数理解析研究所講究録
第 367 巻 1979 年 215-228

拡散過程における most probable paths

東大教養　高橋陽一郎

§0　序：定理と予想

Feymann の path integral は古典力学から量子力学への移行を可能とし，Maslov の準古典化はその逆の道筋を与えるものと考えられる．同様のことを，古典力学と拡散方程式の間で考えれば，どのようになるであろうか．ここでは，古典化の方向で得られた結果を報告する．なお，今回の研究会で初めて，伊藤秀美，D.Dür 両氏とその研究を知ることができた．両氏及び研究会の arrange をされた江沢，長谷川両先生に感謝したい．

以下では，次のような拡散方程式あるいは確率微分方程式（SDE と略す）を考える．

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\mathcal{G}u\equiv\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\right)+\sum_{i=1}^{d}f^i\frac{\partial u}{\partial x^i}$$

$$(2)\qquad dX_t^i=\sum_{\alpha=1}^{d}\sigma_\alpha^i(X(t))\circ dB_t^\alpha+f^i(t,X(t))dt\qquad(i=1,\cdots,d)$$

$\mathbb{B}(t)=(B^1(t),\cdots,B^d(t))$ は Brown 運動

ただし，考える函数はすべて滑らかであると仮定し，拡散係

数 $(g^{ij}(x))$ は正定値としておく．行列 $\sigma(x)=(\sigma^i_j(x))$ は，$\sigma^*\sigma=(g^{ij})$ となるもの（選び方は一意でない），函数 $g(x)$ は，行列 (g^{ij}) の逆行列 (g_{ij}) の行列式とする．

これらの方程式は，§1 で述べるように，リーマン多様体上の方程式を座標で書き下したものと見るのが自然である．以下，リーマン距離を $d(x,y)$ で表わす．（計量は，$ds^2=\sum g_{ij}dx^i dx^j$）

定理1．$\varphi(t)$, $0\leqq t\leqq T$ を，滑らかな曲線とすると SDE (2) の定める拡散過程 $(X(t), P_x)$ に対して，次式が成立する：

$$(3)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{P_{\varphi(0)}(d(X(t),\varphi(t))\leqq\varepsilon,\ 0\leqq t\leqq T)}{P_{\varphi(0)}(d(\hat{X}(t),\varphi(t))\leqq\varepsilon,\ 0\leqq t\leqq T)}=e^{-\tilde{S}_T(\varphi)}.$$

ただし，

$$(4)\qquad \tilde{S}_T(\varphi)=\int_0^T\tilde{L}(\varphi(t),\dot{\varphi}(t))dt,\quad \tilde{L}(x,v)=\frac{1}{2}\|v-f(x)\|_x^2+\frac{1}{2}\operatorname{div}f(x)$$

$$\|v\|_x=\sqrt{\sum g_{ij}(x)v^iv^j},\quad \operatorname{div}f=\sum_i\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}f^i)$$

また，$\hat{X}(t)$ は，$f\equiv 0$ の場合に SDE(2) の定める拡散過程である．なお，(3) の収束は，時刻 T，係数 σ，f 及び曲線 φ に関して一様である（適当な範囲で，§2）

もし，σ が単位行列であれば，(3) の左辺の分母は，計算できる．(S. Watanabe [1]) その結果は

$$(5) \qquad P(\|B(t)\|\leqq\varepsilon,\ 0\leqq t\leqq T)\sim C e^{-\frac{\lambda T}{\varepsilon^2}} \qquad (\varepsilon\to 0)$$

である．ただし，λ は固有値問題

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta v=\lambda v & (\|x\|=\sqrt{\sum (x^i)^2}<1), \\ v|_{\|x\|=1}=0. & (\Delta=\sum_{i=1}^{d}(\frac{\partial}{\partial x^i})^2) \end{cases}$$

の最小固有値，定数 C は，対応する正規化された固有函数 v から，$C=v(0)\int_{\|x\|<1}v(x)dx$ として与えられる．

物理の文献で Onsager-Machlup 函数と呼ばれているものは，

$$(6) \qquad \begin{cases} \lim_{\varepsilon\to 0}\dfrac{P(d(X(t),\varphi(t))\leqq\varepsilon,\ 0\leqq t\leqq T)}{Ce^{-\frac{\lambda T}{\varepsilon^2}}}=e^{-S_T(\varphi)} \\ S_T(\varphi)=\int_0^T L(\varphi(t),\dot\varphi(t))dt \end{cases}$$

によって定まる$\underbrace{\text{函数}}_{L(x,v)}$と考えてよいであろう．このとき，次のような予想が可能である．

予想　函数 $L(x,v)$ は存在し，次式で与えられる．

$$(7) \qquad L(x,v)=\frac{1}{2}\|v-f(x)\|_x^2+\frac{1}{2}\mathrm{div}\, f(x)-\frac{1}{24}R(x)$$

ただし，$R(x)$ は点 x での Ricci の曲率スカラー $\sum_{j,k}g^{jk}R_{jk}$ である．これについては次の定理が成立する．

定理2．定曲率空間では，(6),(7) が成立する．

なお，次元 $d=2$ ならば，予想は正しいこともわかる．(§2)

備考．(g_{ij}) に対応するリーマン多様体が局所ユークリッド的な時，即ち，ある変換 F に対して，$\sigma^i_\alpha = \frac{\partial F^i}{\partial x^\alpha}$ と書ける場合はもちろん成立している．距離を $\|x\| = \sqrt{\sum (x^i)^2}$ のかわりに，$\|x\|_\infty = \max |x^i|$ とした場合は，H. Ito [2] で証明されている．

定義．与えられた条件（例えば，$\varphi(0)=a$, $\varphi(T)=b$）の下で，作用量積分 $S_T(\varphi)$ を最小にする曲線 $\varphi(t)$, $0 \leqq t \leqq T$, を most probable path と呼ぶ．

例えば，$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u$ $\left(\Delta = \sum \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2\right)$ あるいは，ブラウン運動 $B(t)$ に関する most probable paths は，$L(x,v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$ ゆえ，直線（線分）である．なお，拡散過程に関する多くの性質を，most probable paths ことばによって表現できるものと思われるが，これからの問題のようである．

最後に，このような問題の（日本の確率論における）由来について触れておきたい．それは，(1) に関して

(イ) 生成作用素 $\mathcal{L}_g$ が essentially self-adjoint であること即ち，ある密度函数 $p(x)$ をとれば，$\mathcal{L}_g$ が $L^2(p\,dx)$ で自己随伴的であることを，確率論的に，

(ロ) 左廻りの path と右廻りの path の出現確率が等しい

ということによって特徴づけるという問題である．これは，M.Motoo, S.Watanabe などによって考えられ，拡散過程に対しては，S.Watanabe が解決している．(結果は，[2] に述べられている)

§1. 特殊な場合；リーマン幾何の必要性

一次元の場合を考えよう．方程式 (2) は簡単に書け，

(1) $$dX_t = \sigma(X(t))\circ dB_t + f(t, X(t))dt$$

となる．とくに，$\sigma(x)\equiv 1$ の場合は

(2) $$dX_t = dB_t + f(t, X(t))dt$$

である．この場合は，所謂 Girsanov の定理：

$$P_a(X\in\Gamma) = E_a[\, e^{\int_0^T f(t,B(t))dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T f(t,B(t))^2 dt} ; \Gamma]$$
$$^\forall\Gamma\in \mathcal{F}_T \equiv \sigma(B(s),\ s\leqq T) \quad (\text{時刻}T\text{までの現象})$$

を用いれば，ただちに，定理 1 が従う．

今，$F'(x) = \frac{1}{\sigma(x)}$ となる函数 F をとり，拡散過程

$$Y(t) = F(X(t)) \qquad (X(t) : (1)\text{の解})$$

を考えれば，これは，

(2′) $$dY_t = dB_t + \tilde{f}(t, Y(t))dt$$

の解となる．ただし，$\tilde{f}(t,y) = f(t, F^{-1}(y))/\sigma(F^{-1}(y))$，$F^{-1}$ は F

の逆函数である．従って，この場合，リーマン距離 $d(x_1, x_2) = |F(x_1) - F(x_2)|$ に注意すれば，(1) の場合にも定理 I が成立することがわかる．

通常の距離 $|x_1 - x_2|$ に関しては次のような形になる．

定理 3　$\sigma(x) > 0$ を C^4 級，f を C^2 級函数，曲線 $\varphi(t)$, $0 \leqq t \leqq T$, は C^2 級とする．このとき，SDE (1) の解 $X(t)$ に対して，$\varepsilon \to 0$ の時，次式が成立する．

(3)
$$
\begin{aligned}
&P_{\varphi(0)}(|X(t) - \varphi(t)| \leqq \varepsilon,\ 0 \leqq t \leqq T) \\
&= \exp\left\{ -S_T(\varphi) - \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \int_0^T \sigma(\varphi(t))^2 dt + \frac{2\lambda}{3} \int_0^T \left(\sigma^3 \left(\frac{1}{\sigma}\right)''\right)(\varphi(t)) dt + O(\varepsilon) \right\}
\end{aligned}
$$

ただし，
$$
S_T(\varphi) = \int_0^T L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) dt
$$
$$
L(x, v) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\sigma(x)} \right)^2 + \frac{1}{2} \sigma(x) \left(\frac{f}{\sigma} \right)'.
$$

この事実は，§0 の (6) の極限が存在しないこと，従って通常の距離に関しては，most probable paths という概念が成立しないことを示している．しかし，拡散係数が位置に依存するということは，空間がある種の歪みをもつとも解釈でき，その歪みにそった距離，リーマン距離，に関しては，既に見たように，Onsager-Machlup 函数は存在するのであるから，リーマン多様体上で考えるのが自然なことと思われる．

定理3の証明の概略は次のようなものである.

1°. $|X(t)-\varphi(t)| \leqq \varepsilon \iff F(\varphi(t)-\varepsilon) \leqq Y(t) \leqq F(\varphi(t)+\varepsilon)$

$$\iff \left| Y(t) - \frac{1}{2}[F(\varphi(t)-\varepsilon)+F(\varphi(t)+\varepsilon)] \right| \leqq \varepsilon C(t,\varepsilon)$$

ただし, $C(t,\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon}[F(\varphi(t)+\varepsilon) - F(\varphi(t)-\varepsilon)]$

2°. 過程 $Z(t) = Y(t) - \frac{1}{2}[F(\varphi(t)-\varepsilon) + F(\varphi(t)+\varepsilon)]$ に関して, Girsanovの定理を適用して,

$$P_{\varphi(0)}(|X(t)-\varphi(t)| \leqq \varepsilon, 0 \leqq t \leqq T) = E_0[|B(t)| \leqq C(t,\varepsilon), 0 \leqq t \leqq T, L(t)]$$

($L(t)$ はある multiplicative functional)

3°. 時間変更 $B(T_\varepsilon(t))$, $T_\varepsilon^{-1}(t) = \int_0^t \frac{ds}{C(t,\varepsilon)^2}$, を用いて, 2° の右辺の計算を実行する. (3) の右辺の形は, 漸近的に,

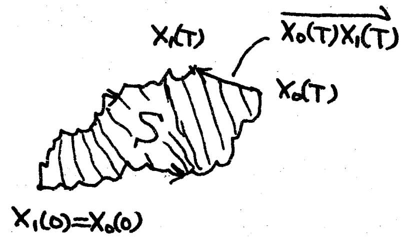
$$\frac{1}{\varepsilon^2} T_\varepsilon^{-1}(T) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \sigma(\varphi(t))^2 dt - \frac{2}{3}\int_0^T \left(\sigma^3\left(\frac{1}{\sigma}\right)''\right)(\varphi(t))dt + \underset{(\varepsilon\to 0)}{O(\varepsilon)}$$

であることから出てくる.

拡散過程を幾何学的に捉えることは, 近年実行されつつあり, 例えば, Stokesの定理も成立する: その前提として, 微分形式 $\eta = \sum f^i dx^i$ の sample path $X[0,T] = \{X(t) \mid 0 \leqq t \leqq T\}$ 上での積分 $\int_{X[0,T]} \eta$ が $\int_0^T \sum f^i \circ dX^i$ として定義される. $X_k(t)$, $k=0,1$ を §0 (2) の形の二つのSDEの解とし, ランダムな曲面 S: $X(\alpha,t) = \alpha X_1(t) + (1-\alpha) X_0(t)$, $(\alpha,t) \in [0,1] \times [0,T]$ を考えると, 次の等式が成立する:

$$(4)\qquad \int_{X_1[0,T]}\eta-\int_{X_0[0,T]}\eta-\int_{\overrightarrow{X_0(T)X_1(T)}}\eta=\int_S d\eta$$

証明は，折れ線近似が sample path に収束するという事実による．(詳しくは，[6])



次節の一般の場合で用いられるのは，この事実と，次の連続な二乗可積分なマーチンゲールの性質である：$M_i(t)$, $1\leq i\leq n$, を局所二乗可積分な連続マーチンゲールとし，

$$(5)\qquad dM_i\cdot dM_j=\Phi_{ij}(t,\omega)dt,\qquad \Phi_{ij}\in L_1^{loc}.$$

と書けるとする．$\Psi_{i\alpha}(t,\omega)\in L_2^{loc}$ を，$\sum_{\alpha=1}^{m}\Psi_{i\alpha}\Psi_{j\alpha}=\Phi_{ij}$ となるように選ぶとき，独立なブラウン運動 $W_1(t),\cdots,W_m(t)$ が存在して，

$$(6)\qquad dM_i=\sum_{\alpha=1}^{m}\Psi_{i\alpha}(t,\omega)dW^\alpha\qquad (i=1,\cdots,n)$$

と表現できる．ただし $m=\text{rank}\,(\Phi_{ij})$ は一定とする．

この証明は，$m=n$ のときには，[4] にある．ここで考えているマーチンゲールは，$\sum_{\alpha=1}^{d}\Theta_\alpha^i dB^\alpha=dM^i$ の形のものであるから，$n>m$ の時も容易に示される．

さて，与えられた SDE が

$$(7)\qquad dX^i=dB^i+f^i(t,X(t))dt\qquad (i=1,\cdots,d)$$

の形の場合の証明は，stochastic な Stokes の定理から簡単に導かれる．一次元の場合と同様，先ず，所謂 Girsanov の定理を用い

れば，

(8) $$P_{\varphi(0)}\left(d(X(t),\varphi(t))\leqq\varepsilon,\ 0\leqq t\leqq T\right)=E_0\left[e^{A(T)}\ ;\ \|B(t)\|\leqq\varepsilon,\ 0\leqq t\leqq T\right]$$

となる．ただし，　$\tilde{f}(t,y)=f(t,y+\varphi(t))$ として，

(9) $$\begin{aligned}A(T)&=\int_0^T\sum_\alpha\tilde{f}^\alpha(t,B(t))dB^\alpha-\frac{1}{2}\int_0^T\sum_\alpha\tilde{f}^\alpha(t,B(t))^2dt\\&=\int_0^T\sum_\alpha\tilde{f}^\alpha(t,B(t))\circ dB^\alpha\\&\qquad-\frac{1}{2}\int_0^T\sum_\alpha\left\{\frac{\partial\tilde{f}^\alpha}{\partial x^\alpha}(t,B(t))+\tilde{f}^\alpha(t,B(t))^2\right\}dt\end{aligned}$$

ここで，才三辺の才2項は，$\|B(t)\|\leqq\varepsilon$　$(0\leqq t\leqq T)$ であるから，

(10) $$-\frac{1}{2}\int_0^T\sum_\alpha\left\{\frac{\partial\tilde{f}^\alpha}{\partial x^\alpha}(t,0)+\tilde{f}^\alpha(t,0)^2\right\}dt=-\frac{1}{2}\int_0^T\left\{\operatorname{div}f(t,\varphi(t))+\|f(t,\varphi(t))\|^2\right\}dt$$

で，高々　$O(\varepsilon T)$ の差で近似できる．才1項は，Stokes の定理の適用できる形で，（$X_0(t)\equiv0$，$X_1(t)=B(t)$）　$O(\varepsilon)$ の差で，

(11) $$\int_0^1d\theta\int_0^T\sum_{i,j}\frac{1}{2}\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(t,\theta B(t))(B^i(t)\circ dB^j-B^j(t)\circ dB^i)\equiv N(t)$$

によって近似される．ここで，(11) に現れる　$B^i\circ dB^j-B^j\circ dB^i$ は，$B^idB^j-B^jdB^i$ に等しく，従って，(11) はマーチンゲールであり，さらに，radial part　$\sum_{\alpha=1}^dB^\alpha dB^\alpha$ と直交している．これから，(8) の右辺の計算の際，radial motion $R(t)=\|B(t)\|$ で条件づけたものを先に計算すれば，

(12) $$E_0[e^{A(T)}\mid\mathcal{F}_R]=e^{O(\varepsilon T)}E_0[e^{N(t)}\mid\mathcal{F}_R]\times e^{-S_T(\varphi)}$$

という量が現れるが，$N(T)$ は $\mathcal{F}_R$ と独立なマーチンゲール $B^idB^j-B^jdB^i$ に関する積分で表現できているので，計算可能で，　$(dN)^2=O(\varepsilon^2)dt$ に注意すれば，(12) は $e^{-S_T(\varphi)+O(\varepsilon T)}$

であることがわかる．よって定理１がこの場合に示された．

§2. 一般の場合

先ず定理１の証明の概略をのべ，最後に定理２の証明について触れる．

<u>第一段</u>〈Riemannian normal coordinate〉 正数 ε_0 を選べば時刻 t 毎に次のような座標変換 $\bar{x}=\Phi_t(x)$ をとることができる．

イ） Φ_t は $\varphi(t)$ の ε_0 近傍を，$\Phi_t(\varphi(t))=0$ の近傍に写す．

ロ） 新しい座標では，次の関係が成立する．

$$(1)\qquad \sum_j \bar{g}_{ij}(t,\bar{x})\bar{x}^j=\bar{x}^i \quad \text{or} \quad \sum_j \bar{g}^{ij}(t,\bar{x})\bar{x}^j=\bar{x}^i$$

もちろん，$(\bar{g}^{ij}(t,\bar{x}))=\Phi'_t(x)(g^{ij}(x))\,{}^t\Phi'_t(x)$ $(\bar{x}=\Phi_t(x))$ で，$\bar{g}^{ij}$ は与える．ただし $'=\frac{\partial}{\partial x}$．このとき，

$$(2)\qquad \bar{g}_{ij}(t,\bar{x})=\delta_{ij}+\sum_{k,l}C_{ij,kl}(t)\bar{x}^k\bar{x}^l+O(|\bar{x}|^3) \quad (\bar{x}\to 0)$$

が成立する．また，(1) から，

$$(3)\qquad d(0,\bar{x})=\|\bar{x}\|.$$

ハ） $\Phi_t(x)$ は t についても滑らかで，

$$(4)\qquad \dot{\Phi}_t(0)=-\Phi'_t(0)\dot{\varphi}(t) \qquad (\,\dot{}=\tfrac{\partial}{\partial t})$$

この変換を用いて，与えられた拡散過程 $X(t)$ （§0.(2) でみたすもの）から，$\bar{X}(t)=\Phi_t(X(t))$ を作れば，SDE

(5) $$d\bar{X}_t = \bar{\sigma}(t, \bar{X}(t))\circ dB + \bar{f}(t, \bar{X}(t))dt$$

をみたす．ここで

(6) $$\bar{f}(t, \bar{x}) = \Phi_t'(x)f(t, x) + \dot{\Phi}_t(x) \qquad (\bar{x} = \Phi_t(x))$$

また，$\bar{\sigma}(t, \bar{x})$ は，性質(1) によって（$\bar{\sigma}^t\bar{\sigma} = (g^{ij})$ なる範囲で取りかえれば）対称行列で，

(7) $$\bar{\sigma}(t, \bar{x})\bar{x} = \bar{x},$$

をみたすものと仮定してよい．

このように，リーマンの normal coordinate で表わすことによって，§1 で述べたブラウン運動のもっていた性質（式(11) の直後）が保たれて，（後のため，$\bar{X}$ を Y と読みかえて）

(8) $$(Y^i\circ dY^j - Y^j\circ dY^i).(\sum_k Y^k\circ dY^k) = 0 \quad (\forall i \neq j)$$

が成立する．ずれ(drift) のあるブラウン運動の場合の証明の要点のもう一つは，radial part $R(t)$ がある意味で独立に定まっていることであった．これを保証するために，Girsanov の定理の適用の際に基準とする過程 $Y(t)$ を，SDE

(9) $$dY = \bar{\sigma}(t, Y(t))\circ dB - \alpha(t, Y(t))Y(t)dt$$

によって定める．ただし，$\alpha(t, y)$ は有界可測函数で，

$$\alpha(t, y) = \frac{1}{2\|y\|^2}\mathrm{Tr}(\bar{\sigma}(t, y) - I) \qquad (y \neq 0)$$

となるものをとる．すると，$R(t) = \|Y(t)\| = d(o, Y(t))$ は，

(10) $$dR = dW' + \frac{d-1}{2R(t)}dt \qquad (dW' = \langle \frac{Y(t)}{R}, dB\rangle)$$

によって支配されている過程，即ち Bessel 過程となる．また

性質(8)は保存されている.

<u>才二段</u>　過程 $X(t),\ 0\leq t\leq T$ と $Y(t),\ 0\leq t\leq T$ の分布は絶対連続で，前者は後者に対して，密度 $e^{A(T;f)}$ をもつ(Girsanov の定理). 従って

$$\text{(11)}\quad \begin{aligned} A(T;f) = &\int_0^T \langle \bar{g}(t,Y(t))[\hat{f}(t,Y(t))+\alpha(t,Y(t))Y(t)],\ (dY)_{\mathrm{mart}}\rangle \\ &-\frac{1}{2}\int_0^T \langle \bar{g}(t,Y(t))[\hat{f}(t,Y(t))+\alpha(t,Y(t))Y(t)],\ \hat{f}(t,Y(t))+\alpha(t,Y(t))Y(t)\rangle dt \end{aligned}$$

の計算を実行する. ただし，$\bar{g}(t,y)=(\bar{g}_{ij}(t,y))$, $\langle\ ,\ \rangle$ は内積.

方法は，ずれのあるブラウン運動の場合と全く同じで，

1°. $A(T;f)=\int_0^T a^f(t,Y(t))\circ dY - \int_0^T b^f(t,Y(t))dt$ という形に書き直す.

2°. 才1項に Stokes の定理を適用し，性質(8),(10)を利用して，先ず，radial part $R(t)$ で条件づけた平均を計算する．という順序になる. 計算はいくらか複雑であるが，$S_T(\varphi)$ の部分は，(11)の右辺才2項の $R(t)\to 0$ の極限として得られるものと，1° の書き直しの際，b^f に繰り込まれる項のうち，$\hat{f}$ を含むものの $R(t)\to 0$ の極限の和として得られる. (このとき $\alpha(t,y)$ の有界性を用いている) b^f に繰り込まれる残りの部分，α を含む項は，$\frac{1}{2}\mathrm{div}(\alpha y)\sim\frac{d}{2}\cdot\alpha$ $(y\to 0)$ である. そして，

$$\text{(12)}\qquad \alpha(t,y)=\frac{1}{2|y|^2}\mathrm{Tr}(\bar{\sigma}(t,y)-I)=\frac{-1}{4}\sum_{i,k,l}C_{ii;kl}(t)\frac{y^k}{|y|}\frac{y^l}{|y|}+O(|y|)\quad (|y|\to 0)$$

さらに，Ricciの曲率テンソル R_{jk} に対して，

$$R_{jk} = 3\sum_i C_{ii,jk}$$

が成立するので，

$$\text{(13)}\quad \begin{aligned} &P_{\varphi(0)}\bigl(d(X(t),\varphi(t))\leqq\varepsilon,\ 0\leqq t\leqq T\bigr)\\ &= e^{-\widehat{S}_T(\varphi)+O(\varepsilon T)}\,E_0\Bigl[e^{\frac{d}{24}\int_0^T\sum_{j,k}R_{jk}(\varphi(t))\frac{Y^k(t)Y^j(t)}{R(t)^2}dt};\\ &\qquad\qquad R(t)\leqq\varepsilon,\ 0\leqq t\leqq T\Bigr]\\ &\qquad\qquad (\varepsilon\to 0)\end{aligned}$$

を得る．

<u>定理1の証明</u>:　$dX=\sigma\circ dB+f\,dt$，$d\tilde{X}=\sigma\circ dB$ で定まる2つの拡散過程に対して，(13)を適用し，比をとれば，定理1の主張(3),(4)が得られる．

さらに，(13)を用いれば，二,三の場合に予想を証明することができる．

<u>例1</u>（Einstein 空間）　$R_{jk}=\frac{R}{d}g_{jk}$ の場合，(13)の右辺の期待値は，

$$e^{\frac{RT}{24}}P_0\bigl(R(t)\leqq\varepsilon,\ 0\leqq t\leqq T\bigr)=e^{-\frac{\lambda T}{\varepsilon^2}+\frac{RT}{24}+O(\varepsilon)}$$

となるので，§0の予想は正しい．

<u>例2</u>（定曲率空間）　曲率テンソル $R^i_{jkl}=\frac{R}{d(d-1)}(g_{jl}\delta^i_k-g_{jk}\delta^i_l)$ の場合，やはり，$R_{jk}=-R^i_{jki}=\frac{R}{d}g_{jk}$ ゆえ，予想は成立．

例3. $d=2$ の場合も予想は正しい.

この証明は，極座標に直すことによって直接計算に訴えてできる．残念ながら，$d \geqq 3$ の場合には，(13)の右辺の期待値の計算が可能な座標の選び方が不明で，予想の証明はできていないが，予想は次のことと同値である:

拡散過程 $Y(t)$ の球面部分 $Y^i(t)/R(t)$, $i=1,\cdots,d$ は，$R(t) \leqq \varepsilon$ $(0 \leqq t \leqq T)$，$\varepsilon \to 0$ の時，「ブラウン運動の球面部分に近い」．即ち，$\varepsilon = 0+$ では，(13)の「$Y^i(t)Y^j(t)/R(t)^2$ を δ^{ij}/d におきかえてよい」

文献

[1] 渡辺信三. private communication 1976.

[2] H. Ito, Probabilistic Construction of Lagrangean of Diffusion Processes and Its Application, Prog. Theo. Physics, 59-3 (1978)

[3] D. Dürr & A. Bach The Onsager-Machlup Function as Lagrangian for the Most Probable Path of a Diffusion Process Comm. math. Physics 60-2 (1978)

[4] 渡辺信三: 確率微分方程式 / H.P. McKean: Stochastic Integral

[5] M. Spivak; Differential Geometry (特に vol II)

[6] N. Ikeda & S. Manabe, Stochastic Integral of Differential Forms and its Applications, Proc. Internat. Conf. on Stoch. Analysis (ed. Friedman & Pinsky) Northwestern Univ. (1978)