数理解析研究所講究録
第 366 巻 1979 年 150-155

$H^p(\mathbb{R}^n)$についての一注意

茨城大学理学部 藪田公三

$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ とするとき, $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ とは f が $\mathbb{C}_+$ で正則で $\overset{\|f\|_{H^p}^p}{\sup_{t>0}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+it)|^p dx < +\infty$ ということである。同様に $\mathbb{C}_-$, $H^p(\mathbb{C}_-)$ を定義する。$f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ のとき $\lim_{t \to 0} f(x+it)$ は a.e. 存在して $L^p(\mathbb{R})$ に属する ($p \geq 1$)。そこで $H^p(\mathbb{R}) = \{f = u + iv$; u, v はそれぞれ $H^p(\mathbb{C}_+)$ 函数の実数部分$\}$ とおくと

(1) $H^p(\mathbb{R}) \cong \{f(x+iy) = f_1(x+iy) + f_2(x-iy)$; $f_1 \in H^p(\mathbb{C}_+),\ f_2 \in H^p(\mathbb{C}_-)\}$

($\cong$は左辺にノルム $\|\ \|_{H^p}$, 右辺に $\|f_1\|_{H^p(\mathbb{C}_+)} + \|f_2\|_{H^p(\mathbb{C}_-)}$ を入れたとき, ノルム同型になるという意味である。)

この小論では, 近年活発に解析された Stein-Weiss 流の $H^p(\mathbb{R}^n)$ ($H^p(\mathbb{R})$の高次元への一般化) が (1) のように $\mathbb{C}^n$ のある tube domain 上の函数空間として特徴付けられることを見ると同時に, その tube domain の Poisson 核による $L^p(\mathbb{R}^n)$ 函数, あるいは $\mathbb{R}^n$上の有界測度の像の特徴付けを与える。

1. $H^p(\mathbb{R}^n)$の定義

以下，簡単のため $1 \leqq p < \infty$ とする。$f \in H^p(\mathbb{R}^n)$とは，次のような $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) ; x_0 \in (0, \infty), (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ 上の $n+1$個の函数 $u_j(x_0, x)$ が存在することである。

(2) $$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (j, k = 1, \cdots, n)$$

(3) $$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x_0 > 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{n} |u_j(x_0, x)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{1/p} < \infty \quad \text{かつ}$$

$$f(x) = \lim_{x_0 \to 0} u_0(x_0, x) \quad \text{a.e.}$$

$H^p(\mathbb{R}^n)$は(3)の左辺をノルムとするBanach空間になる。よく知られているように，

$1 < p < \infty$ のとき $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ （ノルム同値）であり

$R_j f = \left(\frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi)\right)^{\vee}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ （$\wedge, \vee$ はFourier変換及び逆変換）とすると

$H^1(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) ; R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n), j = 1, \cdots, n\}$ で右辺に $\|f\| = \|f\|_1 + \sum \|R_j f\|_1$ でノルムを入れると，$H^1(\mathbb{R}^n)$ とノルム同型になる。

2. Tube domain 上の H^p.

$\Gamma (\subset \mathbb{R}^n)$ が open cone であるとは (i) $\Gamma \not\ni 0$ (ii) $\alpha, \beta > 0$, $x, y \in \Gamma$ なら $\alpha x + \beta y \in \Gamma$ となること。

$\Gamma^* = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ x \cdot t = \sum_{j=1}^{n} x_j t_j \geqq 0,\ t \in \Gamma\}$ とおく。Γ の dual cone と呼ばれる。Γ^* がある open cone の closure になるとき，Γ は regular open cone と呼ばれる。以下，常に Γ は regular open cone を表わし，Γ^* はその dual cone を表わすものとする。

Γ 上の tube domain $\{x+iy = (x_1+iy_1, \cdots, x_n+iy_n) \in \mathbb{C}^n ;\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \Gamma\}$ を T_Γ で表わす。

$$h^p(T_\Gamma) = \{f : \text{harmonic in } T_\Gamma,\ \|f\|_{h^p(T_\Gamma)} = \sup_{y \in \Gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty\}$$

$$H^p(T_\Gamma) = \{f \in h^p(T_\Gamma) ;\ f \text{ holomorphic in } T_\Gamma\}$$

と定義すると，共に Banach 空間になる。

また，

$$K_\Gamma(z) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i z \cdot t} dt \quad \text{は Cauchy kernel}$$

$$\mathcal{P}_\Gamma(x, y) = \frac{|K(x+iy)|^2}{K(2iy)} \quad \text{は Poisson kernel}$$

と呼ばれ

(i) $\mathcal{P}_\Gamma(x, y) \geqq 0$,

(ii) $\int \mathcal{P}_\Gamma(x, y)\, dx = 1 \qquad y \in \Gamma$,

(iii) $\delta > 0$ なら $\int_{|x| > \delta} \mathcal{P}_\Gamma(x, y)\, dx \longrightarrow 0$ as $y \in \Gamma \to 0$,

(iv) $y \in \Gamma$ fix すると，$\mathcal{P}_\Gamma(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ で $\lim_{x \to \infty} \mathcal{P}_\Gamma(x, y) = 0$.

をみたし，$P_\Gamma(x,y)$ は $L^1(\mathbb{R}^n)$ での approximate identity である。
さらに，$f \in H^p(T_\Gamma)$ なら $\lim_{y \in \Gamma \to 0} f(x+iy) = f(x)$ (in $L^p(\mathbb{R}^n)$) が存在し，

(4) $f(x+iy) = \int_{\mathbb{R}^n} P_\Gamma(x-t,y) f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} K_\Gamma(x-t+iy) f(t)\,dt$

となる。(より精しくは，Stein-Weiss [3] を参照).

さて，$A \in SO(n)$ (: 行列式が 1 の実 n 次正方行列) とし，$A\Gamma = \{Ax : x \in \Gamma\}$ 等とすると，容易に計算できるように，

(5) $(A\Gamma)^* = A\Gamma^*$

(6) $P_{A\Gamma}(x, Ay) = P_\Gamma(x,y) \qquad y \in \Gamma$

を得る。最後に $f \in A^{-1}H^p(T_{A\Gamma})$ とは，ある $g \in H^p(T_{A\Gamma})$ に対して $f(x,y) = g(x+iAy)$ となることをいう。

3. 結果

定理. Γ : regular open cone とする。$A_k \in SO(n)$ で $\bigcup_{k=1}^{j} \text{interior}(A_k\Gamma^*) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ とする。すると

$$\left\{ f(x,y) = \int P_\Gamma(x-t,y) f(t)\,dt \;;\; f \in H^p(\mathbb{R}^n) \right\}$$

$$= \left\{ f = f_{A_1} + \cdots + f_{A_j} \;;\; f_{A_k} \in A_k^{-1} H^p(T_{A_k\Gamma}),\ k=1,\cdots,j \right\}$$

で，左辺に極限函数 f の $H^p(\mathbb{R}^n)$ ノルム，右辺に $p>1$ のときは $\|f\|_{h^p(T_\Gamma)}$ ノルム，$p=1$ のとき $\|f\| = \inf\{\sum\|f_{A_k}\|_{h^1(T_\Gamma)}$; $f=\sum f_{A_k}$ の表現$\}$ とすると，左右は共に $H^p(\mathbb{R}^n)$ にノルム同型になる。

注．までの注意 $H^p(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ を用いれば，L^p 函数の Poisson 積分の特徴付けが得られたことになる。

同じく，

系 (i) $\{f(x,y)=\int \mathcal{P}_\Gamma(x-t,y)\,d\mu(t)$; $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$: $\mathbb{R}^n$ 上の有界測度$\}$

$=\{f=f_{A_1}+\cdots+f_{A_j}$; $f_k\in A_k^{-1}H^1(T_{A_k\Gamma})\}$ の $h^1(T_\Gamma)$ 閉包

(ii) $\{f(x,y)=\int \mathcal{P}_\Gamma(x-t,y)f(t)\,dt$; $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\}$

$=\{f(x,y)=\lim_{l\to\infty} g_l(x,y)$ $(\text{in } h^1(T_\Gamma))$; $g_l\in\sum_{k=1}^{j} f_{A_k}^l$ $(f_{A_k}^l\in A_k^{-1}H^1(T_{A_k\Gamma}))$ かつ $\{\lim_{y\to 0} g_l(x,y)\}$ は $L^1(\mathbb{R}^n)$ の uniformly integrable family をなす$\}$

定理の証明は，Carleson の結果 [1] のほんの少しのひねりと §2 で述べた Poisson kernel の性質の組み合せに過ぎないが，少しふれると，まず，[1] あるいは [2] と同じようにして，次のような有界作用素が存在する。

$T_k : H^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^p(T_{A_k\Gamma})$ $(k=1,2,\cdots,j)$

(7) $$f(x) = \lim_{y \to 0} \sum_{k=1}^{j} T_k f(x+iy) \quad (\text{limit in } L^1) \quad \text{かつ}$$

$$\|f\|_{H^p} \approx \sum_{k=1}^{j} \|T_k f\|_{H^p(T_{A_k\Gamma})}。$$

又，$f(x,y) \in A_k^{-1} H^p(T_{A_k\Gamma})$ ならある $g \in H^p(T_{A_k\Gamma})$ に対して $f(x,y) = g(x+iAy)$ であり，$\lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} g(x+iAy) \in H^p(\mathbb{R}^n)$ となるので，

(8) $$\int P_\Gamma(x-t, y) f(t)\,dt \underset{(6)}{=} \int P_{A\Gamma}(x-t, Ay) g(t)\,dt$$

$$\underset{(4)}{=} g(x+iAy) = f(x,y).$$

これより(7),(8)より定理でいう２つの集合は同じものであることがわかる。又，ノルム同値も §1 (§2) での注意と組み合せれば明らかである。

系は定理と $P(x,y)$ の性質(i)→(iv)より，普通の議論でできる。

4. $0<p<1$のときも同様な $H^p(\mathbb{R}^n)$ の特徴付けができるが，ここでは触れないことにする。

参考文献

1. L. Carleson, Two remarks on H^1 and BMO, Advances in Math. 22(1976), 269-277.
2. R.R.Coifman and G.Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull.Amer.Math.Soc. 83(1977), 569-645.
3. E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1971.