u, h \rangle$ は $\mathcal{B}_\Omega \times E_\Omega$ 上の双線型汎函数となる。

$K_1 = \{u \in \mathcal{B}_\Omega; \langle u, h \rangle = 0 (\forall h \in E_\Omega)\}$ とおけば、 $u \in K_1$ に対して $\langle u, \mathcal{Q}_\Omega \rangle \subset \langle u, E_\Omega \rangle = \{0\}$ だから補題より $u \in \mathcal{B}_0$ となる。一方 $u \in \mathcal{B}_0$ とすると、任意の $h \in E_\Omega$ ($h = c_1 h_1 - c_2 h_2$; $h_1, h_2 \in \mathcal{Q}_\Omega$; $c_1, c_2 > 0$) に対して再び補題を適用して、 $\langle u, h \rangle = c_1 \langle u, h_1 \rangle - c_2 \langle u, h_2 \rangle = 0$ だから、 $u \in K_1$ となる。すなわち、 $K_1 = \mathcal{B}_0$ である。また、 $K_2 = \{h \in E_\Omega; \langle u, h \rangle = 0 (\forall u \in \mathcal{B}_\Omega)\}$ に対して、 $0 \in K_2$ は明らか。 $h \in K_2$ とすると、 $\langle u, h \rangle = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial h}{\partial n} d\Lambda = 0 (\forall u \in \mathcal{B}_\Omega)$ であるから、これは $\partial\Omega$ 上 $\frac{\partial h}{\partial n} \equiv 0$ を意味し、 $\partial\Omega$ 上 $h \equiv 0$ であることより $h \equiv 0$ となる。故に $K_2 = \{0\}$ 。これより $\mathcal{B}_\Omega / \mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_\Omega$, E_Ω はそれぞれ E_Ω^* , \mathcal{B}_Ω^* (E_Ω^* , \mathcal{B}_Ω^* は E_Ω , \mathcal{B}_Ω の共役空間) の部分空間と看做せるから

$$\dim \mathcal{B}_\Omega \leq \dim E_\Omega^*, \quad \dim E_\Omega \leq \dim \mathcal{B}_\Omega^*.$$

従って、もし $\dim \mathcal{B}_\Omega$ が有限ならば $\dim \mathcal{B}_\Omega = \dim \mathcal{B}_\Omega^*$ かつ $\dim E_\Omega$ も有限になり、 $\dim E_\Omega^* = \dim E_\Omega$ であるから $\dim \mathcal{B}_\Omega =$

$\dim E_{\Omega} = \dim P_{\Omega}$ が得られる。 $\dim P_{\Omega}$ が有限としても同様である。 (証終)

3. 定理 A の応用として, Heins は $\dim P_{\Omega} = 1$ となるための十分条件を次の様に, modulus に関する条件で, 与えている;

定理 B. Ω を end とし, Ω の subend の列 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ で次の条件を満たすものがあるとする:

$$(i) \Omega_n \supset \overline{\Omega_{n+1}} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$(ii) A_n = \overline{\Omega_{2n-1}} - \Omega_{2n} \text{ は 肉円環領域 } (n=1, 2, \dots),$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \text{mod } A_n = +\infty \quad (\text{mod } A_n \text{ は } A_n \text{ の modulus}).$$

このとき $\dim P_{\Omega} = 1$ となる。

定理 1 を応用すれば, 上の定理を次の様に一般化できる;

定理 2. Ω を end とし, 自然数 N に対して, Ω の subend の列 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ で次の条件を満たすものがあるとする:

$$(i) \Omega_n \supset \overline{\Omega_{n+1}} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$(ii) A_n = \overline{\Omega_{2n-1}} - \Omega_{2n} \text{ は 互いに素な } N \text{ 個の肉円環領域 } A_{n1}, A_{n2}, \dots, A_{nN} \text{ の合併である } (n=1, 2, \dots),$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \text{mod } A_n = +\infty.$$

このとき $\dim P_{\Omega} \leq N$ となる。

証明. $\text{mod } A_n = \mu_n$ とおく。 ω_n を $\partial\Omega_{2n-1}$ 上で 0, $\partial\Omega_{2n}$

上で μ_n を境界値として持つ A_n 上の調和函数とする。このとき、 $z_n = x_n + iy_n = \omega_n + i\bar{\omega}_n$ ($\bar{\omega}_n$ は ω_n の共役) により、 A_n は $\{x_n + iy_n; 0 \leq x_n \leq \mu_n, 0 \leq y_n < 2\pi\}$ へ 1 対 1 に写像される。

ここで、 $N+1$ 個の $u_1, \dots, u_{N+1} \in B_{\Omega}$ を任意にとり、これらに対して

$$\delta_n = \min_{1 \leq x \leq \mu_n} \left(\sum_{j=1}^{N+1} \int_{x_n=x} |\frac{\partial u_j}{\partial y_n}| dy_n \right)$$

を考える。右辺の最小値は $x = t_n$ のとき達成されるものとする。 $l_{ni} = \{p \in A_{ni}; x_n(p) = t_n\}$ (l_{ni} は A_{ni} 上の閉曲線であり、 $l_n = \bigcup_{i=1}^N l_{ni}$ は $\partial\Omega_{2n-1}$ と $\partial\Omega_{2n}$ を分離することに注意) とおき、 u_j の l_{ni} 上での最大値と最小値の差を $Osc(u_j, l_{ni})$ と表わせば

$$(*) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N+1} Osc(u_j, l_{ni}) \leq \delta_n.$$

Schwarz の不等式より ($0 \leq x_n \leq \mu_n$)

$$\begin{aligned} \delta_n^2 &\leq \left(\sum_{j=1}^{N+1} \int_0^{2\pi} |\frac{\partial u_j}{\partial y_n}| dy_n \right)^2 \\ &\leq (N+1) \sum_{j=1}^{N+1} \left(\int_0^{2\pi} |\frac{\partial u_j}{\partial y_n}| dy_n \right)^2 \\ &\leq 2\pi(N+1) \sum_{j=1}^{N+1} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u_j}{\partial y_n} \right|^2 dy_n. \end{aligned}$$

x_n で 0 から μ_n まで積分して

$$\delta_n^2 \mu_n \leq 2\pi(N+1) \sum_{j=1}^{N+1} \int_0^{\mu_n} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u_j}{\partial y_n} \right|^2 dx_n dy_n$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\pi(N+1) \sum_{j=1}^{N+1} \int_0^{\mu_n} \int_0^{2\pi} \left(\left| \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_j}{\partial y_n} \right|^2 \right) dx_n dy_n \\ &= 2\pi(N+1) \sum_{j=1}^{N+1} D_{A_n}(u_j), \end{aligned}$$

ここで $D_{A_n}(u_j)$ は u_j の A_n における Dirichlet 積分を表わす。

n について和をとって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 \mu_n \leq 2\pi(N+1) \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{\infty} D_{A_n}(u_j) \leq 2\pi(N+1) \sum_{j=1}^{N+1} D_{\Omega}(u_j).$$

従って、条件 (ii) と $\sum_{j=1}^{N+1} D_{\Omega}(u_j) < +\infty$ であることより

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$$

となる。(*)より、これは $\{A_n\}$ の適当な部分列 $\{A_{n_k}\}$ をとれば

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\max_{P \in \partial_{n_k} \Omega} |u_j(P) - c_{ij}| \right) = 0$$

となる c_{ij} ($1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq N+1$) が存在することを意味する。

N 次元ベクトル $u_j = (c_{1j}, \dots, c_{Nj})$ ($1 \leq j \leq N+1$) に対して、

$\sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j u_j = 0$ を満たす様な $N+1$ 次元ベクトル $(\alpha_1, \dots, \alpha_{N+1})$

($\neq 0$)をとる。このとき

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{P \in \partial_{n_k} \Omega} \left| \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j u_j(P) \right| = 0$$

となる。 $\partial \Omega$ は $\partial \Omega$ と理想境界を分離するから、 $\sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j u_j$ は

理想境界で極限值0を持つ、すなわち $\sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j u_j \in B_0$ である。

従って $\dim B_{\Omega} \leq N$ で、定理1によつて $\dim B_{\Omega} \leq N$ となる。

(証終)

参考文献

- [1] C. Constantinescu - A. Cornea : Über einige Probleme von M. Heins, *Rev. Math. Pures Appl.*, 4(1959), 277-281.
- [2] M. Heins : Riemann surfaces of infinite genus, *Ann. of Math.*, (2) 55(1952), 296-317.
- [3] Z. Kuramochi : An example of a null-boundary Riemann surface, *Osaka Math. J.*, 6(1954), 83-91.