数理解析研究所講究録
第 367 巻 1979 年 201-214

ブラウン運動の超汎関数

名大 理　　飛田武幸

§1. 準備　　ブラウン運動 $\{B(t)=B(t,\omega)\ ;\ t\in R^1\}$ の汎関数を Brownian functional と呼び，その解析を論じたい．そのような汎関数はホワイトノイズ $\{\dot{B}(t)\ ;\ t\in R^1\}$, ただし $\dot{B}(t)=\frac{d}{dt}B(t)$, の汎関数

$$(1)\qquad \varphi(\dot{B}(t),\ t\in R^1)$$

のように表わし，$\dot{B}(t)$ を変数のように考えて取扱う方が好都合である．もちろん上記 (1) の記述は形式的なものであり，そのような φ の実現としては次のような方法がある．

まづ $\{\dot{B}(t)\}$ の確率分布 μ の導入である．見本関数 $\dot{B}(t,\omega)$ は t の関数とみれば超関数であり，μ は超関数の空間，たとえば $\mathcal{S}^*$ (Schwartz 空間 $\mathcal{S}$ の共役空間) 上の確率測度となる．この測度は次のように表わされる特性汎関数によって決定される：

$$(2) \qquad C(\xi) = \int_{\mathcal{S}^*} e^{i\langle x, \xi\rangle} d\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\|\xi\|^2}, \quad \xi \in \mathcal{S}.$$

ここに $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}^*$ とを結びつける canonical bilinear form であり，$\|\ \|$ は $L^2(R^1)$-ノルムを表わす．

こうして得られた測度空間 $(\mathcal{S}^*, \mu)$ において，殆どすべての x は $\dot{B}(t)$ の見本関数（実は超関数）とみなせる．そしてヒルベルト空間 $(L^2) = L^2(\mathcal{S}^*, \mu)$ の元 φ は（1）のように形式的に書いた Brownian functional の実現である．ただし分散は有限（μ について二乗可積分）とする．

上のようにして得られたヒルベルト空間 (L^2) 上での解析を実行するに当って重要な手段となるものが二つある．それを次に示そう．

i) <u>Wiener - Itô 分解</u>

空間 (L^2) は直和分解を許す：

$$(3) \qquad (L^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_n .$$

ここに $\mathcal{H}_n$ は次のように表わされる Fourier-Hermite 多項式から張られる．

$$(4) \qquad \prod_j H_{n_j}(\langle x, \xi_j\rangle/\sqrt{2}), \qquad \Sigma n_j = n, \quad \{\xi_j\}: L^2(R^1) \text{ の c.o.n.s.}$$

この部分空間 $\mathcal{H}_n$ は n 次重複 Wiener 積分の空間と呼ばれる.

ii) 変換 $\mathcal{T}$

ヒルベルト空間 (L^2) から $\mathcal{S}$ 上の汎関数の空間への変換 $\mathcal{T}$ を次式で与える:

$$(5)\qquad (\mathcal{T}\varphi)(\xi) = \int_{\mathcal{S}^*} e^{i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\,d\mu(x), \qquad \varphi\in(L^2).$$

いま, $\mathcal{F} \equiv \{\mathcal{T}\varphi\ ;\ \varphi\in(L^2)\}$ とおくと, 明らかに $\mathcal{F}$ はベクトル空間である. さらに $\mathcal{F}$ には $C(\xi-\eta)$, $\xi,\eta\in\mathcal{S}$, を再生核にもつ再生核ヒルベルト空間であるように位相を入れることができる. ここに C は (2) に現れた μ の特性汎関数である. そして $\mathcal{T}$ は両ヒルベルト空間 (L^2) と $\mathcal{F}$ との同型対応を与えている:

$$(6)\qquad (L^2) \cong \mathcal{F}, \qquad \text{under } \mathcal{T}.$$

さらに $\mathcal{T}$ を $\mathcal{H}_n$ に制限して $\mathcal{F}_n \equiv \mathcal{T}(\mathcal{H}_n)$ とおけば当然

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathcal{H}_n \cong \mathcal{F}_n, & \text{under } \mathcal{T}, \\ \mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty}\oplus\,\mathcal{F}_n, \end{cases}$$

であるが, さらに重要なことは $\mathcal{F}_n$ の元が, R^n 上の対称な

L^2-関数によって表現される（積分表現）ことである．まとめていえば

定理　　i) $\varphi \in \mathcal{H}_n$ ならば

$$(8) \qquad (\mathcal{T}\varphi)(\xi) = i^n C(\xi)\, U(\xi)$$

とかけて，さらに $\widehat{L^2}(R^n)$ （＝対称な $L^2(R^n)$-関数全体）に属する関数 F が存在して

$$(9) \qquad U(\xi) = \int\cdots\int_{R^n} F(u_1, \cdots, u_n)\,\xi(u_1)\cdots\xi(u_n)\,du_1\cdots du_n$$

と表わされる．しかもこのとき φ と F とは1対1に対応する．

ii) 上の φ と F との対応は $\sqrt{n!}$ を除き等距離的である：

$$(10) \qquad \|\varphi\|_{(L^2)} = \sqrt{n!}\,\|F\|_{L^2(R^n)}$$

この定理によりある種の φ の性質は F の性質から導かれ，また $\mathcal{H}_n$ での演算は $L^2(R^n)$ 上の作用素として実現できる場合があるなど，積分表現は我々の解析にとって有用である．

§2．超汎関数　まずブラウン運動の超汎関数の必要な理由を説明しよう．Brownian functional を（1）のように $\dot{B}(t)$，$t \in R^1$，の関数とみる方が好都合なのは，オ1にそれが各時点で独立な変数系となっていることで，（1）は独

立確率変数列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の関数 $\varphi(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の continuous analogue とみることができるからである．才2には t は時刻を示すパラメーターで，時間的推移を考慮した解析（いわゆる causal calculus）を遂行しようとすれば，扱う汎関数の変数は $\dot{B}(t)$ が <u>explicit</u> に出ていることが望ましい（smear されたものでなく）．こうしてみると，t の関数としてみれば超関数であるような $\dot{B}(t)$ の，一般には非線型な，汎関数を考えることを要求されていることがわかる．$(\mathcal{S}^*, \mu)$ の言葉でいえば，$x \in \mathcal{S}^*$ は超関数であるにもかかわらず，各 t について $x(t)$，$x \in \mathcal{S}^*$，の関数たとえば多項式とか指数関数を考えることが必要となった．超関数の一般論からは到底許容されることではないが，我々の場合 μ の台が極めて特殊な超関数のクラスに限定されるため，適当な <u>renormalization</u> を行うことによって上の理想が実現されるのである．

ここで重要なことは renormalization が空間 $\mathcal{F}$ においてごく自然に達成されるということである．それを例で示そう．

はじめは $\dot{B}(t)$ の巾である．$\dot{B}(t)$ の近似として $\Delta B/\Delta$ をとれば，$\dot{B}(t)^n$ は $(\Delta B/\Delta)^n$ で近似される．これらのものを (L^2) で実現するには $\langle x, \chi_{[0,t]}\rangle$ を $B(t)$ にとれば

よい．（定義関数 $\chi_{[0,t]}$ は $\mathcal{S}$ の元ではないが，$\langle x, \chi_{[0,t]}\rangle$ は (L^2) の元として確定することはできる）．いま $(\Delta B/\Delta)^n$ 自身ではなく，パラメーターをもつ Hermite 多項式

$$H_n(x, \sigma^2) = (\sigma^n / n! \sqrt{2^n})\ H_n(x/\sqrt{2}\sigma)$$

を用いてそれを $n!\, H_n(\Delta B/\Delta\ ;\ 1/\Delta)$ におきかえて $\mathcal{T}$ 変換を施すと

(11) $$i^n C(\xi) \frac{1}{\Delta^n} \int_{R^n}\!\!\cdots\!\int \chi_{\Delta^n}(u_1, \cdots, u_n)\, \xi(u_1) \cdots \xi(u_n)\, du_1 \cdots du_n$$

がえられる．これは $\mathcal{F}_n$ の元であり前者は $\mathcal{H}_n$ の元である．ここで Δ を 1 点 $\{t\}$ に収束させると（11）は

(12) $$i^n C(\xi)\, \xi(t)^n$$

に収束し，それは全く普通の関数であるが，もとの $\mathcal{H}_n$ − 汎関数の方は形式的な記述

(13) $$n!\, H_n(\dot{B}(t)\ ;\ 1/dt), \quad \left(\begin{array}{l}\text{ここで} \\ \dot{B}(t) = x(t) \\ \quad x \in \mathcal{S}^*\end{array}\right)$$

しか持ちえない．もちろん $\mathcal{H}_n$ の元ではなく超汎関数である．

次の例は $\mathcal{H}_2$ の元の極限とみられる

(14) $$\int_0^t \dot{B}(s)^2 ds$$

の renormalization である．これは

$$(15)\qquad \varphi = 2\int_0^t H_2(\dot{B}(s)\,;\,1/ds)\,ds = \int_0^t \left(\dot{B}(s)^2 - \frac{1}{ds}\right)ds$$

を考えればよくて，その $\mathcal{T}$ 変換は

$$(16)\qquad i^2 C(\xi)\int_0^t \xi(s)^2\,ds$$

である．

以上の例から推測されるように $\dot{B}(t)$ の多項式については加法的な renormalization（たとえば2次単項式ならその平均値を引き去る）でよかった．これをおし進めて，指数関数，特に

$$(17)\qquad e^{i\alpha\int_0^t \dot{B}(s)^2 ds}\ ,\qquad \alpha\in R^1,$$

の renormalization を矛盾なく行うとすれば，それは乗法的なものとならざるをえない．実際，そうした暁に $\mathcal{T}$ 変換を行えば $\mathcal{S}$ 上の汎関数

$$(18)\qquad s^t(\xi)\equiv C(\xi)\ e^{\frac{i\alpha}{2i\alpha-1}\int_0^t \xi(s)^2 ds}$$

を得る．なお（17）を renormalize する手続きは，まず $\dot{B}(s)$ を $\Delta_k B/\Delta_k$ で近似し指数部分を $i\alpha\sum(\Delta_k B/\Delta_k)^2\Delta_k$ でおきかえ，これをその平均値で割った後 $\{\Delta_k\}$ を細かくしていっ

た極限をとれば達成できる．この極限となる超汎関数を S^t と書くと，その $\mathcal{T}$ 変換（拡張されたもの）が (18) の $s^t(\xi)$ である．

ここで (L^2)-汎関数を超汎関数にまで一般化する方法を考えてみよう．上記2番目の例における (16) 式と $n=2$ としたとき積分表現を与える (9) 式とを比較してみる．(16) では (9) の $F(u_1, u_2)$ にあたるところを $\delta(u_1-u_2)$ とでも書くべき R^2 上の超関数が対応している．すなわち，ブラウン運動の超汎関数はその積分表現の核が適当な階数の超関数になったものと理解してよかろう．もちろん，本節の始めに述べたように $\dot{B}(t)$ の多項式等基本的なものはここでいう超汎関数のクラスに含めたい．

些か直截的ではあるが以上の考察から次の表を提示したい．

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{n!}\,\hat{H}^{-(n+1)/2}(R^n) & \cong & \mathcal{H}_n^{(-n)} & \cong & \mathcal{F}_n^{(-n)} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \sqrt{n!}\,\hat{L}^2(R^n) & \cong & \mathcal{H}_n & \cong & \mathcal{F}_n \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \sqrt{n!}\,\hat{H}^{(n+1)/2}(R^n) & \cong & \mathcal{H}_n^{(n)} & \cong & \mathcal{F}_n^{(n)} \end{array}$$

この表で $\hat{H}^m(R^n)$ は R^n 上の m 次ソボレフ空間 $H^m(R^n)$ と $\hat{L}^2(R^n)$ との共通部分，$\hat{H}^{-m}(R^n)$ はその共役空間である

$(m>0)$. また $\cong$ はすべて T またはその拡張による変換で同型になることを示し, $\cup$ は下の空間が上の部分空間であり下から上の空間の中への恒等写像が連続であることを示す. ソボレフ空間の選び方から, $\mathcal{H}_n$ を基準にして $\mathcal{H}_n^{(-n)}$ は $\mathcal{H}_n^{(n)}$ の共役空間である.

例えば (15) で表わされる汎関数は $\mathcal{H}_2^{(-2)}$ に属する. そしてその値は $\mathcal{H}_2^{(2)}$ の元との内積をとることによって評価される.

空間 $\mathcal{H}_n^{(-n)}$ の元をブラウン運動の n 次超汎関数という. また代数和 $\mathcal{H}=\sum_n \mathcal{H}_n^{(n)}$ をとり, その共役空間として $\mathcal{H}^*$ が定まるが, その元を単にブラウン運動の超汎関数という. 尚超汎関数についての説明に関しては文献 [4] を参照されたい.

§3. ファイマン積分への応用　前節で導入したブラウン運動の超汎関数を用いてファイマン積分(文献 [2])に対する一つの解釈を与えることができる.

いま Lagrangian $L=L(y,\dot{y})$, $y=y(s)$, $0\le s\le t$, は粒子の軌跡, $\dot{y}(s)=\frac{d}{ds}y(s)$, が与えられたとしよう. 簡単のため質量 m も $\hbar$ も 1 にとる. ファイマンのアイディアによれば y の汎関数

$$e^{i\int_0^t L(y(s),\,\dot{y}(s))\,ds}$$

をあらゆる可能な軌跡の集合の上で平均することによってpropagatorを得ようというのであるが，我々の立場から考えれば可能な軌跡の集合をいかにとらえ，その上のどのような測度で平均（積分）するかが問題となろう．これについて具体的には次のように考えたい．

粒子は時刻0で原点0にあり，時刻tで1点aに到達したとする．何も妨害するものがなければ直線的に進むが，いろいろゆらぐため，実際考察の対象となるのは直線＋"ゆらぎ"としてよかろう．そのような軌跡全体の上に導入される測度は，P. A. M. Dirac [1] の§32の示唆をうけて，ゆらぎが固定端ブラウン運動（Brownian bridge）となるようなものとすることが妥当と思われる．時間区間が$[0, t]$の固定端ブラウン運動は，ブラウン運動$\{B(t)\}$を用いて

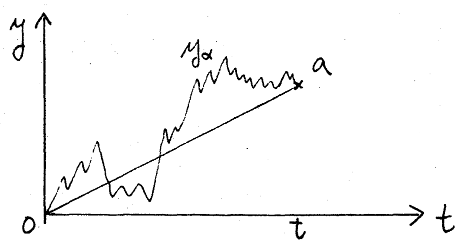
$$(19) \qquad x(s) = B(s) - \frac{s}{t}B(t), \qquad 0 \leq s \leq t,$$

で表わされる．したがって可能な軌跡yは次図のように

$$(20) \qquad y_\alpha(s) = \frac{s}{t}a + \alpha x(s)$$

と書いてよかろう．ここにαはゆらぎのパワーを示すパラメ

ーターとする.



こうして我々は propagator (Green 関数) を求めるために次の平均値を求めればよいことになった.

$$(21)\qquad \psi_\alpha(t,a) = \left\langle e^{i\int_0^t L(y_\alpha(s),\, \dot{y}_\alpha(s))\,ds} \right\rangle_r \longrightarrow \psi(t,a), \quad (\alpha \longrightarrow \infty).$$

ここで $\langle\quad\rangle_r$ は括弧内がブラウン運動の超関数となるため ($\dot{B}(s)^2$ を含む) 適当な renormalization を行って平均値を求めることを意味する.

以下我々の方法で $\psi(t,a)$ が具体的に計算できる例をあげておく. $B(t)$ は $\langle x, \chi_{[0,t]}\rangle$ として (S^*, μ) で実現したとする.

i) 自由粒子

Lagrangian は

$$(22)\qquad L = \frac{1}{2}\dot{y}(s)^2$$

である. よって

$$\psi_\alpha(t,a) = C(t)\left\langle e^{\frac{i}{2}\int_0^t \dot{y}_\alpha(s)^2 ds} \right\rangle_r$$

$$= C(t)\left\langle e^{\frac{i}{2}\alpha^2\int_0^t \dot{B}(s)^2 ds - \frac{i}{2}\alpha^2\left(\frac{B(t)^2}{t} - 1\right)} \right\rangle_r$$

をもとめればよい. ここで t に依存する定数 $C(t)$ をつけたの

は，renormalization が乗法的であるため定数倍の自由性が残されているからである．この計算で $\int_0^t B(s)^2 ds$ のみが注意されるところであるが，それはすでに前節で調べた通りである．$C(t) = 1/\sqrt{2\pi i t}$ にとればおめる自由粒子の propagator

$$(23) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi i t}} e^{\frac{i a^2}{2t}}$$

が得られる．

ii) 調和振動子

$$(24) \qquad L = \frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{\omega^2}{2} y^2$$

である．(21) に代入して ψ_α を計算するため準備となる計算をしておこう．ポテンシャルから出てくる積分は

$$I = \omega^2 \int_0^t y_\alpha(s)^2 ds = I_0 + I_1 + I_2, \qquad I_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0, 1, 2,$$

$$I_0 = \omega^2 \left(\frac{t a^2}{3} + \alpha^2 \frac{t^2}{6} \right)$$

$$I_1 = \omega^2 \left\{ 2\alpha \frac{a}{t} \int_0^t s B(s) ds - \alpha \frac{2at}{3} B(t) \right\}$$

I_2 の積分表現の核は $F_\alpha(u, v) = \omega^2 \alpha^2 \left[\frac{t}{3} + \frac{u^2 + v^2}{2t} - u \vee v \right]$,

である．$\dot{y}_\alpha^2$ の積分から出てくる項は，超汎関数の部分の他には

$$J = -\frac{i \alpha^2}{2t} \left(B(t)^2 - t \right)$$

がある．これは I_2 と一緒に処理できる．最後に問題の項 $\int_0^t \dot{B}(s)^2 ds$ が残るがこれも前節の議論から容易に renormalize できて，$\frac{1}{2}I$ と J からできる汎関数との内積を計算することになる．そして $\alpha \longrightarrow \infty$ とした上で我々は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi i t}} e^{\frac{ia^2}{2t} - \frac{i\omega^2 t a^2}{6}} \prod \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega^2 t^2}{n^2\pi^2}}} \cdot e^{-\frac{\omega^4 t^3 a^2 (-1)}{\pi^4} \frac{(-1)}{i} \sum \frac{1}{n^4\left(1-\frac{\omega^2 t^2}{n^2\pi^2}\right)}}$$

これは求める propagator

(25) $$\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\pi i \sin\omega t}} e^{\frac{i\omega a^2}{2\tan\omega t}}$$

となる．

iii) 調和振動子の場合と類似の計算で propagator の求まるもう一つの典型としてポテンシャル V が

$$V(a) = \int e^{ia\lambda} dm(\lambda), \qquad m\text{: 遠くで速く0になる有限正測度}$$

と表わされる場合がある（Alberverio－Høegh-Krohn の場合）．まず ψ_α をついで $\lim_{\alpha\to\infty} \psi_\alpha = \psi$ を求めて，ψ が方程式

(26) $$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\psi - V(a)\psi$$

をみたすことを証明することができる．

[文　献]

[1] P. A. M. Dirac, The principles of Quantum Mechanics. 4th. ed. Oxford Univ. Press. 1958.

[2] R. P. Feynman, Space-time approach to non-relativistic Quantum Mechanics. Review of Modern Physics 20 (1948), 367-387.

[3] T. Hida, ブラウン運動. 岩波. 1975.

[4] ______ , Analysis of Brownian functionals. Carleton Mathematical Lecture Notes no. 13, 2nd ed. Carleton Univ. 1978.