数理解析研究所講究録
第 369 巻 1979 年 8-30

A classification of periodic maps on 2-manifolds.

上智大 理工　　横山 和夫

§0. Introduction

問題　多様体Mに period n の periodic map はいくつあるか？

この基本的な問題を2次元多様体について考えようというのが目的である。その一つの方法についてこの節では概要を述べておく。その前にいくつかの定義をしておこう。

定義1　Xを位相空間とした時，同相写像 $f: X \longrightarrow X$ が period n の periodic map（略して period n map ということにする。）とは　$f^n = id$ かつ $f^k \neq id$ $(1 \leq k < n)$ をみたすときをいう。

定義2　X, Yを位相空間，$f: X \longrightarrow X$ を period n map $g: Y \longrightarrow Y$ を period n map とするとき，次の条件をみたす同相写像 $h: X \longrightarrow Y$ が存在するとき，fとgは同値（equivalent）という。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

以下，Xを2次元多様体(connected compact)とする。またXからXへの period n map を X上の period n map という。

今，fがX上の period n map のとき $S_k(f)=\{x\in X \mid f^k(x)=x$ かつ $f^i(x)\neq x\ (1\leq i<k)\}$ とおくとき $(1\leq k<n)$ Xが2次元多様体であるから $S_k(f)$ は ϕ，0次元または1次元多様体になる。$S(f)=\bigcup_{k=1}^{n-1}S_k(f)$ とおく(fの特異点と呼ぶ。)とき，ここでは $\dim S(f)\leq 0$ の場合のみを扱う。

(実際はkがnの約数でない時は，$S_k(f)=\phi$)

問題をまとめておくと

<u>Problem</u> Xを connected compact 2次元多様体としたとき，$\dim S(f)\leq 0$ なるX上の period n の periodic map は(同値を除いて)いくつあるか？ (今後ことわらない限り，2次元多様体は connected compact，nは period を表わすものとする。)

<u>方法の概要</u> 上のような条件をみたすfが与えられた時，Xのfによる orbit space $X/f=Y$ はまた2次元多様体であり，canonical map $p: X\longrightarrow Y$ は $p(S(f))=S$ が branch set である n-fold cyclic branched covering になっ

ていて，$p:(X-\mathcal{S}(f))\longrightarrow(Y-S)$ は n-fold cyclic covering になっている。

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \cup & p & \cup \\ X-\mathcal{S}(f) & \longrightarrow & Y-S \end{array}$$

そこで $\mathcal{P}_n(Y,S)=\{f:X\to X$ period n map $\mid$ $X/f\cong Y$ (同相) で canonical projection $p:X\to Y$ が branch set S をもつ branched covering $\}$ とおき，その同値類の集合 $\mathcal{P}_n(Y,S)/\sim$ を $\mathcal{O}_n(Y,S)$ と表わすとき，

<u>Proposition</u> $\mathcal{O}_n(Y,S)$ は $H_1(Y-S)$ から $\mathbb{Z}_n$ への onto homomorphism 全ての集合 $[H_1(Y-S),\mathbb{Z}_n]$ の $\mathcal{A}$-同値類と一対一の対応をする。

● 証明は [5] に branched covering の基本性質を使えば，[5] と同様にできる。この定理には2次元多様体という条件はいらない。詳しくは [ ] を参照）

<u>定義3</u> ω_1,ω_2 を $H_1(Y-S)$ から $\mathbb{Z}_n$ への onto homo. とするとき，同相写像 $h:Y\longrightarrow Y$ (s.t. $h(S)=S$) が存在して，$h_*=h_*|_{H_1(Y-S)}$ とおくとき，次の図式が可換なとき，ω_1 と ω_2 は <u>$\mathcal{A}$-同値</u> という。

$$\begin{tikzcd} H_1(Y-S) \arrow[rr, "h_*"] \arrow[dr, "\omega_1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & H_1(Y-S) \arrow[dl, "\omega_2"] \\ & \mathbb{Z}_n & \end{tikzcd}$$

2次元多様体においては homeotopy group の generating system は求まっているので、上の Prop. を使って Problem を解こうというのが目的である。すなわち

定理　$\mathcal{P}_n(Y, S)$ の数は決定できる。（§2，§3 の定理1,2 参照）

§1．基本的な計算式（組み合わせ整数論）

この節では $C(n; l, m) = \{(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \mid \delta_i, \theta_i \in \mathbb{N},\ 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_l < n,\ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_m < n,\ \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_l + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n}\} (= D)$ の元の個数を計算するのが目的である。（後で使うので）

$f_j(x, y) = 1 + yx^j + y^2x^{2j} + \cdots + y^ix^{ij} + \cdots$ とおき，

$F^0(x, y) = \prod_{j=0}^{n-1} f_j(x, y)$，$F^*(x, z) = \prod_{j=1}^{n-1} f_j(x, z)$，

$F(x, y, z) = F^0(x, y)\, F^*(x, z)$ とおくとき、明らかに $F(x, y, z)$ を x, y, z の級数とみた時の $y^l z^m x^{in}$ の係数 $\kappa(i)$ の和 $\sum_{i=0}^{l+m-1} \kappa(i)$ が求める $C(n; l, m)$ である。ここで，

$\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$（1の原始 n 乗根）とし、$\zeta_1 = \zeta$，$\zeta_2 = \zeta^2$，$\cdots$，$\zeta_i = \zeta^i$，$\cdots$，$\zeta_n = \zeta^n (= 1)$ とおくとき，

$F(x, y, z)$ を x の級数とみた時の x^{in} の係数の和 $(i = 0, 1, \cdots)$ は $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F(\zeta_i, y, z)$ である。したがって求める $C(n; l, m)$ $\frac{1}{n} \sum F(\zeta_i, y, z)$ を y と z の級数とみた時の $y^l z^m$ の係数

である。実際に計算すると、 $f_j(x,y)=(1-yx^j)^{-1}$ だから、

$$\left(F^0(x,y)\right)^{-1}=\prod_{j=0}^{n-1}(1-yx^j)=1+\sum_{j=1}^{n}\frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})\cdots(1-x^{n-j+1})}{(1-x)(1-x^2)\cdots\cdots(1-x^j)}x^{j(j-1)/2}(-y)^j$$

$$\left(F^*(x,z)\right)^{-1}=\prod_{j=1}^{n-1}(1-zx^j)=\left(F^0(x,z)\right)^{-1}\big/(1-z)$$ となる。したがって $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$ のうちの ζ を1の原始 d 乗根（ $\varphi(d)$ コある。 $\varphi(d)$ は Euler 関数）としたとき、d は n の約数だから $d'\in N$ を $dd'=n$ なる自然数とすれば、

$$\left(F^0(\zeta,y)\right)^{-1}=1+\sum_{j=1}^{n}\frac{(1-\zeta^n)(1-\zeta^{n-1})\cdots(1-\zeta^{n-j+1})}{(1-\zeta)(1-\zeta^2)\cdots\cdots(1-\zeta^j)}\zeta^{j(j-1)/2}(-y)^j$$

$$=\left\{1+\binom{d'}{1}\zeta^{d(d-1)/2}(-y)^d+\cdots+\binom{d'}{k}\zeta^{kd(kd-1)/2}(-y)^{kd}+\cdots+\binom{d'}{d'}\zeta^{n(n-1)/2}(-y)^n\right\}$$

$$=\left\{1+\binom{d'}{1}(-y^d)+\binom{d'}{2}(-y^d)^2+\cdots+\binom{d'}{k}(-y^d)^k+\cdots+\binom{d'}{d'}(-y^d)^{d'}\right\}$$

$=(1-y^d)^{d'}$ 、同様に $\left(F^*(\zeta,z)\right)^{-1}=(1-z^d)^{d'}\big/(1-z)$ 　故に、

$F(\zeta,y,z)=(1-y^d)^{-d'}\cdot(1-z)(1-z^d)^{-d'}$ となる。このうち $y^l z^m$ の係数は、

Ⓘ $l\equiv 0\pmod d$ かつ $m\equiv 0\pmod d$ のとき

$$\binom{\frac{l}{d}+d'-1}{d'-1}\cdot\binom{\frac{m}{d}+d'-1}{d'-1}$$

Ⓘ $l\equiv 0\pmod d$ かつ $m-1\equiv 0\pmod d$ のとき（$m=0$ のとき必要なし）

$$-\binom{\frac{l}{d}+d'-1}{d'-1}\cdot\binom{\frac{m-1}{d}+d'-1}{d'-1}$$

Ⓘ その他の時　0

（ここに $\binom{a}{b}$ は a コから b コとる組合せの数を表わす）

したがって $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F(\zeta_i,y,z)$ の $y^l z^m$ の係数（i.e. $C(n;l,m)$）は次のようにして求められる。

$d_1,d_2,\cdots,d_s,d_{s+1}=n$ を、n の1でない約数とし、

d_i' を $d_i d_i' = n$ なる自然数とする。この時，$d_1, d_2, \cdots$ d_{s+1} のうち ◎ $d_{i_1}, d_{i_2}, \cdots, d_{i_u}$ が l と m の約数であり，◎ $d_{j_1}, d_{j_2}, \cdots, d_{j_v}$ が l と $(m-1)$ の約数 とするとき，

$$\frac{1}{n}\left\{ \binom{l+n-1}{n-1}\binom{m+n-2}{n-2} + \sum_{k=1}^{u} \varphi(d_{i_k}) \binom{\frac{l}{d_{i_k}} + d_{i_k}' - 1}{d_{i_k}' - 1}\binom{\frac{m}{d_{i_k}} + d_{i_k}' - 1}{d_{i_k}' - 1} - \sum_{k=1}^{v} \varphi(d_{j_k}) \binom{\frac{l}{d_{j_k}} + d_{j_k}' - 1}{d_{j_k}' - 1}\binom{\frac{m-1}{d_{j_k}} + d_{j_k}' - 1}{d_{j_k}' - 1} \right\}。$$

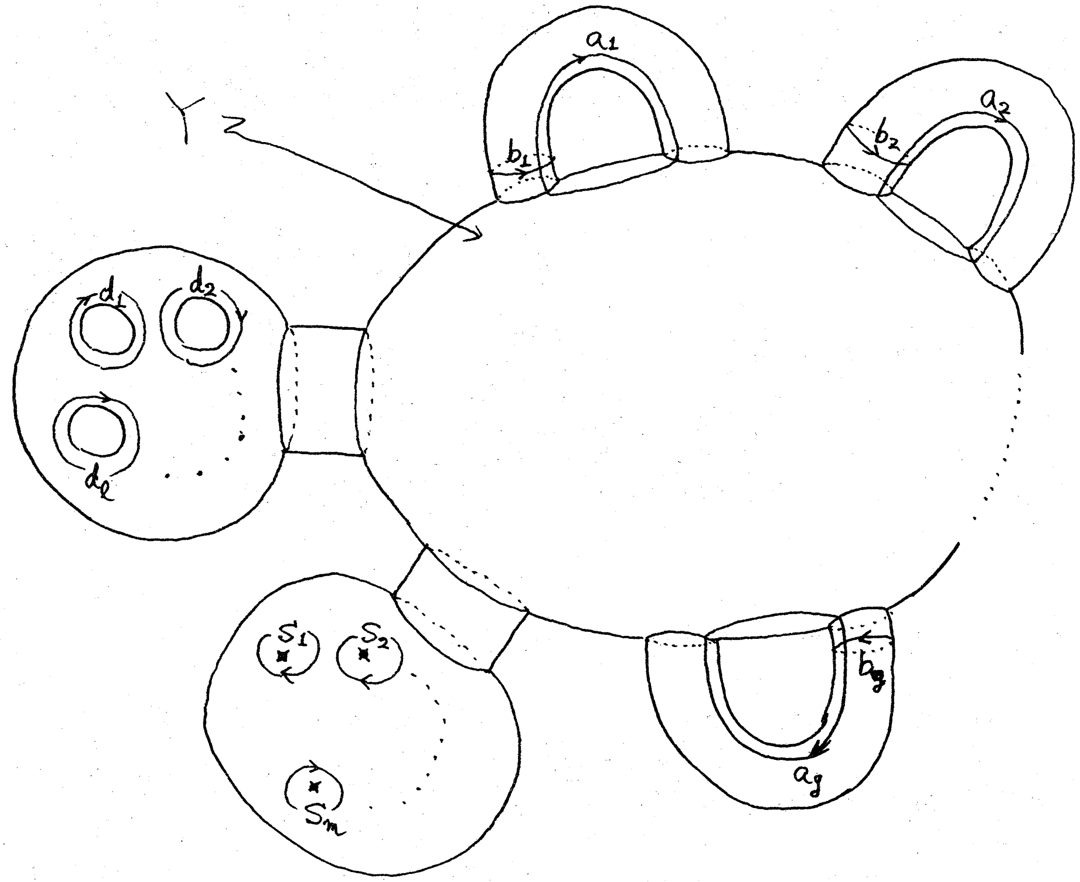
故に $C(n; l, m)$ は上のようにして求められる。

§2. Y が orientable の場合.

§0 のように，X f，Y，$\mathcal{S}(f)$，S を決めたとき，Y が orientable の場合を扱う。

Y を l 個の boundary components $d_1, d_2, \cdots\cdots, d_l$ をもつ genus g の orientable surface とし，$\dim S \leq 0$ だから，それらの点を $s_1, s_2, \cdots\cdots, s_m$ とする。$(l, m, g \geq 0)$
また，Y 上に下の図のように closed curves $a_1, b_1, a_2, b_2 \cdots \cdots\cdots a_g, b_g, d_1, d_2, \cdots, d_l, s_1, s_2, \cdots, s_m$ （d_i，s_i は境界も，branch points も また Y 上の closed curves も表わす。）さらに，上の closed curve の表わす $H_1(Y-S)$ の元も同じ記号を使うことにすれば，

$$H_1(Y-S) = \left\langle \begin{matrix} a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_g, b_g \\ d_1, d_2, \cdots, d_l, s_1, s_2, \cdots, s_m \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} d_1 + d_2 + \cdots + d_l \\ + s_1 + s_2 + \cdots + s_m = 0 \end{matrix} \right\rangle$$



さて $\omega : H_1(Y-S) \longrightarrow \mathbb{Z}_n (\subset \mathfrak{S}_n)$ (onto homo)

が与えられた時，$\mathbb{Z}_n$ の生成元を $\tau = (1, 2, \cdots, n) (\in \mathfrak{S}_n)$ とするとき $\omega(a_i) = \tau^{\alpha_i}$，$\omega(b_i) = \tau^{\beta_i}$，$\omega(d_j) = \tau^{\delta_j}$，$\omega(s_k) = \tau^{\theta_k}$ $(0 \leq \alpha_i, \beta_i, \delta_j < n,\ 0 < \theta_k < n)$

となる時，ω に対して整数 $(\mathrm{mod}\, n)$ の組

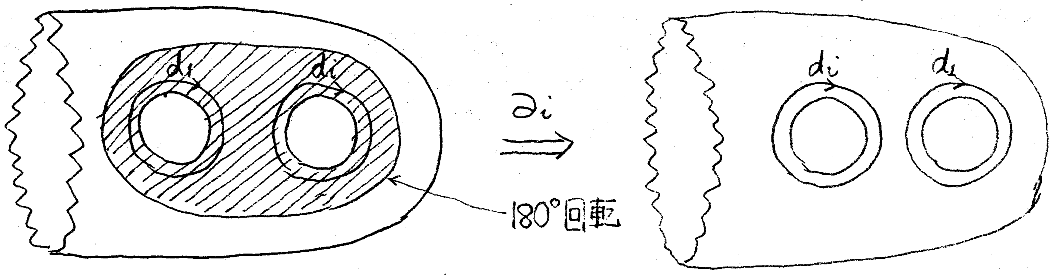
$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$

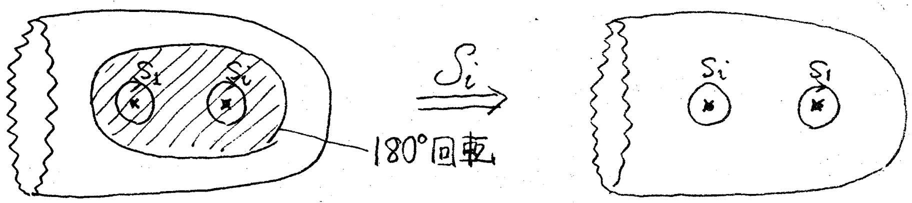
で表わすことにする。（逆にこの整数の組が決まれば，ω も一意に決まる。） 明らかに ω が representation である必要十分条件は，整数の組で表わすと

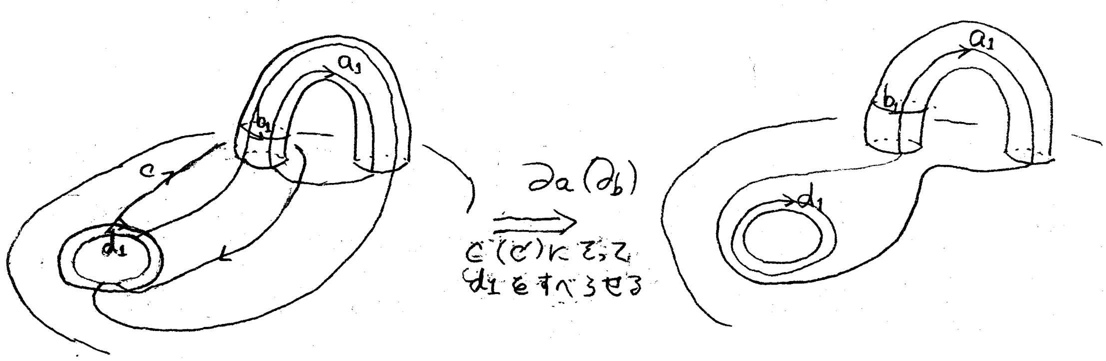
⊛ ∴ $\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m \equiv 0 \pmod n$

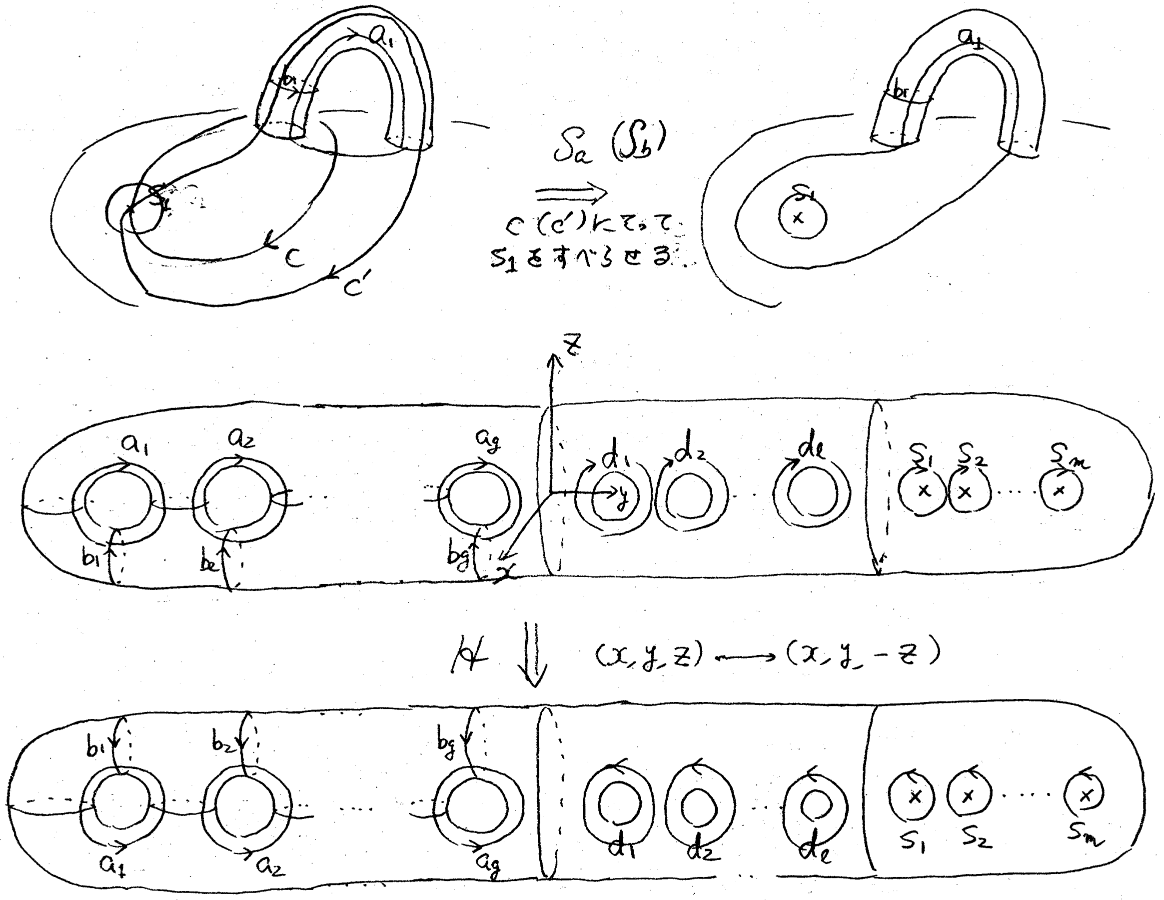
⊛ $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ の最大公約数が 1 (mod n) である。（ωがontoに対応している）

次に$\omega \in [H_1(Y-S), \mathbb{Z}_n]$ のA-同値類を決定しよう。$Y-S$ の *homeotopy group* (*autohomeomorphism*) の *generator* は求まっている [3][6] が、ここでは Suzuki [6] の記号を使うと、ρ, τ_1, μ_1, θ_{12} に下の図で表わされる同相写像 ∂_i, S_i, ∂_a, ∂_b, S_a, S_b, A を加えたものである。（ρ, τ_1, μ_1, θ_{12} etc. については[6]参照）









これらに対応して、 $\omega \in [H_1(Y-S), \mathbb{Z}_n]$ に対応する整数の組は次のように変化する。

$\rho : (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \delta, \theta) \to (\alpha_g, \beta_g, \alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_{g-1}, \beta_{g-1}, \delta, \theta)$

$\tau_1 : (\qquad\qquad) \longrightarrow (\alpha_1+\beta_1, \beta_2, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \delta, \theta)$

$\mu_1 : (\qquad\qquad) \longrightarrow (-\beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \delta, \theta)$

$\theta_{12} : (\qquad\qquad) \longrightarrow (\alpha_1+\alpha_2, \beta_1, \alpha_2, \beta_2-\beta_1, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \delta, \theta)$

$\partial_i : (\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_i, \cdots, \delta_l, \theta) \longrightarrow (\alpha, \beta, \delta_i, \delta_2, \cdots, \delta_1, \cdots, \delta_l, \theta)$

$S_i : (\alpha, \beta, \delta, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_i, \cdots, \theta_m) \longrightarrow (\alpha, \beta, \delta, \theta_i, \theta_2, \cdots, \theta_1, \cdots, \theta_m)$

$\partial a : (\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_e, \underline{\theta}) \longrightarrow (\alpha_1 - \delta_1, \beta_1, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_e, \underline{\theta})$

$\mathcal{S}a : (\qquad \underline{\delta}, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \longrightarrow (\alpha_1 - \theta_1, \beta_1, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$

$\mathcal{H} : (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$

$\longrightarrow (-\alpha_1, \beta_1, -\alpha_2, \beta_2, \cdots, -\alpha_g, \beta_g, -\delta_1, -\delta_2, \cdots, -\delta_e, -\theta_1, -\theta_2, \cdots, -\theta_m)$

これらを使って作れる Y－S の autohomeomorphism で使うものの表の整数の組も書いておくと、

$\rho_{1i} : (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots \alpha_i, \beta_i, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \underline{\theta}) \longrightarrow (\alpha_i, \beta_i, \alpha_2, \beta_2, \cdots \alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \underline{\theta})$

$\rho^{-1} : \qquad \longrightarrow (\alpha_2, \beta_2, \cdots\cdots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_1, \beta_1, \underline{\delta}, \underline{\theta})$

$\tau_1^{-1} : \qquad \longrightarrow (\alpha_1 - \beta_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \underline{\theta})$

$\mu_1^{-1} : \qquad \longrightarrow (\beta_1, -\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \underline{\theta})$

$\theta_{12}^{-1} : \qquad \longrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 + \beta_1, \cdots \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \underline{\theta})$

$\partial a^{-1} : \qquad \longrightarrow (\alpha_1 + \delta_1, \beta_1, \cdots \qquad)$

$\mathcal{S}a^{-1} : \qquad \longrightarrow (\alpha_1 + \theta_1, \beta_1, \cdots \qquad)$

$\partial b : \qquad \longrightarrow (\alpha_1, \beta_1 + \delta_1, \cdots \qquad)$

$\mathcal{S}b : \qquad \longrightarrow (\alpha_1, \beta_1 + \theta_1, \cdots \qquad)$

したがって $[H_1(Y-S; \mathbb{Z}_m)]^-$ の A－同値は、これらの有限回の操作によってえられるものとなるが、その代表元は整数の組で書くと次のようになる。

<u>Proposition</u>

$g \geq 1$ のとき

$\{ (1, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \mid 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_e < n$ ①

$$\left.\begin{array}{l} 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m<n \quad \text{—②} \\ \delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_l \quad \text{—③} \\ \quad +\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0 \pmod{n} \end{array}\right\} \Big/ \sim$$

$g=0$ のとき

$$\left\{ (\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \;\middle|\; \text{①②③},\ \delta_1,\delta_2\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2\cdots\cdots\theta_m \text{ の最大公約数が } 1 \pmod{n} \text{—④} \right\} \Big/ \sim$$

但し $\sim$ は $\mathcal{M}$ による同値類を表わす。

（略証） $g\ge 1$ のとき

<u>Step1</u>　α_1,β_1 について必要ならば μ_1 を使えば β_1 の絶対値が α_1 の絶対値より小さいとしてよい。このとき $\alpha_1=p_1\beta_1+\tilde{\alpha}_1$ $(0\le|\tilde{\alpha}_1|<|\beta_1|)$

$$(\alpha_1,\beta_1)\xrightarrow[\text{異符号のとき }(\tau_1^{-1})^{p_1}]{\alpha_1\text{と}\beta_1\text{が同符号のとき }\tau_1^{p_1}}(\tilde{\alpha}_1,\beta_1)\xrightarrow{\mu_1}(-\beta_1,\tilde{\alpha}_1)=(\alpha_1',\beta_1')$$

とおくと $|\alpha_1'|>|\beta_1'|$ だから再び同じ操作をくり返して、それを (α_2',β_2') とおく。……　すると最後には $(0,\gamma_1)$ となる。　次に α_2,β_2 についても ρ^{-1} を行ない上と同じ操作をすれば $(0,\gamma_2)$ となる。……　すると（g 回行ない最後に ρ^{-1} をやれば

$$(0,\gamma_1,0,\gamma_2,\cdots,0,\gamma_g,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$$

となる。

<u>Step.2</u>　ρ を使っておけば $\overbrace{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_g,}^{\text{のなかで}0\text{でないもの}}$ のうち絶対値の一番小さいものを γ_1 としてよい。そして $\gamma_i=g_i\gamma_1+\gamma_i'$　$0\le|\gamma_i'|<\gamma_1$ のとき、$\theta_{12}^{g_2}(\rho_{12}\rho_{13}\rho_{12}\theta_{12}^{g_3}\rho_{12}\rho_{13}\rho_{12}),\cdots\cdots(\rho_{12}\rho_{1g}\rho_{12}\theta_{12}^{g_g}\rho_{12}\rho_{1g}\rho_{12})$ を行なえば $(0,\gamma_1,0,\gamma_2\cdots,0,\gamma_g)\longrightarrow(0,\gamma_1,0,\gamma_2',\cdots,0,\gamma_g')$ となり再び、$\underbrace{\gamma_1,\gamma_2',\cdots,\gamma_g'}_{\text{のなかで}0\text{でないもの}}$ のうち絶対値の一番小さいのを γ_1'（必

要ならばρを使って）にもってきて、上と同じ操作をくり返していくと……$(0, \bar{\gamma}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$となる。

<u>Step. 3</u>　$\bar{\gamma}, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ の最大公約数は 1 だから $\exists z_0, z_1, z_2, \cdots, z_l, z_1', z_2', \cdots, z_m' \in \mathbb{Z}$　s.t.

$$z_0\bar{\gamma} + z_1\delta_1 + z_2\delta_2 + \cdots + z_l\delta_l + z_1'\theta_1 + z_2'\theta_2 + \cdots + z_m'\theta_m \equiv 1$$

そこで $\tau_1^{z_0}\partial_a^{-z_1}(\partial_2\partial_a^{-z_2}\partial_2)(\partial_3\partial_a^{-z_3}\partial_3)\cdots(\partial_l\partial_a^{-z_l}\partial_l)\,\rho_a^{-z_1'}(\rho_2\rho_a^{-z_2'}\rho_2)\cdots$ $\cdots(\rho_m\rho_a^{-z_m'}\rho_m)$ を行なえば

$$(1, \bar{\gamma}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$$

$\downarrow\ \mu_1\tau_1^{\bar{\gamma}}\mu_1$　　(mod n) で全て正または 0 にしておく。

$$(1, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \delta_1', \delta_2', \cdots, \delta_l', \theta_1', \theta_2', \cdots, \theta_m')$$

$\downarrow$ ∂_i, ρ_iを使って δ_i, θ_iを小さい順に並べる。

$$(1, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \delta_1'', \delta_2'', \cdots, \delta_l'', \theta_1'', \theta_2'', \cdots, \theta_m'')$$

したがってあとは $\mathcal{M}$ による同値類だけで、それらが同値類の代表系をなす。

この結果を使って $[H_1(Y-S, \mathbb{Z}_n]$ の同値類の個数，すなわち$\mathcal{O}_n(Y, S)$の個数は次のようになる。

<u>定理 1</u>　Yが compact connected orientable surface of genus g with l boundary components のとき $\mathcal{O}_n(Y, S)$ の個数は，Sが m個の点からなるとき，次の式で求められる。

$g \geq 1$ のとき　$\dfrac{1}{2}C(n; l, m) + \dfrac{1}{2}Q(n; l, m)$ $\left(= C^*(n; l, m)\ \text{とおく}\right)$

但し $Q(n;l,m)$ は $Q_i(t)=\binom{t+i-1}{i}$ としたとき

m: even のとき $Q_{\frac{m}{2}}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)\times\sum_{i=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} Q_i\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)$

m: odd のとき n: even $l\geqq 1$ のとき

$$\sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} Q_i\left(\frac{n}{2}-1\right)\times\sum_{i=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}\left(\left[\frac{l}{2}\right]-i+1\right)Q_i\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

n: odd または $l=0$ のとき 0

$g=0$ のときは $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_t^{e_t}$ $(e_i>0)$ 素因数分解とするとき,

$$C^*(n;l,m)-\sum_{i=1}^{t}C^*\left(\frac{n}{p_i};l,m\right)+\sum_{1\leq i<j\leq t}C^*\left(\frac{n}{p_ip_j};l,m\right)$$

$$-\cdots+(-1)^{\nu}\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_\nu\leq t}C^*\left(\frac{n}{p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_\nu}};l,m\right)+\cdots+(-1)^t C^*\left(\frac{n}{p_1p_2\cdots p_t};l,m\right)$$

(略証) Prop. と §1 を使い，あとは $\mathcal{A}$ によって変化しないもの すなわち $(0,0,\cdots,0,\hat{\delta}_1,\hat{\delta}_2,\cdots,\hat{\delta}_k,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$

$\xrightarrow{\mathcal{A}}(0,0,\cdots,0,-\hat{\delta}_1,-\hat{\delta}_2,\cdots,-\hat{\delta}_k,-\theta_1,-\theta_2,\cdots,-\theta_m)\equiv(0,0,\cdots,0,n-\hat{\delta}_1,n-\hat{\delta}_2,\cdots$

$\cdots,n-\hat{\delta}_k,n-\theta_1,n-\theta_2,\cdots,n-\theta_m)\xrightarrow{\theta_i\ \delta_i \text{を}}$ 除て小さい順に並べると

$(0,0,\cdots,0,n-\hat{\delta}_k,\cdots,n-\hat{\delta}_2,n-\hat{\delta}_1,n-\theta_m,\cdots,n-\theta_2,n-\theta_1)$ これが

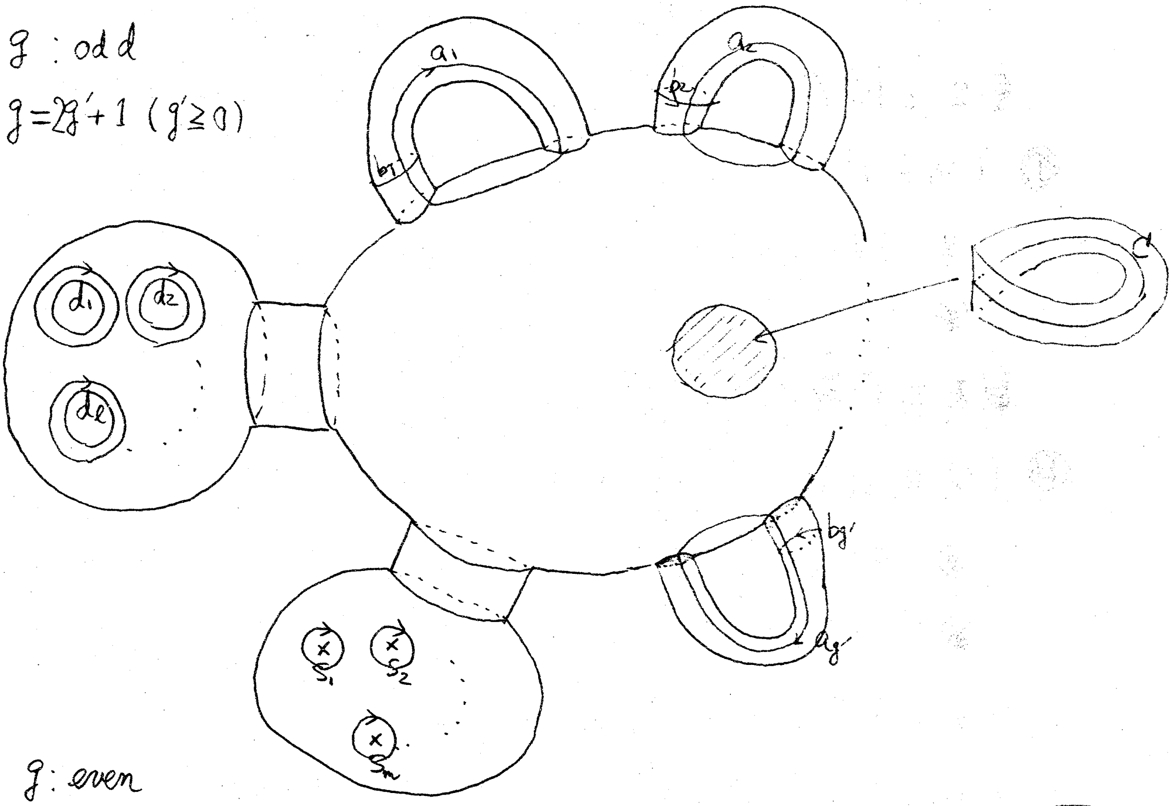
$(0,0,\cdots,0,\hat{\delta}_1,\hat{\delta}_2,\cdots,\hat{\delta}_k,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ (但し $1\leq\hat{\delta}_i$) となる個数を数えれば，これが $Q(n;l,m)$ となるので，$g\geqq 1$ のときは導かれる。$g=0$ のときはさらに $\delta_1\delta_2\cdots\delta_l,\theta_1,\theta_2\cdots\theta_m$ の最大公約数が 1 を求めると上の式になる。(Prop. の代表元に対して $\omega\in[H_1(Y-S),\mathbb{Z}_n]$ が存在し，$\mathcal{P}_n(Y,S)$ の元が存在するのは明らか。)

§3. Yが non-orientable の場合

Yを l 個の boundary components $d_1, d_2, \ldots, d_l$ をもつ genus g の non-orientable surface, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ とし, Yの標準形を下の図のようにとり, §2と同様 $a_i, b_i, c_1, c_2, d_i, s_i$ を closed curves にも $H_1(Y-S)$ の元にも記号として使う。

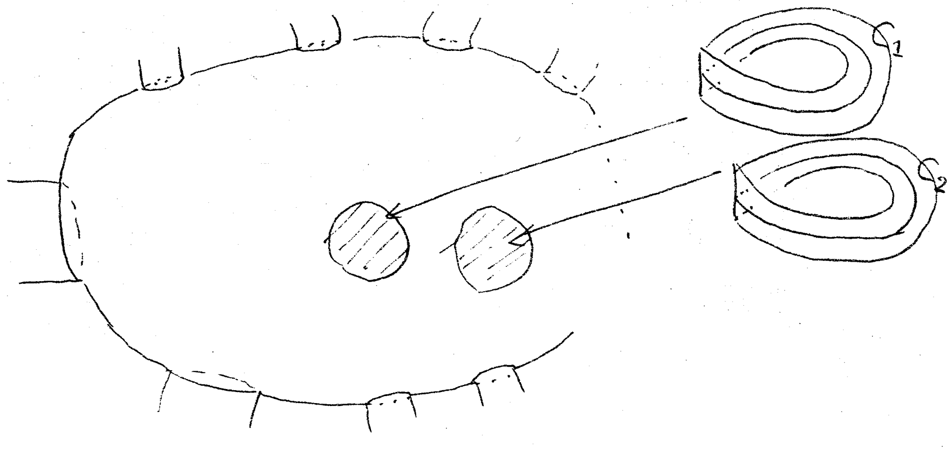
g : odd

$g = 2g'+1 \ (g' \geqq 0)$



g : even

$g = 2g'+2 \ (g' \geqq 0)$



g : odd のとき

$$H_1(Y-S)=\left\langle \begin{matrix} a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_{g'}, b_{g'}, c \\ d_1, d_2, \cdots, d_\ell, s_1, s_2, \cdots, s_m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2c+d_1+d_2+\cdots+d_\ell \\ +s_1+s_2+\cdots+s_m=0 \end{matrix} \right\rangle$$

g : even のとき

$$H_1(Y-S)=\left\langle \begin{matrix} a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_{g'}, b_{g'}, c_1, c_2 \\ d_1, d_2, \cdots, d_\ell, s_1, s_2, \cdots, s_m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2c_1+2c_2+d_1+d_2+\cdots \\ +d_\ell+s_1+s_2+\cdots+s_m=0 \end{matrix} \right\rangle$$

§2と同様 $\omega : H_1(Y-S) \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ を整数の組

(イ) $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_{g'}, \beta_{g'}, \gamma, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$ (g:odd)

㊟ $2\gamma+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m \equiv 0 \pmod n$

㊟ $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_{g'}, \beta_{g'}, \gamma, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ の最大公約数は $1 \pmod n$ である。

(ロ) $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_{g'}, \beta_{g'}, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$ (g:even)

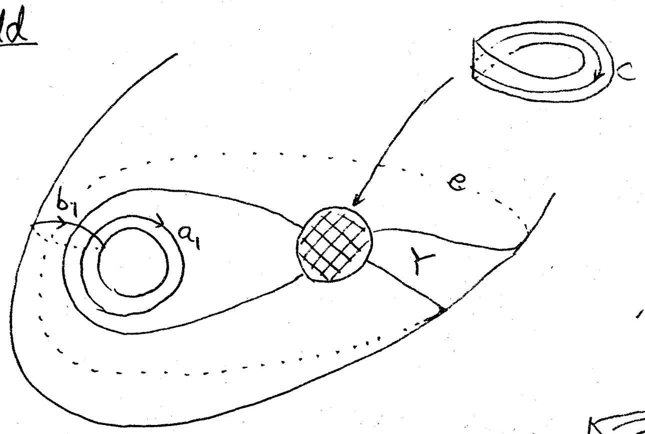
㊟ $2\gamma_1+2\gamma_2+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m \equiv 0 \pmod n$

㊟ $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_{g'}, \beta_{g'}, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ の最大公約数は $1 \pmod n$ である。

であらわすことにしておく。

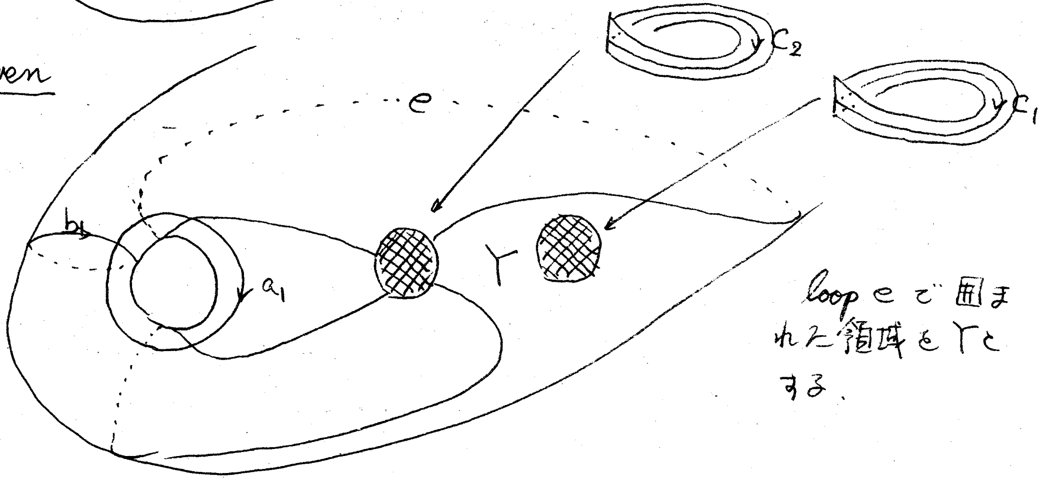
この時の $Y-S$ の homeotopy group (autohomeomorphism) の generator は §2のものにさらに次の写像 $\mathcal{Y}$ (g: even のときはさらに $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$) を加えたものになる。[2][4] 参照.

g : odd

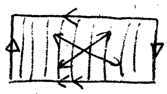


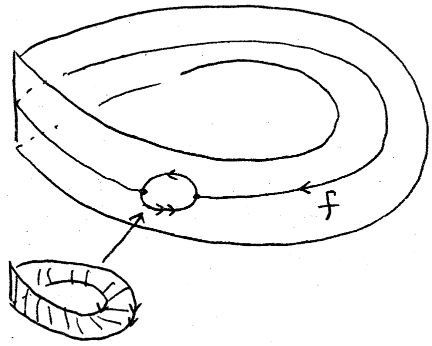
loop e で囲まれた領域を Y とする.

g : even

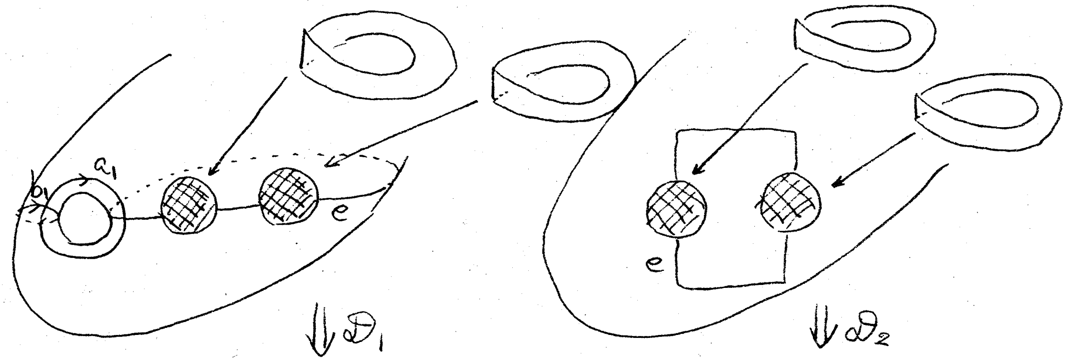


loop e で囲まれた領域を Y とする.

このとき Y は次の図に同相。そこで f にそって一回転して  対象にしてはりかえたものを Y-homeomorphism [4] という。Y_o (g:odd) Y_e (g:even) とかく。

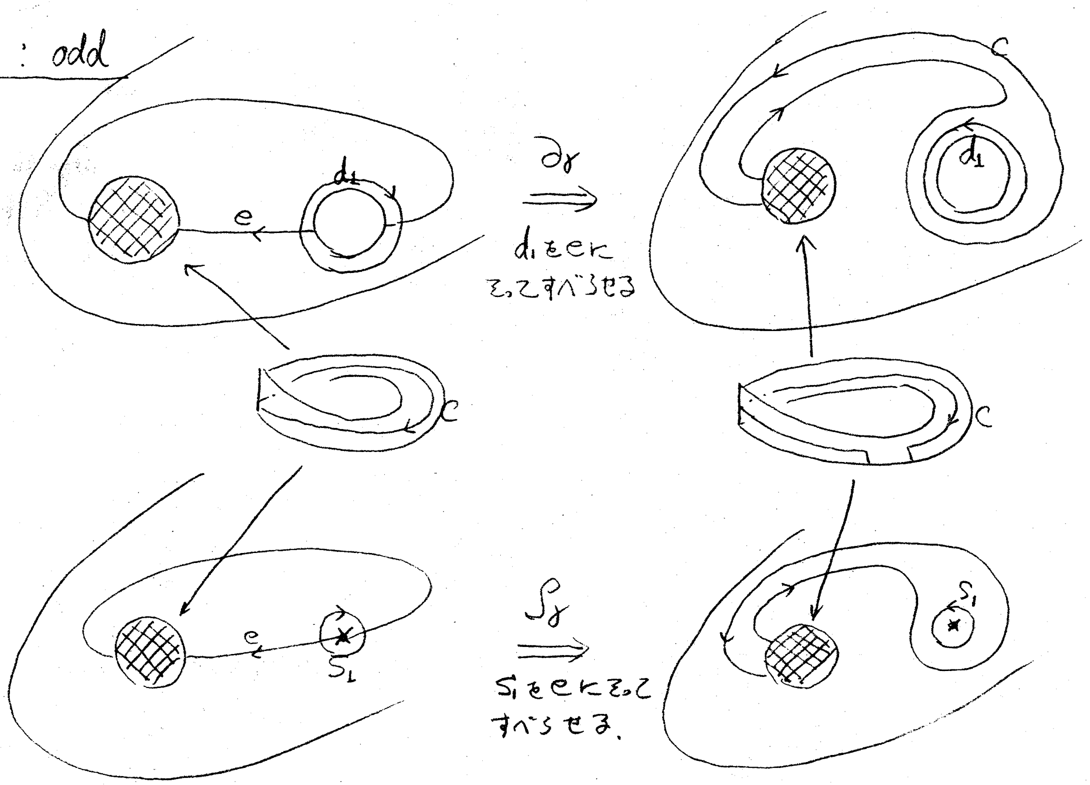


さらに g: even のときは



上の図のeによるDehn's twistを$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$とかく。さらに d_i, s_i に関して§2のものに

g : odd



g : even のとき　　$\partial\gamma_1$, $\partial\gamma_2$, $\mathcal{S}_{\gamma_1}$, $\mathcal{S}_{\gamma_2}$ （上と同様）

これらについて整数の組は次のように変化する。

$\mathcal{Y}_0 : (\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_g,\beta_g,\gamma,\delta,\theta) \longrightarrow (-\alpha_1,-\beta_1-2\gamma,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_g,\beta_g,\gamma,\delta,\theta)$

$\partial_\gamma : (\alpha,\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta) \longrightarrow (\alpha,\beta,\gamma+\delta_1,-\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta)$

$\delta_\gamma : (\alpha,\beta,\gamma,\delta,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \longrightarrow (\alpha,\beta,\gamma+\theta_1,\delta,-\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$

$\mathcal{Y}_e : (\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_g,\beta_g,\gamma_1,\gamma_2,\delta,\theta) \longrightarrow (\alpha_1+2\gamma_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_g,\beta_g,-\gamma_1,2\gamma_1+\gamma_2,\delta,\theta)$

$\mathcal{D}_1 : \qquad \longrightarrow (\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-\gamma_2,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_g,\beta_g,-\beta_1+2\gamma_1+\gamma_2,\beta_1-\gamma_1,\delta,\theta)$

$\mathcal{D}_2 : (\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\delta,\theta) \longrightarrow (\alpha,\beta,-\gamma_2,\gamma_1+2\gamma_2,\delta,\theta)$

$\partial_{\gamma_1} : (\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta) \longrightarrow (\alpha,\beta,\gamma_1+\delta_1,\gamma_2,-\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta)$

$\partial_{\gamma_2} : (\qquad \text{"} \qquad) \longrightarrow (\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2+\delta_1,-\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta)$

$\delta_{\gamma_1} : (\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\delta,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \longrightarrow (\alpha,\beta,\gamma_1+\theta_1,\gamma_2,\delta,-\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$

$\delta_{\gamma_2} : (\qquad \text{"} \qquad) \longrightarrow (\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2+\theta_1,\delta,-\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$

これらを使うと§2と同様に $[H_1(Y-S),\mathbb{Z}_n]$ の $A-$同値類の代表系は次のようになる。

Proposition (g: odd)

① n: odd のとき　$g \geqq 3$

$$\left\{ (1,0,0,\cdots,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \;\middle|\; \begin{array}{ll} 0\leq\delta_1\leq\delta_2\leq\cdots\leq\delta_l\leqq\frac{n-1}{2} & \text{①} \\ 1\leq\theta_1\leq\theta_2\leq\cdots\leq\theta_m\leqq\frac{n-1}{2} & \text{②} \\ 2\gamma+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_l & \\ +\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0 \pmod{n} & \text{③} \end{array} \right\}$$

$g=1$

$$\left\{ (\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{①②③ と} \\ \gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m \text{ の} \\ \text{最大公約数が } 1 \pmod{n} \end{array} \right\}$$

⑪ n: even のとき $g \geqq 3$

$$\left\{ (1,0,0,\cdots,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \;\middle|\; \begin{array}{ll} 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_\ell < \frac{n}{2} & \text{—— ①} \\ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_m < \frac{n}{2} & \text{—— ②} \\ 2\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_\ell + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n} & \text{—— ③} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ (2,0,0,\cdots,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} ①\ ②\ ③ \\ \delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m \text{ の最大公約数} \\ \text{が even —— ④} \\ \gamma : \text{odd —— ⑤} \end{array} \right\}$$

さらに $\exists \delta_i = \frac{n}{2}$ または $\exists \theta_i = \frac{n}{2}$ のときは，

$$\left\{ (1,0,0,\cdots,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \;\middle|\; \begin{array}{ll} 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_\ell \leq \frac{n}{2} & \text{—— ⑥} \\ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_m \leq \frac{n}{2} & \text{—— ⑦} \\ ③ & \\ 0 \leq \gamma < \frac{n}{2} & \end{array} \right\}$$

$$\left\{ (2,0,0,\cdots,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_\ell \leq \frac{n}{2} \\ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_m \leq \frac{n}{2} \\ ③\ ④\ ⑤ \\ 0 \leq \gamma < \frac{n}{2} \end{array} \right\}$$

$g = 1$ のときは

$$\left\{ (\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} ①\ ②\ ③ \\ \gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m \text{ の最大公約数が } 1 \end{array} \right\}$$

$\exists \delta_i = \frac{n}{2}$ または $\exists \theta_i = \frac{n}{2}$ のとき

$$\left\{ (\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} ⑥\ ⑦\ ③,\ 0 \leq \gamma < \frac{n}{2} \\ \gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m \text{ の最大公約数が } 1 \end{array} \right\}$$

（略証）$g \geqq 3$のとき まず §2 と同様にして $(\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_g,\beta_g,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \longrightarrow (\alpha,0,0\cdots0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ となる。但し $\alpha = g.c.d.\{\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_g,\beta_g,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m\}$ である。その時 $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ $x\alpha + y\gamma \equiv 1 \pmod{n}$ をとっておく。

$\underline{n:\text{odd}}$ のときは $\exists k \in N$; $2k \equiv 1 \pmod{n}$ また $\exists k \in N$; $2k \equiv -1 \pmod{n}$ だから，$(\alpha, 0, \gamma)$ について，$(\tau_i^2 g_0)^k$ を

行なうと $(\alpha, 2k\gamma, \gamma) \equiv (\alpha, \pm\gamma, \gamma)$ になるので，この操作を $|y|$ 回行なうと $(\alpha, 0, \gamma) \longrightarrow (\alpha, y\gamma, \gamma)$ さらに $(\mu_1^3 \tau_1^{-x} \mu_1)$ を行なうと $(\alpha, y\gamma + x\beta, \gamma) \equiv (\alpha, 1, \gamma)$ になるので $\xrightarrow{\tau_1^{-\alpha}} (0, 1, \gamma)$ になる．したがってともかく

$(1, 0, 0 \cdots 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ になる。

n: even のとき　α: even, γ: odd 以外の時は　$y \equiv 0 \pmod 2$ だから $y' = \frac{y}{2}$ とおいて同様に $(1, 0, 0, \dots, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ になる。α: even, γ: odd の時は　$2x\alpha + 2y\gamma \equiv 2 \pmod 2$ を使えば同様にして　$(2, 0, 0, \dots, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ になる．あとは $\partial_\gamma, \delta_\gamma, \partial_i, \delta_i$ を使えば求められる。

$g = 1$ のときも同様である。

Proposition　(g: even)

① $g \geq 4$, n: odd のとき

$$\left\{ (1, 0, 0, \dots, 0, \underline{0}, \underline{\gamma_2}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \;\middle|\; \begin{array}{ll} 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_\ell \leq \frac{n-1}{2} & \text{—①} \\ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_m \leq \frac{n-1}{2} & \text{—②} \\ 2\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_\ell + \theta_1 + \theta_2 + & \\ \cdots + \theta_m \equiv 0 \pmod n & \text{—③}' \end{array} \right\}$$

Ⅱ $g \geq 4$, n: even のとき

$$\left\{ (1, 0, 0, \dots, 0, \underline{0}, \underline{\gamma_2}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \;\middle|\; \begin{array}{ll} 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_\ell < \frac{n}{2} & \text{—④} \\ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_m < \frac{n}{2} & \text{—⑤} \\ ③' & \end{array} \right\}$$

$$\left\{ (2, 0, 0, \dots, 0, 1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \;\middle|\; \begin{array}{ll} ④ \; ⑤ & \\ \gcd(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m): \text{even} & \text{—⑥} \\ \gamma_2: \text{odd} & \\ 2 + 2\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_\ell + \theta_1 + & \\ \theta_2 + \cdots + \theta_m \equiv 0 \pmod n & \text{—⑦} \end{array} \right\}$$

さらに $\exists\delta_i = \frac{n}{2}$ または $\exists\theta_i = \frac{n}{2}$ のときは

$$\left\{ (1, 0, \cdots, 0, \underline{0}, \underline{\gamma_2}, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le \delta_1 \le \delta_2 \le \cdots \le \delta_l \le \frac{n}{2} \text{ — ⑧} \\ 1 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \cdots \le \theta_m \le \frac{n}{2} \text{ — ⑨} \\ 0 \le \gamma_2 < \frac{n}{2} \\ \text{③}' \end{array} \right\}$$

$$\left\{ (2, 0, \cdots 0, 1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{⑧ ⑨} \\ 0 \le \gamma_2 < \frac{n}{2} \\ \text{⑦} \end{array} \right\}$$

(ハ) $g = 2$ の時は長くなるのでここでは省略する。n が素数の時のみ書いておくと，

$m = 0$ のとき
$$\left\{ (\gamma_1, \gamma_2, 0, 0, \cdots, 0) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \gamma_1 + \gamma_2 \equiv 0 \pmod{n} & 0 \le \gamma_1 \le \left[\frac{n}{2}\right] \\ 0 \le \gamma_1 \le \gamma_2 < n & \gamma_2 \ne 0 \end{array} \right\} \text{ と}$$

$m > 0$ または $\delta_l \ne 0$ のとき
$$\left\{ (0, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \;\middle|\; 2\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_l + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m \equiv 0 \right\}$$

($n \ne 2$ のとき)

($n = 2$ のときは上の場合にさらに $\{(0, 1, 0, 0, \cdots 0)\}$ も含まれる.

[証明は g:odd のときとほとんど同様で，$g_e, \partial_1, \partial_2, \partial_{\gamma_1}$ $\partial_{\gamma_2}, S_{\gamma_1}, S_{\gamma_2}$ を使うとできる]

この結果を使って n:odd のときのみ $\mathcal{P}_n(Y, S)$ の個数をまとめて書いておくと（$g = 2$ のときは n:prime だけ）

<u>定理２</u>　Y が compact connected non-orientable surface of genus g with l boundary components のとき $\mathcal{P}_m(Y, S)$ は S が m 個の点からなるとき，次の式で求められる。<u>(n:odd)</u>

$g \ge 3$ のとき $\dbinom{\frac{n-1}{2} + l}{l}\dbinom{\frac{n-1}{2} + m - 1}{m}$

$g=1$ のとき §2と同様に n を素因数分解して求められる。すなわち $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_t^{e_t}$ $(e_t>0)$ とするとき、

$$\binom{\frac{n-1}{2}+l}{l}\binom{\frac{n-1}{2}+m-1}{m} - \sum_{i=1}^{t}\binom{\frac{n/p_i-1}{2}+l}{l}\binom{\frac{n/p_i-1}{2}+m-1}{m} +$$

$$\cdots + (-1)^{\nu}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_\nu\le t}\binom{\frac{\frac{n}{p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_\nu}}-1}{2}+l}{l}\binom{\frac{\frac{n}{p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_\nu}}-1}{2}+m-1}{m}$$

$$+\cdots + (-1)^{t}\binom{\frac{\frac{n}{p_1p_2\cdots p_t}-1}{2}+l}{l}\binom{\frac{\frac{n}{p_1p_2\cdots p_t}-1}{2}+m-1}{m}$$

但し $\binom{a-1}{a}=0$ とする。

$g=2$ のとき (n: prime)

$m=0$ のとき $\frac{n-1}{2}+\binom{\frac{n-1}{2}+l}{l}$

$m\neq 0$ のとき $\binom{\frac{n-1}{2}+l}{l}\binom{\frac{n-1}{2}+m-1}{m}$

系 ($n=2$) ① m: even の時 $P_2(r,s)$ は $\min\{g,3\}+\left[\frac{l}{2}\right]$ ② m: odd の時は 0

§2、§3 を使えば §0 の問題の解が色々と得られるが（特に n: prime について）まとまった形として述べられないので、今後の機会に述べることにする。$n=2$ については [ ] でできている。

参考文献

[1] Tohl Asoh "Classification of free involutions on surfaces" Hiroshima Math. Jour., 6 (1976) 171 – 181

[2] D.R.J. Chillingworth "A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface" Proc. Camb. Phil. Soc., 65 (1969) 409 – 430

[3] W.B.R. Lickorish "A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold" Proc. Camb. Phil. Soc., 60 (1964) 769 – 778, Corrigendum, 62 (1966) 679 – 681

[4] —— "Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds" Proc. Camb. Phil. Soc., 59 (1963) 307 – 317

[5] P.A. Smith "Abelian Actions on 2-manifolds" Michigan Math. Jour., 14 (1967) 257 – 275

[6] S. Suzuki "On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody" Can. Jour. Math., 29 (1977) 111 – 124