数理解析研究所講究録
第 369 巻 1979 年 1-7

曲面上の collapsing maps について.

神戸大 養　池田裕司
東洋大 工　山下正勝

K_1 を simplicial complex とし, $K_1 \overset{e}{\searrow} K_2$ を elementary simplicial collapsing とすると, K_1 と K_2 の間の関係は

$$K_1 = v * \sigma + K_2$$

とあらわされる(図1). こゝに σ は K_1 の(1つの) free face であり, v は K_1 の vertex である.

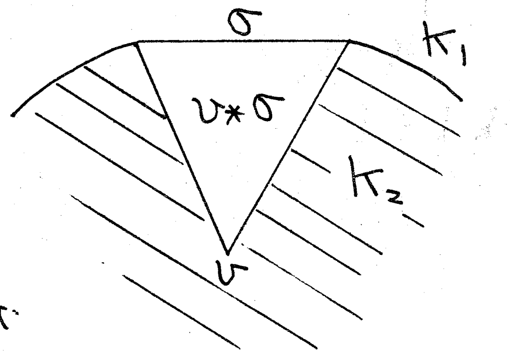

図 1.

σ の重心 $b(\sigma)$ を v に移し, σ の境界 $\dot\sigma$ を自分自身に移す map は自然に(=linear に)

$$\varphi_\sigma : v * \sigma \longrightarrow v * \dot\sigma$$

なる PL map へ拡張される.

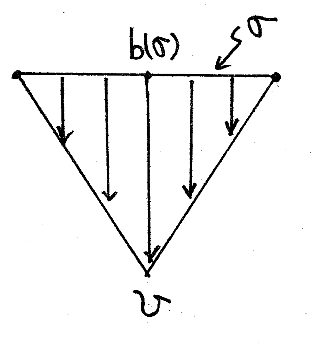

図 2.

φ_σ は $v * \dot\sigma$ 上では identity であるから結局,

$$f_e : |K_1| \longrightarrow |K_2|$$

such that

$$f_e(x) = \varphi_\sigma(x) \quad , \text{for } x \in v * \sigma$$
$$f_e(x) = x \quad , \text{for } x \in |K_2|$$

なるPL mapが定義できる．但し $|K|$ は complex K の underlying space とする（今後も同様）．この map f_e を $K_1 \overset{e}{\searrow} K_2$ から induce された <u>elementary collapsing map</u> と呼ぶことにしよう．

simplicial collapsing $c : K \searrow L$ は elementary simplicial collapsing の列

$$K = K_0 \overset{e_1}{\searrow} K_1 \overset{e_2}{\searrow} \cdots \overset{e_n}{\searrow} K_n = L$$

としてあらわされる．そこで

$$f_c = f_{e_n} \circ f_{e_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{e_2} \circ f_{e_1}$$

と定めると f_c は $|K|$ から $|L|$ の上へのPL mapである．この f_c を c から induce された <u>collapsing map</u> と呼ぶことにしよう．

$c : K \searrow L$ から induce された collapsing map f_c を考える．任意の simplex $\rho \in L$ に対し．

$$Tr(\rho, c) \equiv \overline{f_c^{-1}(\mathring{\rho})}$$

と定め，これを ρ の c に沿っての <u>Track</u> と呼ぶ．こゝに $\mathring{\rho}$ は ρ の interior であり，$\overline{f_c^{-1}(\mathring{\rho})}$ は $f_c^{-1}(\mathring{\rho})$ の $|K|$ における closure である．

ここでは $|K|$ が特に曲面であるときの track の様子について調べた結果を報告する。

$|W|$ を connected compact surface とし、$c: W \searrow L$ を simplicial collapsing とする。

$\sigma \in L$ が 2-simplex であれば定義から明らかに

$$Tr(\sigma, c) = \sigma$$

であり、また $L = \{v\}$ が1点 v のみのときには

$$Tr(v, c) = |W| \quad (= \text{必然的に 2-disk})$$

であるから L が 1-complex の場合が本質的である。更に L は free vertex を持たないものとし $|L| \subset |W|^{\circ}$ としよう。但し $|W|^{\circ}$ は $|W|$ の interior のこととする(以下同じ)。すなわち $c: W \searrow L$ はとことんまで collapse されたものと考えるわけである。この条件は結果の記述が煩わしくなるのをさけるためであって本質的な条件ではない。

次の図3は1つのモデルである。帯状の $|W|$ 内に  の形の L が W の spine として入っている状態である。図の矢印が collapsing の様子を示している。そのとき L の各 1-simplex の track が  又は  としてあらわれている。vertex に対する track は図中には示されていないが白い部分及び  と  の共通部分が各 vertex の

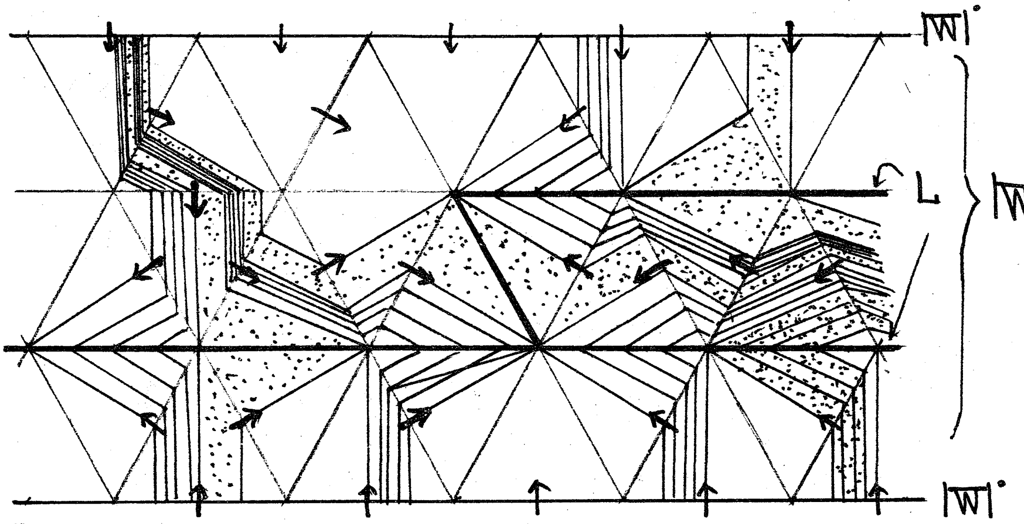

図3.

trackになっていることは確かめることができる。一般的に次の事が分かる。

<u>定理</u>. 曲面$|W|$とそのspine Lが前述の仮定のようになっているとする。そのとき次のことが成りたつ:

(1) αがLの1-simplexであるとき.

$\exists h = h_\alpha : I \times I \longrightarrow |W|$, PL embedding

such that

(i) $h(I\times I,\ I\times \frac{1}{2}) = (Tr(\alpha, c),\ \alpha)$,

(ii) $h(I\times I) \cap |W|^{\cdot} = h(I\times\{0,1\})$.

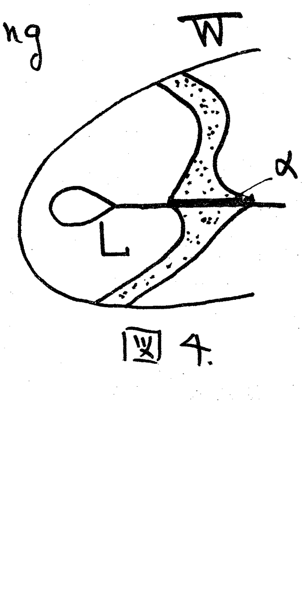

図4.

(2) v が L の vertex であるとき.
$\exists h = h_v : p * X \to |\overline{W}|$, PL embedding
such that

(0) p は1点であり, $X = \{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{v(k)}\}$ は vertices 及び 1-simplices の "disjoint な" union である(図5). $v(k)$ は $|lk(v, \overline{W}) - lk(v, L)|$ の連結成分の個数 (= v を face にもつ L の 1-simplices の個数)である.

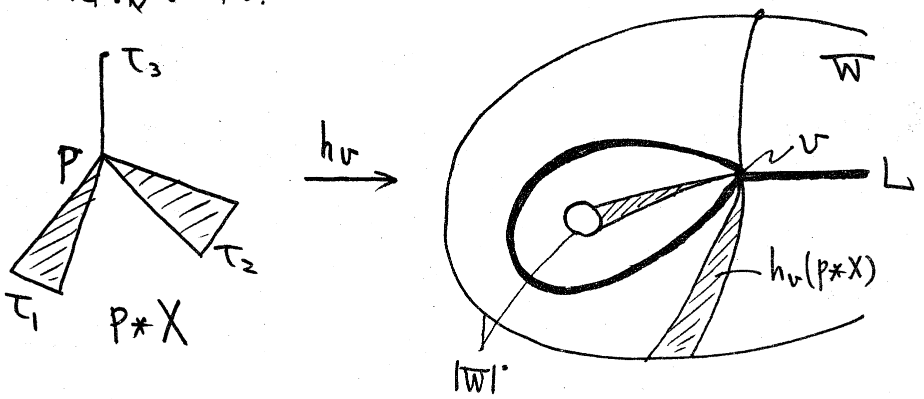

図5.

(i) $h(p*X, p) = (Tr(v, c), v)$

(ii) $h(p*X) \cap |\overline{W}|^{\circ} = h(X)$

(iii) v の $|\overline{W}|$ における近傍 V として

$$V \cap |st(v, L)| = A_1 \cup \cdots \cup A_{v(k)}$$
(disjoint union)
$$A_i \cap h(p*X) = A_i \cap h(p*\tau_i)$$

なるものがとれる.

(3) Lの1-simplex α とその face である vertex v との関係としては、

$\exists h = h_{\alpha,v} : I \longrightarrow |\overline{W}|$, PL embedding

such that

(i) $h(I, \frac{1}{2}) = (Tr(\alpha, c) \cap Tr(v, c),\ v)$

(iii) $h(I) \cap |\overline{W}|^{\cdot} = h(\dot{I})$

(2)の(iii)の主張は $|st(v, \overline{W}) - st(v, L)|$ の各連結成分からは v を頂点とする線状或いは扇状の track が丁度1個ずつ出ていることを述べたものである。言いまわしがもってまわったようになっているのは図6の状態が起るためである。

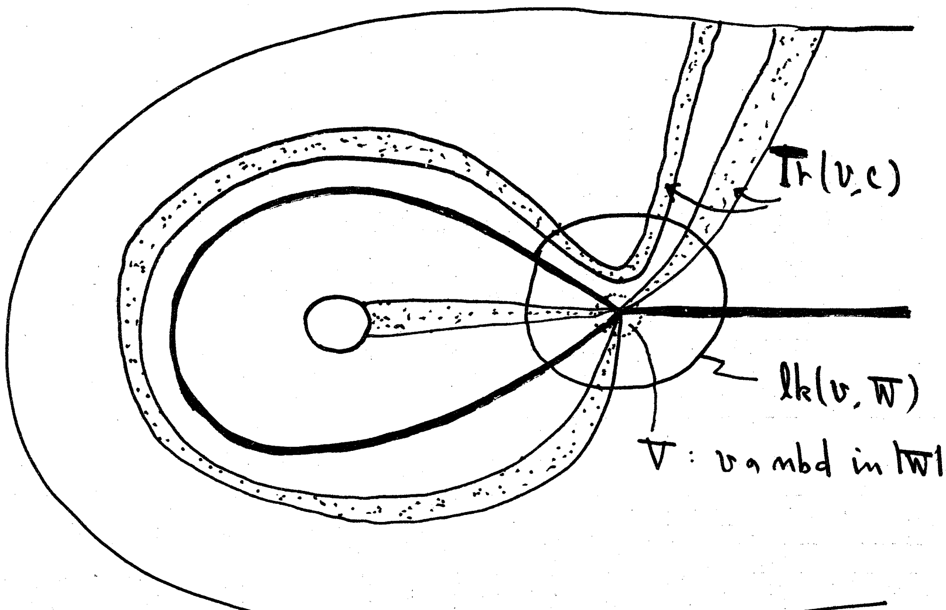

図6.

定理からの直接の帰結として次が分かる.

系. 前述の条件をもった $\overline{W}$ と L を考える. $c: \overline{W} \searrow L$ を simplicial collapsing とすると c から induce された collapsing map $f_c : |\overline{W}| \to |L|$ は $|\overline{W}|$ の1つの mapping cylinder の構造を与える. すなわち,

$$f = f_c \,|\, |\dot{\overline{W}}| : |\dot{\overline{W}}| \longrightarrow |L|$$

に対し, $M_f = |\dot{\overline{W}}| \times I \cup |L| \big/ f(x) = (x, 1)$

なる mapping cylinder は $|\overline{W}|$ と PL 同相である.

(おわり).