数理解析研究所講究録
第368巻 1979年 1-22



# 有界対称領域の各境界に付随する ユニタリ表現と核関数

山口大理学部　井上 透

## §1 序

$D=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|<1\}$, $B=\partial D=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|=1\}$ とすれば群 $G=SU(1,1)=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\ \bar b&\bar a\end{bmatrix};\ |a|^2-|b|^2=1\right\}$ は一次分数変換

$$z\longrightarrow g\cdot z=\frac{az+b}{\bar b z+\bar a},\qquad g=\begin{bmatrix}a&b\\ \bar b&\bar a\end{bmatrix}$$

としてDおよびBに推移的に作用する。従って $K=\{g\in G\,;\,g\cdot 0=0\}$, $P=\{g\in G\,;\,g\cdot 1=1\}$ とおけば $D=G/K$, $B=G/P$ と書ける。KおよびPの既約ユニタリ表現の同値類全体を $\hat K$, $\hat P$ とすれば、$\hat K$(の部分集合)に対応してGの *discrete series* の表現が $D=G/K$ 上の正則(または反正則)関数からなる Hilbert 空間上で実現でき、$\hat P$ に対応してGの連続主系列の表現が $B=G/P$ 上の2乗可積分関数の空間 $L^2(B)$ 上で実現できる。Gの連続主系列の表現は、ただ一つの例外(それを $V_1$ とする)を除きすべて既約で $V_1$ は $g\in G$ に対し正則写像 $z\to g\cdot z$ の点 $u$ での complex

Jacobian を $J(g,u)$ (したがって $g=\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$ であれば $J(g,u)=(\bar{b}u+\bar{a})^{-2}$) とすれば

$$(1.1) \qquad (V_1(g)f)(u) = J(g^{-1},u)^{\frac{1}{2}} f(g^{-1}\cdot u), \qquad f\in L^2(B),\ u\in B$$

で与えられる。所謂 $G$ の holomorphic discrete series は $n\geq 2$ なる整数で parametrize され $n$ に対応する表現を $T_n$ とすれば $T_n$ は Hilbert 空間

$$(1.2a) \qquad H_n = \left\{ f\in \mathcal{O}(D)\ ;\ \int_D |f(z)|^2 (1-|z|^2)^{n-2}\, dx\, dy < \infty \right\}$$

($z=x+iy$, $\mathcal{O}(D)$ は $D$ で正則な関数全体)上で実現でき、$G$ の作用は

$$(1.2b) \qquad (T_n(g)f)(z) = J(g^{-1},z)^{\frac{n}{2}} f(g^{-1}\cdot z)$$

で与えられる。ところで (1.2ab) において $H_1$, $T_1$ を同様に定義すれば $H_1=\{0\}$ となり自明な表現しか得られない。しかし $H^2(D)$ を $D$ の Hardy 空間 i.e.

$$H^2(D) = \left\{ f\in \mathcal{O}(D)\ ;\ \sup_{0<r<1} \int_B |f(ru)|^2 du < \infty \right\}$$
$$\left( \cong \mathcal{O}(\bar{D}) \text{ のノルム } \|f\|^2 = \left( \int_B |f(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \text{ に関する完備化} \right)$$

($du$ は $B$ の Lebesgue 測度) とすれば $H^2(D)\neq\{0\}$ で $T_1$ を (1.2b) におけるように定義すれば $T_1$ は $H^2(D)$ 上での既約ユニタ

り表現となる。しかも$H^2(D)$は各関数にその境界値を対応させることにより$L^2(B)$の閉部分空間として埋めこめるから$T_1$と(1.1)における$V_1$の作用をみれば表現$(T_1, H^2(D))$は例外的な表現$(V_1, L^2(B))$の部分表現とユニタリ同値になることがわかる。このような事情から$(T_1, H^2(D))$, $(V_1, L^2(B))$は特に興味のある表現ということができる。ところで単位円板$D$は最も簡単な有界対称領域の例であるが、$D$を$\mathbb{C}^n$の有界対称領域、すなわち$D$は$\mathbb{C}^n$の有界領域で各$z \in D$に対し$z$を孤立不動点とする$D$の正則同相$\sigma_z$で$\sigma_z^2 = 1$となるものが存在するとすればよく知られているように$D$は等質空間となり$D = G/K$（$G$は半単純Lie群、$K$は極大コンパクト部分群）と表わされる（逆に$G/K$を非コンパクト型Hermite対称空間, $\dim_{\mathbb{C}} G/K = n$とすれば$G/K$は$\mathbb{C}^n$のある有界領域$D$と正則同相）. $G$の$D$での作用は$D$の$\mathbb{C}^n$での閉包$\bar{D}$に連続的に拡張され、$D$の境界$\partial D = \bar{D} - D$は$\operatorname{rank} D = r$とすれば$r$個の$G$軌道$B_1, \cdots, B_r$のdisjoint unionになっていて、それらのうち次元の一番小さいのはコンパクト（それ以外は非コンパクト）で$D$のSilov境界である. これら$D$の境界$B_1, \cdots, B_r$の詳しい構造はWolf-Korányi [7]により分かっているが、本稿では$D$の各境界$B_i$に付随するベクトル値Hardy type Hilbert空間とその上での$G$の既約ユニタリ表現が構成され、それらの表現が境界値をとる操作に

より、ある連続系列の表現に埋めこめ、従ってその連続系列の表現が可約であることの概略を示す。さらにそれらHardy type Hilbert空間は（作用素値）再生核関数を持つことが示されるが、そのexplicit formula（特別の場合としてDのCauchy-Szegö核関数のそれが得られる）および核関数による積分作素のLie群論的表示についても触れる（詳細は[3]を参照されたい）。

Knapp-Okamoto [4] においてholomorphic discrete seriesのlimitが$G/T$（Tはコンパクト Cartan部分群）上の正則line bundleの正則切断からなるあるHilbert空間上で構成されているが、これらの表現達は、Dの実余次元1の境界に対応して構成されるものとユニタリ同値になっている。さらにRossi-Vergne [8] は$G/K$をtype IIのSiegel領域として実現し、その各境界に対し一つづつスカラー値Hardy type空間とその上でのGの表現を構成しているが、それらと同値な表現も特別の場合として得られる。

## §2 準備

Gを連結な線型単純Lie群、Kをその極大コンパクト部分群とし、$G/K$はG不変複素構造を持つと仮定する。従ってKは1次元の中心をもちGのコンパクトCartan部分群Tを$T\subset K$なるように取れる。G, K, TのLie環を$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{t}$としそれらの

複素化を $\mathfrak{g}_c, \mathfrak{k}_c, \mathfrak{t}_c$ とする。仮定から $G$ は $\mathfrak{g}_c$ を Lie 環としてもつ連結 Lie 群 $G_c$ の部分群とみなせる。$\Phi$ を $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_c)$ に関するルート系とし $\Phi_c, \Phi_n$ をそれぞれコンパクト，非コンパクトルートの全体とする。従って $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を $K$ に対応する Cartan 分解とすれば

$$\mathfrak{k}_c = \mathfrak{t}_c + \sum_{\alpha\in\Phi_c} \mathfrak{g}_c^{\alpha}, \quad \mathfrak{p}_c = \sum_{\alpha\in\Phi_n} \mathfrak{g}_c^{\alpha}$$

となっている（$\mathfrak{g}_c^{\alpha}$ はルート $\alpha$ に対する固有空間）。$\alpha\in\Phi$ に対し $H_\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ を $\dfrac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = \mu(H_\alpha)$, $\forall \mu \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$, をみたすようにとり、ルートベクトル $X_\alpha \in \mathfrak{g}_c^{\alpha}$ を $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$, さらに $\alpha\in\Phi_n$ のときは $\overline{X}_\alpha = X_{-\alpha}$（bar は $\mathfrak{g}_c$ の $\mathfrak{g}$ に関する共役）なるようにとる。$G/K$ に関する仮定から $\Phi$ の順序で"任意の2つの非コンパクト正ルートの和はルートでない"をみたすものが存在する。そのような順序を以下一つ固定して，正ルートの全体を $\Phi^+$, $\Phi_c^+ = \Phi^+\cap\Phi_c$, $\Phi_n^+ = \Phi^+\cap\Phi_n$ とする。このとき $\mathfrak{p}^+ = \sum_{\alpha\in\Phi_n^+}\mathfrak{g}_c^{\alpha}$, $\mathfrak{p}^- = \sum_{\alpha\in\Phi_n^+}\mathfrak{g}_c^{-\alpha}$ とおけば $\mathfrak{p}_c = \mathfrak{p}^+ + \mathfrak{p}^-$ で $\mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}^-$ は可換な部分環である。$\mathfrak{k}_c, \mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}^-$ に対応する $G_c$ の連結部分群を $K_c, P^+, P^-$ とすれば $K_c$ は $P^\pm$ を normalize して $K_cP^\pm$ は $G_c$ の放物部分群である。$G_c/K_cP^-$ において原点の $G$ 軌道は開集合で $G\cap K_cP^- = K$ よりそれは $G/K$ と同一視できる。従って埋めこみ $G/K \subset G_c/K_cP^-$ により $G/K$ には複素構造がはいる。$\Omega = P^+K_cP^-$ とすれば $\Omega$ は $G_c$ の稠密な開集合でしかも $G$ を含んでいる。$\mathfrak{p}^+\times K_c\times\mathfrak{p}^-$ から $G_c$ への写像を $(X, k, Y) \to \exp X\cdot k\cdot \exp Y$ で定義すればこの写像は $\Omega$ 上への正則同相であ

る。従って $g\in\Omega$ は

(2.1) $\qquad g=\pi_+(g)\cdot\pi_0(g)\cdot\pi_-(g)\ ,\qquad \pi_0(g)\in K_c\ ,\ \pi_\pm(g)\in \mathfrak{p}^\pm$

と一意的に表わされる。そこで、$\zeta:\Omega\to\mathfrak{p}^+$ を $\zeta(g)=\log\pi_+(g)$ で定義すれば、$\zeta$ は $G/K$ から $\zeta(G)\equiv D\subset\mathfrak{p}^+$ への正則同相を引き起こし $D$ は $\mathfrak{p}^+$ の有界領域になっている。この $D$ 上での $G$ の作用は

(2.2) $\qquad g\cdot z=\zeta(g\exp z)\ ,\quad g\in G,\ z\in D$

で与えられる。

有限次元複素ベクトル空間 $E$ 上での $K_c$ の正則表現 $\tau$ に対し type $\tau$ の automorphic factor $J_\tau: G\times D\longrightarrow GL(E)$ を

(2.3) $\qquad J_\tau(g,z)=\tau(\pi_0(g\exp z))$

で定義する（$\pi_0$ は (2.1) で定義したもの）。このとき $J_\tau$ は次の性質をもっている。

$$
\begin{aligned}
&J_\tau(g,z)\ \text{は}\ g\in G\ \text{に関し}\ C^\infty\ \text{で}\ z\in D\ \text{に関し正則}.\\
(2.4)\qquad &J_\tau(g_1g_2,z)=J_\tau(g_1,g_2\cdot z)J_\tau(g_2,z)\ ,\quad g_1,g_2\in G\ ;\ z\in D.\\
&J_\tau(k,z)=\tau(k)\ ,\quad k\in K\ ,\ z\in D
\end{aligned}
$$

<u>注意</u> (2.2) と (2.3) における $g\cdot z$, $J_\tau(g,z)$ は $g\exp z\in\Omega=P^+K_cP^-$ である $g\in G_c$ と $z\in\mathfrak{p}^+$ に対しても定義できる。特に $g\in G$, $z\in\partial D$ に対し $g\cdot z$ が定義でき $g\cdot z\in\partial D$.

一次独立な $\alpha,\beta\in\Phi$ は $\alpha\pm\beta\notin\Phi$ のとき strongly orthogonal といわれるが、$\Phi_n^+$ の strongly orthogonal な極大集合

(2.5) $\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r\}$, $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_r$, $r = \mathrm{rank}\, G/K$

を $\gamma_1$ は $\Phi$ の最高ルート, $\gamma_{j+1}$ は $\gamma_1, \cdots, \gamma_j$ に strongly orthogonal であるもののうち最高なものとなるようにとり $H_{\gamma_j}, X_{\gamma_j}, X_{-\gamma_j}$ をそれぞれ $H_j, X_j, X_{-j}$ と略記する。各 $i = 1, \cdots, r$ に対し (部分) Cayley 変換 $c_i \in G_{\mathbb{C}}$ を

$$c_i = \prod_{j=1}^{i} \exp \frac{\pi}{4}(X_{-j} - X_j)$$

で定義する。(2.2) における記法を用い $o_i = c_i \cdot o$ ($o$ は $\mathfrak{p}^+$ の原点), $B_i = G \cdot o_i$ ($o_i$ の $G$ 軌道) とおけば

$$o_i \in \partial D, \quad \partial D = \bigcup_{i=1}^{r} B_i \quad (\text{disjoint union})$$

となる。しかも各 $B_i$ は階数が $r-i$ である既約な有界対称領域に正則同相な $\mathfrak{p}^+$ の複素部分多様体 (これらは $B_i$ の holomorphic arc component と呼ばれる, $B_r$ のそれは一点のみ) の disjoint union となり, その分割は $G$ 同変的である。今 $o_i$ を含む $B_i$ の holomorphic arc component を $C_i$ とすれば $G$ の半単純部分群 $G_i$ が存在し $C_i = G_i \cdot o_i$ となる。従って $K_i = \{g \in G_i ; g \cdot o_i = o_i\}$ とおけば $C_i \cong G_i/K_i$. また $S_i = \{g \in G ; g \cdot o_i = o_i\}$, $P_i = \{g \in G ; g \cdot C_i = C_i\}$ とおけば $P_i$ は $G$ の極大放物部分群で $C_i$ に関係する一つの Langlands 分解 $P_i = M_i A_i N_i$ を持ち $L_i = M_i \cap S_i$ とおけば $S_i = L_i A_i N_i$ となっている。

注意 $S_i \subset P_i$ ($S_r = P_r$), $B_i = G/S_i$ より $B_i$ は $G/P_i$ 上の fibre bundle でその fibre は $B_i$ の holomorphic arc component.

## §3　表現の構成

まずこれから構成しようとする表現をparametrizeする集合$\mathcal{F}_i(G)$を定義する。

$$W(G)=\left\{\lambda\in\sqrt{-1}\mathfrak{t}^*\ ;\ \begin{array}{l} e^\lambda \text{ は } T \text{ 上 well defined} \\ (\lambda,\alpha)\geqq 0 \quad \forall\alpha\in\Phi_c^+ \end{array}\right\}$$

とし（従って　$\lambda\in W(G)\iff\lambda$ は $K$ のある既約表現の最高weight），

$$\mathcal{F}_i(G)=\left\{\lambda\in W(G)\ ;\ \begin{array}{l}(\lambda,\gamma_1)=(\lambda,\gamma_i)\\ (\lambda+\rho,\gamma_1+\cdots+\gamma_i)=0\end{array}\right\},\quad 1\leqq i\leqq r$$

とおく、ただし$\{\gamma_1,\cdots,\gamma_r\}$は(2.5)で定義したもので$\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$.

<u>注意</u> (1)　$i=1$のとき$\mathcal{F}_1(G)=\{\lambda\in W(G)\ ;\ (\lambda+\rho,\gamma_1)=0\}$となり，従ってこれはKnapp-Okamoto[4]で考察された場合である。

(2)　$\mathcal{F}_i(G)$の元はweightの基本系を用いて表わすことができる。

(3)　$G$の適当な有限被覆$\tilde{G}$をとり$\mathcal{F}_i(\tilde{G})$も同様に定義すれば，任意の$1\leqq i\leqq r$に対し$\mathcal{F}_i(\tilde{G})\neq\phi$で$i\neq r$なら$\mathcal{F}_i(\tilde{G})$は無限集合となる。また"$i$が偶数で$G$が$Sp(n,\mathbb{R})$, $SO_0(2n+1,2)$に局所同型"以外のときは、$\mathcal{F}_i(\tilde{G})\neq\phi$なる$\tilde{G}$を線型群としてとれる。

(4)　各$i=1,\cdots,r$に対し$d(\lambda)=1$なる$\lambda\in\mathcal{F}_i(\tilde{G})$がただ一つ存在する（$d(\lambda)$は$\lambda$を最高weightとする$\tilde{K}$（＝$\tilde{G}$の極大コンパクト部分群）の表現のdgreeすなわち表現空間の次元）。これら$\lambda$

に対応する $\tilde{G}$ の表現は Rossi-Vergne [8] が $\tilde{G}/\tilde{K}$ を Siegel 領域として実現し、その各境界に対し一つづつ構成した表現と同値になる。

$i$, $1 \leq i \leq r$, と $\lambda \in \mathcal{F}_i(G)$ を固定し次のように定義する。

$\tau_\lambda$ : $\lambda$ を最高 weight とする $K_c$ の正則表現（これは $K_cP^-$ の正則表現に $P^-$ 上自明として拡張されるがそれも $\tau_\lambda$ とする）

$E_\lambda$ : $\tau_\lambda$ の表現空間（$\tau_\lambda(K)$ 不変内積を入れておく）

$e_\lambda$ : $|e_\lambda| = 1$ なる $\tau_\lambda$ の最高 weight ベクトル

$\tilde{\lambda}$ : $\lambda$ の $\mathfrak{t}_{i,c}$ への制限（$\mathfrak{t}_{i,c}$ は $\mathfrak{t}_{i,c} \subset \mathfrak{t}$ なる $\mathfrak{g}_{i,c}$ の Cartan subalg）

$E_{\tilde{\lambda}}$ : $\{\tau_\lambda(k)e_\lambda \,;\, k \in K_{i,c}\}$ で張られる $E_\lambda$ の部分空間

$\tau_{\tilde{\lambda}}$ : $\tau_\lambda$ によって引き起こされる $K_{i,c}$ の $E_{\tilde{\lambda}}$ 上での表現

<u>(3.1) 補題</u>　$K_{i,c}$ の $E_{\tilde{\lambda}}$ 上での表現 $\tau_{\tilde{\lambda}}$ は既約。

$G$ の $o_i$ での固定群 $S_i$ は $S_i = G \cap c_i K_c P^- c_i^{-1}$ だから $S_i$ の $E_\lambda$ での表現 $\tau_\lambda^{(i)}$ を

$$\tau_\lambda^{(i)}(s) = \tau_\lambda(c_i^{-1} s c_i), \qquad s \in S_i$$

により定義することができる。さて $S_i = L_i A_i N_i$ であったが

<u>(3.2) 補題</u>　$\tau_\lambda^{(i)}(l)$ $(l \in L_i)$ の $E_\lambda$ での作用はユニタリで $E_{\tilde{\lambda}}$ を不変にする。

補題(3.2) より $L_i$ の $E_{\tilde{\lambda}}$ 上での表現 ${}'\tau_\lambda^{(i)}$ を

$${}'\tau_\lambda^{(i)}(l) = \tau_\lambda^{(i)}(l)\big|_{E_{\tilde{\lambda}}}, \qquad l \in L_i$$

で定義できる。$\nu \in \mathfrak{a}_i^*$（$\mathfrak{a}_i$ は $A_i$ の Lie 環）に対し $S_i = L_i A_i N_i$ の

$E_{\tilde\lambda}$上での表現$'\sigma_{\lambda,\nu}$, $\sigma_{\lambda,\nu}$を

$$'\sigma_{\lambda,\nu}(lan) = e^{\sqrt{-1}\nu}(a)\,'\tau_\lambda^{(i)}(l)$$

$$\sigma_{\lambda,\nu}(lan) = e^{\rho_i+\sqrt{-1}\nu}(a)\,'\tau_\lambda^{(i)}(l), \qquad lan \in L_iA_iN_i$$

で定義する。ただし$\rho_i \in \mathfrak{a}_i^*$で$\rho_i(H) = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}(ad(H)|_{\mathfrak{n}_i})$ ($H \in \mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}_i$は$N_i$のLie環)。$'\sigma_{\lambda,\nu}$は既約ユニタリである。これを$G$の表現に誘導したものを

$$U_{\lambda,\nu} = \mathrm{Ind}_{S_i \uparrow G}\, '\sigma_{\lambda,\nu}$$

とすれば、$U_{\lambda,\nu}$の表現空間として

$$L^2(G, \sigma_{\lambda,\nu}) \equiv \left\{ f : G \to E_{\tilde\lambda}\ ;\ \begin{array}{l} f\text{ は Borel 可測} \\ f(gs) = \sigma_{\lambda,\nu}(s)^{-1}f(g),\ g \in G,\ s \in S_i \\ \int_{K\times G_i} |f(kg_i)|^2\, dk\, dg_i < \infty \end{array} \right.$$

をとることができ、$U_{\lambda,\nu}$の$L^2(G,\sigma_{\lambda,\nu})$での作用は左移動$(U_{\lambda,\nu}(g)f)(g') = f(g^{-1}g')$で$\forall \nu \in \mathfrak{a}_i^*$に対し$U_{\lambda,\nu}$は$G$のユニタリ表現である。$U_{\lambda,0}$, $\sigma_{\lambda,0}$, $L^2(G,\sigma_{\lambda,0})$ ($\nu = 0$の場合)を$U_\lambda$, $\sigma_\lambda$, $L^2(G,\sigma_\lambda)$と書くことにする。さて

$J_\lambda$ : type $\tau_\lambda$ の automorphic factor (cf. (2.3))

とし、$\mathcal{O}(D,E_\lambda)$, $\mathcal{O}(\bar D, E_\lambda)$をそれぞれ$D$, $\bar D$で正則な$E_\lambda$値関数全体とすれば、(2.4)より$g \in G$に対し$\mathcal{O}(D,E_\lambda)$上での作用$T_\lambda(g)$を

$$(T_\lambda(g)F)(z) = J_\lambda(g^{-1},z)^{-1}F(g^{-1}\cdot z), \qquad F \in \mathcal{O}(D,E_\lambda),\ z \in D$$

で定義することができ、$T_\lambda(g_1g_2) = T_\lambda(g_1)T_\lambda(g_2)$ ($g_1, g_2 \in G$)がなりたつ。しかも$\mathcal{O}(\bar D, E_\lambda)$は$T_\lambda(g)$, $g \in G$, で不変な部分空間である。

$E_\lambda$から$E_{\tilde\lambda}$上への直交射影を$P_{\tilde\lambda}$とし、$F \in \mathcal{O}(\bar D, E_\lambda)$に対し$\tilde F : G \to$

$E_{\tilde\lambda}$ を

(3.3) $\quad \tilde{F}(g) = P_{\tilde\lambda} J_\lambda(gc_i, 0)^{-1} F(g\cdot o_i)$

で定義する．また $S_i$ の $E_{\tilde\lambda}$ 上での表現 $\sigma_{\tilde\lambda}(=\sigma_{\lambda,0})$ に対し

$$C^\infty(G,\sigma_{\tilde\lambda}) = \left\{ f\in C^\infty(G,E_{\tilde\lambda})\,;\ f(gs)=\sigma_{\tilde\lambda}(s)^{-1}f(g),\ g\in G,\ s\in S_i \right\}$$

とおけば，$G$ は $C^\infty(G,\sigma_{\tilde\lambda})$ に左移動として作用する．

<u>(3.4) 補題</u>　$F\in \mathcal{O}(\bar{D},E_\lambda)$ に対し $\tilde{F}$ を (3.3) で定義すれば，$\tilde{F}\in C^\infty(G,\sigma_{\tilde\lambda})$．さらに写像 $F \longrightarrow \tilde{F}$ は $G$ の作用と可換．

$L^2(G,\sigma_{\tilde\lambda})$ でのノルムと補題 (3.4) を考慮に入れ，$\mathcal{O}(\bar{D},E_\lambda)$ の semi-norm $\|\ \|_\lambda$ を

$$\|F\|_\lambda^2 = \int_{K\times G_i} |P_{\tilde\lambda} J_\lambda(kg_ic_i,0)^{-1}F(kg_i\cdot o_i)|^2\, dk\, dg_i$$

で定義し，

$$\mathcal{O}^2(\bar{D},E_\lambda) = \left\{ F\in\mathcal{O}(\bar{D},E_\lambda)\,;\ \|F\|_\lambda<\infty \right\}$$

とおけば，$(U_\lambda, L^2(G,\sigma_{\tilde\lambda}))$ はユニタリ表現だから，補題 (3.4) より $G$ の $\mathcal{O}(D,E_\lambda)$ 上での作用 $T_\lambda$ は，$\mathcal{O}^2(\bar{D},E_\lambda)$ を不変にし，しかも semi-norm $\|\ \|_\lambda$ を保っている．

<u>注意</u>　$B_i$ 上の $G$ 準不変測度 $d\mu$ を $\int_{B_i} f(u)\,d\mu(u) = \int_{K\times G_i} f(kg_i\cdot o_i)\,dk\,dg_i$ $(f\in C_c(B_i))$ で定義することができるが，このとき上の $\|F\|_\lambda^2$ は，ある $M_\lambda : B_i \to \mathrm{End}(E_\lambda)$ により

$$\|F\|_\lambda^2 = \int_{B_i} (M_\lambda(u)F(u),\ F(u))\, d\mu(u)$$

と書ける．ただし積分記号内の $(\cdot,\cdot)$ は $E_\lambda$ での内積．

<u>(3.5) 補題</u>　$\mathcal{O}^2(\bar{D},E_\lambda)$ 上の seminorm $\|\ \|_\lambda$ は norm である i.e.

$$F \in \mathcal{O}^2(\bar{D}, E_\lambda),\ \|F\|_\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad F \equiv 0.$$

$\mathcal{O}^2(\bar{D}, E_\lambda)$ の norm $\|\ \|_\lambda$ に関する完備化を $H^2(D,\lambda)$ とすれば

<u>(3.6) 補題</u>　$H^2(D,\lambda)$ は $\mathcal{O}(D,E_\lambda)$ の部分空間と同一視でき、$T_\lambda(g)$ $(g \in G)$ で不変.

<u>(3.7) 定理</u>　任意の $\lambda \in \mathcal{F}_i(G)$ $(1 \leq i \leq r)$ に対し $H^2(D,\lambda) \neq \{0\}$ で $(T_\lambda, H^2(D,\lambda))$ は $G$ の既約ユニタリ表現、しかも $(U_\lambda, L^2(G,\sigma_\lambda))$ の部分表現とユニタリ同値.

§4　連続系列への埋めこみ

$\tilde{\lambda}, E_{\tilde{\lambda}}$ は §3 と同じとし

$$H^2(C_i,\tilde{\lambda}) = \left\{ F \in \mathcal{O}(C_i, E_{\tilde{\lambda}})\,;\ \int_{G_i} |J_\lambda(g_i c_i, 0)^{-1} F(g_i \cdot 0_i)|^2 dg_i < \infty \right\}$$

とおく（$C_i$ は $0_i$ を通る $B_i$ の holomorphic arc component で $\mathcal{O}(C_i,E_{\tilde{\lambda}})$ は $C_i$ で正則な $E_{\tilde{\lambda}}$ 値関数全体）. $H^2(C_i,\tilde{\lambda})$ は（完備な）Hilbert 空間になっている。（$P_i = M_iA_iN_i$ における）$M_i$ の $H^2(C_i,\tilde{\lambda})$ 上での表現 $\mu_\lambda$ を

$$(\mu_\lambda(m)F)(z) = J_\lambda(m^{-1}, z)^{-1} F(m^{-1}\cdot z), \qquad m \in M_i,\ z \in C_i$$

で定義することができる。

<u>(4.1) 補題</u>　$H^2(C_i,\tilde{\lambda}) \neq \{0\}$ で $(\mu_\lambda, H^2(C_i,\tilde{\lambda}))$ は既約ユニタリ表現

$\nu \in \mathfrak{a}_i^*$ に対し $P_i = M_iA_iN_i$ の $H^2(C_i,\tilde{\lambda})$ 上での表現 $\mu_\lambda \otimes e^{\sqrt{-1}\nu} \otimes 1$ を $(\mu_\lambda \otimes e^{\sqrt{-1}\nu} \otimes 1)(man) = \mu_\lambda(m) e^{\sqrt{-1}\nu}(a)$, $man \in M_iA_iN_i$, で定義し

$$V_{\lambda,\nu} = \mathrm{Ind}_{M_iA_iN_i \uparrow G}(\mu_\lambda \otimes e^{\sqrt{-1}\nu} \otimes 1)$$

とおく．$V_{\lambda,\nu}$ の表現空間を $\mathfrak{H}_{\lambda,\nu}$ とすれば（$V_{\lambda,\nu}, \mathfrak{H}_{\lambda,\nu}$）は §3 における（$U_{\lambda,\nu}, L^2(G, \sigma_{\lambda,\nu})$）の部分表現とユニタリ同値になることがいえるが，それを述べるため

$$C_2^\infty(G, \sigma_{\lambda,\nu}; \mathfrak{p}_i^-) = L^2(G, \sigma_{\lambda,\nu}) \cap \{ f \in C^\infty(G, E_\lambda) ;\ Xf = 0,\ \forall X \in \mathfrak{p}_i^- \}$$

（$\mathfrak{p}_i^- = \mathfrak{g}_{i,c} \cap \mathfrak{p}^-$ で，$Xf$ は左不変な複素ベクトル場とみての微分）とおき，この $L^2(G, \sigma_{\lambda,\nu})$ での閉包を $L^2(G, \sigma_{\lambda,\nu}; \mathfrak{p}_i^-)$ と記す．これは $U_{\lambda,\nu}$ 不変な部分空間である．

(4.2) 命題　（$V_{\lambda,\nu}, \mathfrak{H}_{\lambda,\nu}$）と（$U_{\lambda,\nu}, L^2(G, \sigma_{\lambda,\nu}; \mathfrak{p}_i^-)$）はユニタリ同値．

$V_{\lambda,0}, \mathfrak{H}_{\lambda,0}$ を $V_\lambda, \mathfrak{H}_\lambda$ と書く．G の放物部分群の表現から誘導される G の表現の既約性に関する Harish-Chandra [2, Lemma 3, p. 145] の判定法を適用すれば $V_{\lambda,\nu} = \mathrm{Ind}_{M_iA_iN_i \uparrow G}(\mu_\lambda \otimes e^{\sqrt{-1}\nu} \otimes 1)$ は今 $\dim A_i = 1$ より $\nu \neq 0$ のときはすべて既約になる（正確には $M_i$ がコンパクト Cartan 部分群を持つ仮定のもとである．しかし，まだ証明は与えられていないようであるが，一般的に成り立つものと思われる）．しかし，例外的な $V_\lambda (= V_{\lambda,0})$ の場合，次のことが成り立つ．

(4.3) 定理　§3 における G の表現（$T_\lambda, H^2(D, \lambda)$）は（$V_\lambda, \mathfrak{H}_\lambda$）の真部分表現とユニタリ同値，従って（$V_\lambda, \mathfrak{H}_\lambda$）は可約である．

## § 5 核関数

<u>(5.1) 補題</u> $z \in D$ に対し $E_z : H^2(D,\lambda) \longrightarrow E_\lambda$ を $E_z(F) = F(z)$ で定義すれば、$E_z$ は連続で全射.

補題(5.1)より $E_z$ の adjoint $E_z^* : E_\lambda \longrightarrow H^2(D,\lambda)$ が存在し $\forall F \in H^2(D,\lambda)$, $\forall e \in E_\lambda$ に対し

(5.2a) $\quad (F(z), e)_{E_\lambda} = (F, E_z^*(e))_{H^2(D,\lambda)}$

をみたす. そこで関数 $K_\lambda : D \times D \longrightarrow \mathrm{End}(E_\lambda)$ を

$$K_\lambda(z,w) = E_z E_w^*, \qquad z, w \in D$$

で定義する. このとき (5.2a) は

(5.2b) $\quad (F(z), e) = (F(\cdot), K_\lambda(\cdot, z)e)$

と書ける. $K_\lambda(z,w)$ は $z$ に関し正則で $K_\lambda(w,z) = K_\lambda(z,w)^*$ をみたしている. ただし $K_\lambda(z,w)^*$ は $K_\lambda(z,w)$ の adjoint. $K_\lambda$ を $H^2(D,\lambda)$ の再生核という. (作用素値再生核の一般論およびユニタリ表現との関係については Kunze [7] 参照.)

<u>注意</u> (5.2b) を $H^2(D,\lambda)$ での具体的な内積を用いて表わせば, ある $M_\lambda : B_i \to \mathrm{End}(E_\lambda)$ が存在し, $F \in \mathcal{O}^2(\bar{D}, E_\lambda)$ に対し

$$F(z) = \int_{B_i} K_\lambda(z,u) M_\lambda(u) F(u)\, d\mu(u), \qquad z \in D$$

の成り立つことが示される. 特に $\dim E_\lambda = 1$ のときは $M_\lambda(u) > 0$ $(\forall u \in B_i)$ となり $d\mu'(u) = M_\lambda(u) d\mu(u)$ とおけば, 上の積分は

$$F(z) = \int_{B_i} K_\lambda(z,u) F(u)\, d\mu'(u)$$

と, 測度 $d\mu'(u)$ に関する積分とみなせる.

$K_\lambda$の具体式を automorphic factor を用いて表わすことができるが、それを述べるためまず次のことに注意する．今 D は $\mathfrak{p}^+$ の有界領域として実現されているので $X \to \overline{X}$ を $\mathfrak{g}_c$ の $\mathfrak{g}$ に関する共役とすれば，$w \in D$ に対し $\exp \overline{w}$ は意味をもち $\overline{\mathfrak{p}^+} = \mathfrak{p}^-$ よりそれは $P^-(= \exp \mathfrak{p}^-)$ に属する．

<u>(5.3) 命題</u>　$H^2(D,\lambda)$ の再生核 $K_\lambda$ は

$$K_\lambda(z,w) = c(\lambda)\, J_\lambda(\exp(-\overline{w}), z)^{-1}$$

で与えられる．ただし $c(\lambda) > 0$．

ところで §3 でも注意したように、G の適当な有限被覆 $\tilde{G}$ をとれば、各 $i = 1, \cdots, r$ に対し $\tau_\lambda$ が $\tilde{K}$ の 1 次元表現であるような $\lambda \in \mathcal{F}_i(G)$ がただ一つ存在することがいえる．いまこの λ を $\omega_i$ とおき $H^2(D,\omega_i)$ の核関数を $k_i$ と書くことにする．

<u>注意</u>　$H^2(D,\omega_r)$ は D の通常の Hardy 空間に一致し，従って $k_r$ は D の Cauchy-Szegö 核関数になる．

これらの $k_i$ については命題(5.3)における式よりも、もっと具体的な表示が得られ、それらは定数倍を除き D の Bergman 核関数を何乗かしたものに一致することがいえる．それらを記述するため、まず Bergman 核関数から始めよう．

$$\mathcal{O}^2(D) = \left\{ f \in \mathcal{O}(D)\ ;\ \|f\|^2 = \int_D |f(z)|^2\, dz < \infty \right\}$$

( $dz$ は $\mathfrak{p}^+$ の Euclid 測度) とおけば $\mathcal{O}^2(D)$ は Hilbert 空間で $\forall z \in D$ に対し写像 $f \to f(z)$ は $\mathcal{O}^2(D)$ 上の連続線型汎関数であるゆえ，

$\mathcal{O}^2(D)$の再生核が存在する．定義によりこの再生核が$D$のBergman核関数で，今これを$b$で表わすことにする．次に$\rho_n = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi_n^+}\alpha$とおいて，$K_{\mathbb{C}}$の一つの1次元表現$\tau_{2\rho_n}$を

$$\tau_{2\rho_n}(k) = \det\left(Ad(k)|_{\mathfrak{p}^+}\right), \qquad k\in K_{\mathbb{C}}$$

で定義し（従って$2\rho_n$は$\tau_{2\rho_n}$のweightである）$k : D\times D \to \mathbb{C}$を

(5.4) $$k(z,w) = J_{2\rho_n}(\exp(-\overline{w}), z)$$

で定義する．このとき

<u>(5.5) 命題</u>　$D$のBergman核関数$b$は

$$b(z,w) = vol(D)^{-1}\, k(z,w)$$

で与えられる．

$H^2(D,\omega_i)$の核関数$k_i$の具体式を記述するまえに次のことに注意する．$k_i(z,w)$は，$z$に関し正則$w$に関し反正則だから，$D\times D$の対角線集合上での値のみで完全に定まる．また$D$の任意の点は$k\cdot(\sum_{j=1}^r t_jX_j) = Ad(k)(\sum_{j=1}^r t_jX_j)$，$k\in K$，$-1<t_j<1$，と書ける．(cf. Korányi-Wolf [6])．さて$n=\dim_{\mathbb{C}} D$，$n_i=\dim_{\mathbb{C}} C_i$ $d_i = \dim_{\mathbb{R}} B_i$とおいて

(5.6) $$q_i = \frac{n-n_i}{3n-n_i-d_i}$$
$$p_i = \frac{3n-d_r}{r}\cdot q_i = \frac{(3n-d_r)(n-n_i)}{r(3n-n_i-d_i)}$$

とおく，ただし$r=\mathrm{rank}\, D$．

<u>注意</u>　$\frac{1}{2}\le q_i<1$で，$p_i$は整数または半整数．しかも$i$が奇数なら

常に整数であることが示される。また $g_i, p_i$ は $D=G/K$ としたとき $G$ の Lie 環の real root の重複度を用いて表わすことができる。

<u>(5.7) 命題</u>　$k$ を (5.4) における関数とするとき $H^2(D,\omega_i)$ の核関数 $k_i$ は

$$k_i(z,w) = c(\omega_i)\, k(z,w)^{g_i}$$

で与えられる（$D\times D$ は単連結だから $k(z,w)^{g_i}$ を $k(0,0)^{g_i}=1$ なるように定義できる）。さらに $z = k\cdot\left(\sum_{j=1}^{r} t_j X_j\right)$, $k\in K$, $-1<t_j<1$, とすれば

$$k_i(z,z) = c(\omega_i)\prod_{j=1}^{r}\left(1-t_j^2\right)^{-p_i}$$

<u>注意</u>　$n_r = \dim_{\mathbb{C}} C_r = 0$ より $p_r = \frac{n}{r}$ となる。またすでに注意したように $i=r$ のとき $k_r$ は $D$ の Cauchy-Szegö 核関数である。命題(5.7)の第2式における $k_r(z,z)$ の式は Korányi [5, Prop. 5.7] により type II の Siegel 領域での Gindikin [1] の結果を Cayley 変換で有界領域にうつすことにより初めて得られた。

<u>例</u>　個々の $D$ に対し核関数 $k_i$ の具体式がどのように得られるか示すため、次の $D$ で例示しよう。$p\geq q\geq 1$ に対し $D=\{z\in M_{p,q}(\mathbb{C})\,;\ 1_q - z^*z>0\}$ とする（"$>0$" は行列が正定値を意味する）。このDに対し $B_i=\{z\in M_{p,q}(\mathbb{C})\,;\ 1_q - z^*z\geq 0,\ \operatorname{rank}(1_q-z^*z)=q-i\}$, で、$C_i=\left\{\begin{bmatrix}1_i & 0\\ 0 & z\end{bmatrix}\in M_{p,q}(\mathbb{C})\,;\ 1_{q-i}-z^*z>0\right\}$ とおくことができる。従って $\dim_{\mathbb{C}} D = pq$, $\dim_{\mathbb{C}} C_i=(p-i)(q-i)$, $\dim_{\mathbb{R}} B_i = 2pq-i^2$.

またこの $D$ は $\operatorname{rank} D = q$ で $G = SU(p,q)$, $K = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} ; a \in U(p), d \in U(q), (\det a)(\det d) = 1\right\}$ に対し $D = G/K$ と表わされる. このとき $G_{\mathbb{C}} = SL(p+q, \mathbb{C})$, $K_{\mathbb{C}} = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} ; a \in GL(p,\mathbb{C}), d \in GL(q,\mathbb{C}), (\det a) \times (\det d) = 1\right\}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = sl(p+q, \mathbb{C})$, $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} ; \operatorname{trace} a + \operatorname{trace} d = 0\right\}$, $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} ; b \in M_{p,q}(\mathbb{C}), c \in M_{q,p}(\mathbb{C})\right\}$ で, $\mathfrak{p}^+ = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathfrak{p}^- = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}\right\}$ とおくことができる. 従って $P^+ = \left\{\begin{bmatrix} 1_p & b \\ 0 & 1_q \end{bmatrix}\right\}$, $P^- = \left\{\begin{bmatrix} 1_p & 0 \\ c & 1_q \end{bmatrix}\right\}$ となる. $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$ は $P^+K_{\mathbb{C}}P^-$ の分解に応じて

$$g = \begin{bmatrix} 1_p & bd^{-1} \\ 0 & 1_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - bd^{-1}c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_p & 0 \\ d^{-1}c & 1_q \end{bmatrix}$$

と一意的に表わされる。従って §2 の記号を用いれば $\zeta(g) = \begin{bmatrix} 0 & bd^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり $G/K$ の $\mathfrak{p}^+$ の有界領域としての実現は

$$D = \zeta(G) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{p}^+ ; 1_q - z^* z > 0 \right\}$$

となる. 以下 $D \subset \mathfrak{p}^+$ としておく. $\begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & w \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in D$ に対し $z' = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $w' = \begin{bmatrix} 0 & w \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とおけば $\overline{w'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w^* & 0 \end{bmatrix}$ (bar は $sl(p+q, \mathbb{C})$ の $su(p,q)$ に関する共役) より

$$\begin{aligned} &\pi_0(\exp(-\overline{w'}) \exp z') \\ &\quad \equiv \begin{bmatrix} 1_p & 0 \\ -w^* & 1_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_p & z \\ 0 & 1_q \end{bmatrix} \text{ の } P^+K_{\mathbb{C}}P^- \text{ の分解における } K_{\mathbb{C}} \text{ 成分} \\ &\quad = \begin{bmatrix} 1_p + z(1_q - w^*z)^{-1}w^* & 0 \\ 0 & 1_q - w^*z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ところで $k = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in K_{\mathbb{C}}$ とすれば

$$\tau_{2\rho_n}(k) \equiv \det\left(\operatorname{Ad}(k)|_{\mathfrak{p}^+}\right) = (\det a)^q (\det d)^{-p} = (\det d)^{-(p+q)}$$

より

$$J_{2\rho_n}(\exp(-\overline{w'}) \exp z') \equiv \tau_{2\rho_n}(\pi_0(\exp(-\overline{w'})\exp z')) = \det(1_q - w^*z)^{-(p+q)}$$

命題(5.5)によれば、これは定数倍を除いてDのBergman核関数である。さて(5.6)における$\varepsilon_i$は今の場合$\frac{p+q-i}{p+q}$となる。従って$\mathfrak{p}^+$と$M_{p,q}(\mathbb{C})$を同一視しておけば、命題(5.7)より核関数$k_i$は

$$k_i(z,w) = c(\omega_i)\cdot \det(1_q - w^*z)^{-(p+q-i)}$$

となる。特に$i=q$の場合$k_q$はDのCauchy-Szegö核関数で

$$k_q(z,w) = c(\omega_q)\cdot \det(1_q - w^*z)^{-p}$$

で与えられる

<u>注意</u>　定数$c(\omega_i)$は測度のnormalizationに依存している。

§6　Intertwining operator

$$\mathcal{O}(G,\tau_\lambda) = \left\{ f \in C^\infty(G,E_\lambda)\ ;\ \begin{array}{l} f(gk) = \tau_\lambda(k)^{-1}f(g),\ g\in G,\ k\in K \\ Xf = 0,\ \forall X \in \mathfrak{p}^- \end{array} \right\}$$

とおく。$F\in\mathcal{O}(D,E_\lambda)$に対し$I_\lambda F : G \to E_\lambda$を$(I_\lambda F)(g) = J_\lambda(g,0)^{-1}F(g\cdot 0)$で定義すれば、$I_\lambda F\in\mathcal{O}(G,\tau_\lambda)$となり写像$I_\lambda : \mathcal{O}(D,E_\lambda)\to\mathcal{O}(G,\tau_\lambda)$は全単射である。そこで

$$H^2(G,\tau_\lambda) = I_\lambda(H^2(D,\lambda))$$

とおき、$I_\lambda$がユニタリ同値になるように$H^2(G,\tau_\lambda)$に内積を入れればGの左移動により$(T_\lambda, H^2(D,\lambda))$とユニタリ同値なGの表現が$H^2(G,\tau_\lambda)$上で得られる。

さて$(U_\lambda, L^2(G,\sigma_\lambda))$を定理(3.7)におけるユニタリ表現とする。$\varphi\in L^2(G,\sigma_\lambda)$, $g\in G$に対し

(6.1) $$(\mathcal{P}_\lambda \varphi)(g) = \int_{K\times G_i} \tau_\lambda(k) J_\lambda(g_i^{-1}, 0)^{-1} \varphi(gkg_i)\, dk\, dg_i$$

とおく.

<u>(6.2) 補題</u> 任意の $\varphi \in L^2(G, \sigma_\lambda)$ と $g \in G$ に対し $(\mathcal{P}_\lambda\varphi)(g)$ は存在し

$$(\mathcal{P}_\lambda \varphi)(g) = \int_{K\times G_i} J_\lambda^*(g^{-1}kg_i, 0_i)^{-1} \varphi(kg_i)\, dk\, dg_i$$

と表わされる. ただし $J_\lambda^*(\cdot,\cdot)^{-1}$ は $J_\lambda(\cdot,\cdot)^{-1}$ の adjoint.

<u>(6.3) 定理</u> (1) 任意の $\varphi \in L^2(G, \sigma_\lambda)$ に対し (6.1) で定義される $\mathcal{P}_\lambda\varphi$ は $H^2(G, \tau_\lambda)$ に属する. さらに $\mathcal{P}_\lambda : L^2(G, \sigma_\lambda) \longrightarrow H^2(G, \tau_\lambda)$ は上への $G$-intertwining operator である.

(2) $L^2(G, \sigma_\lambda)$ の部分空間 $L^2(G, \sigma_\lambda; \mathcal{P}_i^-)$ (cf. 命題 (4.2)) の上では $\mathcal{P}_\lambda$ は

$$(\mathcal{P}_\lambda \varphi)(g) = \beta(\lambda) \int_K \tau_\lambda(k) \varphi(gk)\, dk$$

で与えられる.

<u>注意</u> $\lambda \in \mathcal{F}_r(G)$ のときは $L^2(G, \sigma_\lambda) = L^2(G, \sigma_\lambda; \mathcal{P}_r^-)$ となる. 特に $\lambda$ が §5 における $w_r$ のとき $H^2(D, \lambda)$ は $D$ の普通の Hardy 空間で, $L^2(G, \sigma_\lambda)$ は Silov 境界 $B_r$ の $K$ 不変な測度に関する $L^2(B_r)$ と, 対応 $L^2(B_r) \ni f \longrightarrow \varphi \in L^2(G, \sigma_\lambda)$, $\varphi(g) = J_\lambda(gc_r, 0)^{-1} f(g\cdot 0_r)$, により一対一に対応している. $f \in L^2(B_r)$ に対し $\mathcal{S}f$ を $f$ の Cauchy-Szegö 積分 i.e.

$$(\mathcal{S}f)(z) = \int_{B_r} k_r(z, u) f(u)\, d\mu(u), \qquad z \in D$$

($k_r(z,u)$ は $D$ の Cauchy-Szegö 核関数) とすれば

$$\mathcal{S} : L^2(B_r) \longrightarrow H^2(D, \lambda)$$

であるが、このとき図式

$$\begin{array}{ccc} L^2(G,\sigma_\lambda) & \xrightarrow{\mathcal{S}_\lambda} & H^2(G,\tau_\lambda) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ L^2(B_r) & \xrightarrow{\mathcal{S}} & H^2(D,\lambda) \end{array}$$

は可換になっている。

## References

[1] S.G. Gindikin: Analysis in homogeneous domains, Russian Math. Surveys 19 (1964), 1–89.

[2] Harish-Chandra: Harmonic analysis on real reductive groups III, Ann. of Math. 104 (1976), 117–201.

[3] T. Inoue: Unitary representations and kernel functions associated with boundaries of a bounded symmetric domain, (to appear).

[4] A.W. Knapp and K. Okamoto: Limits of holomorphic discrete series, J. Functional Analysis 9 (1972), 375–409.

[5] A. Koranyi: The Poisson integral for generalized half-plaines and bounded symmetric domains, Ann. of Math. 82 (1965), 332–350.

[6] A. Koranyi and J.A. Wolf: The realization of hermitian symmetric spaces as generalized half-plaines, Ann. of Math. 81 (1965), 265–288.

[7] R.A. Kunze: Positive definite operator-valued kernels and unitary representations, in "Proceeding of the Conference on Functional Analysis", Thompson Book Company, 1967.

[8] H. Rossi and M. Vergne: Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group, Acta Math. 136 (1976), 1–59.

[9] J.A. Wolf and A. Koranyi: Generalized Cayley transformations of bounded symmetric domains, Amer. J. Math. 87 (1965), 899–934.