数理解析研究所講究録
第 369 巻 1979 年 31-46

Metabelian representations of knot groups

神戸大 理　作間 誠

Knot (S^3, K) に対して、$C \equiv S^3 - K$ の n-fold covering space の同値類は、knot group $G \equiv \pi_1(C)$ の対称群 S_n への transitive representation の同値類と一対一に対応する。そこで、G の representation を求めることが重要な問題となるが、その特別な場合である metacyclic representation については Fox [2] があり、又、西田 [7] は dihedral representation を調べ、Fox の方法に明解な解釈を与えている。ここでは、その一般化として、次の意味での metabelian representation の同値類の決定について考える。

Def. 1　(i) G の metabelian representation とは、G から metabelian group への onto homomorphism のこと。

(ii) $f: G \to H$, $f': G \to H'$; G の metabelian representation

これに対して、$f \sim f'$: equivalent

$$\Leftrightarrow \exists h : H \xrightarrow{\cong} H' \text{ iso. s.t. } f' = h \circ f .$$

$G/D(G) \cong \langle t \rangle$: infinite cyclic group であるので、以下 metabelian group H としては、$H/D(H)$ が cyclic group になるようなもののみを考える。

Def. 2. (i) H : metabelian group, $y \in H/D(H)$: generator に対して、pair (H, y) を oriented metabelian group, y を、その orientation と呼ぶ。

(ii) この時、$D(H)$ は次のようにして $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ module となる。

" $a \in D(H)$ に対し、$t \cdot a \equiv u a \bar{u}$ 。但し $u \in H$, $[u] = y$ in $H/D(H)$。"

この $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ module structure を、orientation y により induce される $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ module structure と呼び、以下 (H, y) の $D(H)$ は、このようにして $\mathbb{Z}\langle t \rangle$-module とみる。

(iii) $f : H \longrightarrow H'$; metabelian group の間の homomorphism.

これに対し、homomorphism f_1, f_2 は、次の様なものとする。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D(H) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_1"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H/D(H) \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D(H') \arrow[r, "j"] & H' \arrow[r, "p"] & H'/D(H') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(iv) 上の H, H' がそれぞれ y, y' で orient されている時、f が orientation preserving とは、$f_2(y) = y'$ なる時をいう。この時 $f : (H, y) \longrightarrow (H', y')$ と書く。

G の metabelian representation は $G' \equiv G/D^2(G)$ を経由するので、以下 G' について考えるが、G' は、$lk(t, K) = +1$ なる $H_1(C) \cong G'/D(G')$ の元 t で orient しておく。 $\tilde{C}_\infty$ を C の infinite cyclic covering space とすると、$\mathbb{Z}\langle t \rangle$ module として $H_1(\tilde{C}_\infty) \cong D(G')$ となり、Milnor [6] より次が成立する。

<u>Lemma 1.</u> $t-1 : D(G') \xrightarrow[\cong]{} D(G')$ isomorphism。

これより次の Proposition を得る。

<u>Proposition 1</u> $f : (G', t) \longrightarrow (H, t)$ onto homo. とすると

i) $t-1 : D(H) \xrightarrow[\cong]{} D(H)$ isomorphism

ii) $H/D(H) \cong \langle t \mid t^k = 1 \rangle$ とすると、

- $\forall u \in p^{-1}(t) \subset H$ に対し、$u^k = 1$ in H。(但し $p : H \longrightarrow H/D(H)$)
- 従って特に $H \cong D(H) \otimes \langle t \mid t^k = 1 \rangle$: semi direct product。

(proof)

i) f_1 が onto であることと、右の commutative diagram より明らか。

$$\begin{tikzcd} D(G') \arrow[r, "t-1"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D(G') \arrow[d, "f_1"] \\ D(H) \arrow[r, "t-1"] & D(H) \end{tikzcd}$$

ii) $u \in H$ で $p(u) = t$ とすると、$p(u^k) = 1$。よって $u^k \in D(H)$。

Def 2. ii) より $t \cdot u^k = u u^k \bar{u} = u^k$, よって $(t-1) \cdot u^k = 0$ in $D(H)$.

従って i) より $u^k = 0$ in $D(H)$, i.e. $u^k = 1$ in H。 □

<u>Remark</u>　H を, $H/D(H)$ が cyclic である finitely generated metabelian group とすると、Knot group の homomorph となり (González-Acuña [3])、従って Prop. 1 の (i) (ii) の条件を満たす。よって、$H \cong A \rtimes \langle t \mid t^k=1\rangle$ (但し、A : finitely generated $\mathbb{Z}\langle t\rangle$ module s.t. $t-1$: iso., $t^k = 1$.) となる。又逆に、この形の group は finitely generated metabelian であり、その commutator は A になる。

<u>Prop. 2</u>　$(H, t), (H', t')$: oriented metabelian group,
$s : H/D(H) \to H$, $s' : H'/D(H') \to H'$: section,
$f_2 : H/D(H) \longrightarrow H'/D(H')$ homo. s.t. $f_2(t) = t'$。

以上が与えられた時、$f_1 : D(H) \to D(H)$; group homo に対し、

diagram
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D(H) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_1"] & H \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[d, dashed, "f"] & H/D(H) \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D(H') \arrow[r, "j'"] & H' \arrow[r, shift left, "p'"] & H'/D(H') \arrow[l, shift left, "s'"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を (section も込めて) 可換にする group homo. $f : H \longrightarrow H'$ が存在するための必要十分条件は、f_1 が、orientation j, j' が induce する $\mathbb{Z}\langle t\rangle$ module structure に関して、$\mathbb{Z}\langle t\rangle$ homo. になる事である。更に、この時、f は f_1 により一意に決まる。

(proof)

十分性を示す。$^\forall u \in H$ に対して、$^{\exists !}a \in D(H)$, $^{\exists !}t^i \in H/D(H)$ s.t. $u = a \cdot s(t^i)$。そこで、$f : H \to H'$ を $f(u) = f_1(a)\, s'(t^i)$ で定義する。　すると上の diagram は明らかに可換になるの

で、f が group homo になることを示せばよい。

$u_j = a_j \cdot S(t^{i_j})$ $(j = 1, 2)$ とすると、

$$
\begin{aligned}
f(u_1 u_2) &= f\left(\left(a_1 \cdot S(t^{i_1}) \cdot a_2 \cdot \overline{S(t^{i_1})}\right) \cdot \left(S(t^{i_1}) \cdot S(t^{i_2})\right)\right) \\
&= f_1(a_1 + t^{i_1} \cdot a_2) \cdot S'(t'^{i_1+i_2}) \quad \because f_1 : \mathbb{Z}\langle t \rangle \text{ homo} \\
&= (f_1(a_1) + t^{i_1} \cdot f_1(a_2)) \cdot S'(t'^{i_1+i_2}) \\
&= f_1(a_1) S'(t'^{i_1}) f_1(a_2) \overline{S'(t'^{i_1})} \cdot S'(t'^{i_1+i_2}) \\
&= f_1(a_1) S'(t'^{i_1}) f_1(a_2) S'(t'^{i_2}) \\
&= f(u_1) f(u_2)
\end{aligned}
$$

必要性，一意性は明らか。 □

以上により次を得る。

Theorem 1.

(i) (H, t) oriented metabelian group に対し

$\exists f : (G', t) \longrightarrow (H, t)$ onto homo

$\Leftrightarrow \exists f_1 : H_1(\tilde{C}_\infty) \longrightarrow D(H)$ onto $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ homo.

(ii) $f : G' \to H$, $f' : G' \to H'$ metabelian representation に対し

$f \sim f'$: equivalent

$\Leftrightarrow$ ◦ $H/D(H) \cong H'/D(H')$

◦ $\exists h_1 : D(H) \xrightarrow{\cong} D(H')$ iso. s.t $f_1' = h_1 \circ f_1$

(proof)

(i) は Prop. 1 and 2 より明らか。

(ii) (⇒) は明らか。 (⇐) を示す。

section $s_\infty : G'/D(G') \longrightarrow G'$ を一つ選ぶと、Prop. 1 (ii) により、H [resp. H'] の section s [resp. s'] を $s(f_2(t)) = f(s_\infty(t))$ [resp. $s'(f_2'(t)) = f'(s_\infty(t))$] で取れる。又仮定により、$f_2' = h_2 \circ f_2$ なる isomorphism $h_2 : H/D(H) \longrightarrow H'/D(H')$ が存在する。従って図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D(G') \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dd, bend left, "f_1'"] & G' \arrow[r, shift left] \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend left, "f'"] & G'/D(G') \arrow[l, shift left, "s_\infty"] \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dd, bend left, "f_2'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D(H) \arrow[r] \arrow[d, "h_1", "\cong"'] & H \arrow[r, shift left] \arrow[d, dashed, "h"] & H'/D(H') \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[r] \arrow[d, "h_2", "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & D(H') \arrow[r] & H' \arrow[r, shift left] & H'/D(H') \arrow[l, shift left, "s'"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

において、才1行と才2行の間，才1行と才3行の間，及び才1列，才3列は可換である。Prop. 2 により、G', H, H' の orientation t, $f_2(t)$, $f_2'(t)$ が induce する $\mathbb{Z}\langle t\rangle$ module structure に関して、f_1, f_1' は onto $\mathbb{Z}\langle t\rangle$ homo. であり、従って h_1 は $\mathbb{Z}\langle t\rangle$ iso. である。Prop. 2 により、才2行と才3行の間を可換にする $\mathbb{Z}\langle t\rangle$ homo $h : H \longrightarrow H'$ が存在する。行の間の可換性、及び才1列、才3列の可換性により、才2列も可換となる。又、h_1, h_2 は iso. であるので、h も iso. である。従って、f と f' は equivalent となる。 □

Metabelian representation $f : G \longrightarrow H$ に対して、指数 $[H : D(H)]$ を f の index と呼ぶと、index $f = k$ の representation に対して、

次が成立する。

<u>Theorem 2</u> Σ_k を S^3 の K で branch する k-fold cyclic cover とすると、

(i) $\exists \varphi_k : G \longrightarrow G(k) \equiv H_1(\Sigma_k) \oslash \langle t \mid t^k = 1 \rangle$ onto homo.

更にこれは index k の metabelian rep. の中で universal。

i.e. $f : G \longrightarrow H$ metabelian rep. index $f = k$

$\Rightarrow \exists \hat{f} : G(k) \longrightarrow H$ s.t. $f = \hat{f} \circ \varphi_k$

(ii) index k の metabelian rep. の同値類は、$H_1(\Sigma_k)$ の $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ submodule 全体と一対一に対応する。

(proof)

(i) Gordon [4] により、$H_1(\Sigma_k) \cong H_1(\widetilde{C_\infty}) / (t^k - 1) H_1(\widetilde{C_\infty})$ 。
更に Prop. 1 の Remark により、$D(G(k)) = H_1(\Sigma_k)$。従って Th. 1. により φ_k は存在する。今 $f : G \longrightarrow H$ を index $f = k$ なる metabelian rep. とすると、$t^k - 1 = 0 : D(H) \longrightarrow D(H)$ なので、$f_1 : H_1(\widetilde{C_\infty}) \longrightarrow D(H)$ は、$H_1(\Sigma_k)$ を経由する。このことより、Th 1 の証明と同様な議論により、$\hat{f}$ の存在が示される。

(ii) $f : G \longrightarrow H$, $f' : G' \longrightarrow H'$ を rank k の metabelian rep. とすると、

$$
\begin{aligned}
f \sim f' &\Leftrightarrow \exists h_1 : D(H) \xrightarrow{\cong} D(H') \ \text{s.t.}\ f_1' = h_1 \circ f_1 \quad (\text{Th 1 (iii)}) \\
&\Leftrightarrow \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \text{s.t}\ \hat{f}_1' = h_1 \circ \hat{f}_1 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Ker} \hat{f}_1 = \mathrm{Ker} \hat{f}_1' \subset H_1(\Sigma_k)
\end{aligned}
$$

この時、$\mathrm{Ker} \hat{f}_1 = \mathrm{Ker} \hat{f}_1'$ は $H_1(\Sigma_k)$ の $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ submodule である。

逆に、M を $H_1(\Sigma_n)$ の $\mathbb{Z}\langle t\rangle$ submodule とすると、Th 1 (i) により、
G は $(H_1(\Sigma_n)/M) \rtimes \langle t \mid t^n = 1\rangle$ へ rep. を持つ。 □

$t=-1 : H_1(\Sigma_2) \longrightarrow H_1(\Sigma_2)$ に注意すれば、次を得る。

<u>Corollary</u> (i) G の index が 2 の metabelian rep. の同値類は $H_1(\Sigma_2)$ の submodule 全体と、一対一に対応する。

(ii) G の dihedral rep. の同値類は、$H_1(\Sigma_2)$ の cyclic group への rep. の同値類と一対一に対応する。

(iii) P : odd prime に対し、

$$\exists f : G \longrightarrow D_p \text{ rep.} \iff P \mid |H_1(\Sigma_2)| = |\Delta(-1)|$$

但し $\Delta(t)$: K の Alexander polynomial.

具体的な計算は、Reidemeister-Schreier method, 及び Fox's free differential calculus によるが、これに関しては、次の事がわかる。

<u>Prop. 3</u> G : knot group $\gamma : G \to \langle t\rangle$: abelianization
$G = \langle x, a_1, \cdots, a_n \mid r_1, \cdots, r_n\rangle_\varphi$ preabelian presentation.
i.e. $\gamma(x) = t$, $\gamma(a_i) = 1$ 。 $A(t) = \left(\dfrac{\partial r_i}{\partial a_j}\right)^{\gamma\circ\varphi}$ とすると、

(i) $\mathbb{Z}\langle t\rangle [r_1^*, \cdots, r_n^*] \xrightarrow{A(t)} \mathbb{Z}\langle t\rangle [a_1^*, \cdots, a_n^*] \longrightarrow H_1(\tilde{C}_\infty) \longrightarrow 0$

free $\mathbb{Z}\langle t\rangle$ module with bases $r_1^*, \cdots, r_n^*$ exact

更に $G_T \supset D(G_T) \longrightarrow D(G_T)/D'(G_T) \cong H_1(\tilde{C}_\infty)$ 。

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x^i a_j \bar{x}^i & \longmapsto & t^i [a_j^*] \end{array}$$

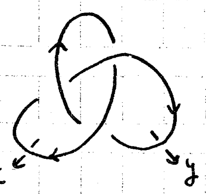
(ii) $\mathbb{Z}\langle t \mid t^k=1\rangle [r_1^*, \cdots, r_n^*] \xrightarrow{A(t)} \mathbb{Z}\langle t \mid t^k=1\rangle [a_1^*, \cdots, a_n^*] \longrightarrow H_1(\Sigma_k) \to 0$

更に $H_1(\tilde{C}_\infty) \longrightarrow H_1(\tilde{C}_\infty)/(t^k-1)H_1(\tilde{C}_\infty) \cong H_1(\Sigma_k)$

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [a_j^*] & \longmapsto & [a_j^*] \end{array}$$

これを使って具体的な計算を行なってみる。

Example 1 trefoil knot



$$G_T = \langle x, y \mid xyx\bar{y}\bar{x}\bar{y} \rangle \quad \big\} \; a = y\bar{x}$$
$$= \langle x, a \mid xax\bar{a}\bar{x}^2\bar{a} \rangle$$

Prop. 3 より $D(G_T) \longrightarrow H_1(\tilde{C}_\infty) \cong \mathbb{Z}\langle t\rangle/\langle 1-t+t^2\rangle$

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x^i a \bar{x}^i & \longmapsto & [t^i] \end{array}$$

(i) $k \equiv \pm 1 \pmod 6$ の時、$H_1(\Sigma_k) = 0$。従って rank k の metabelian representation は cyclic representation のみ。

(ii) $k \equiv \pm 2 \pmod 6$ の時、$D(G_T) \longrightarrow H_1(\Sigma_k) \simeq \langle u \mid 3u = 0\rangle$

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \longmapsto & u \end{array}$$

（但し $t \cdot u = -u$ ）

$H_1(\Sigma_k)$ の submodule は 0 と自分自身のみ。よって rank の rep. は

$$\phi_k : G_T \longrightarrow G_T(k) = \langle u, t \mid u^3 = 1, t^k = 1, tu\bar{t} = \bar{u} \rangle$$
$$\begin{cases} x \longmapsto t \\ y \longmapsto \bar{u}t \end{cases}$$

と、cyclic representation のみである。

(iii) $k \equiv 3 \pmod 6$ の時.

$$\begin{array}{ccc} D(G) & \longrightarrow & H_1(\Sigma_k) \cong \langle u \mid 2u=0\rangle \oplus \langle v \mid 2v=0\rangle \\ \Psi & & \\ a & \longmapsto & u+v \end{array}$$

(但し $t\cdot u = v$, $t\cdot v = u+v$)

$H_1(\Sigma_k)$ の $\mathbb{Z}\langle t\rangle$ submodule は trivial なもののみ。従って metabelian rep. は次の Φ_k と、cyclic rep. のみ。

$$\Phi_k : G \longrightarrow G(k) = \left\langle u, v, t \;\middle|\; \begin{array}{l} u^2=v^2=[u,v]=t^k=1 \\ tu\bar{t}=v,\ t\,v\bar{t}=\bar{u}\cdot v \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x \longmapsto t \\ y \longmapsto uvt \end{cases}$$

(iv) $k \equiv 0 \pmod 6$ の時.

$$\begin{array}{ccc} D(G) & \longrightarrow & H_1(\Sigma_k) \cong \langle u\rangle \oplus \langle v\rangle \\ \Psi & & \\ a & \longmapsto & u \end{array}$$

(但し $t\cdot u = v$, $t\cdot v = -u+v$)

$H_1(\Sigma_k)$ の submodule は次のようになる。

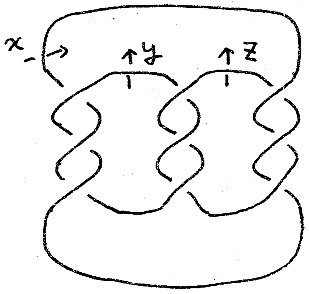
$\langle (kn)u\rangle \oplus \langle n(cu+v)\rangle$, 但し, $c\in\mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \mid 1+n+n^2$

従って rank が k の metabelian rep. は次の通り。

$$G \longrightarrow \left\langle u', v', t \;\middle|\; \begin{array}{l} u'^{mn} = v'^{n} = [u', v'] = 1,\ t^k = 1, \\ tu'\bar{t} = \bar{u}'^{c} v',\ tv'\bar{t} = \bar{u}'^{(1+c+c^2)} v'^{(c+1)} \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x \longmapsto t \\ y \longmapsto \bar{u}'^{c} v t \end{cases}$$

Example 2　9_{35} Knot（Pretzel Knot of type $(3,3,3)$）



$$G_T = \left\langle x, y, z \;\middle|\; \begin{array}{l} (y\bar{x})y(x\bar{y})^2 = (z\bar{y})z(y\bar{z}), \\ (z\bar{y})z(y\bar{z})^2 = (x\bar{z})x(z\bar{x}) \end{array} \right\rangle$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 3(t-1) & -t+2 \\ 2t-1 & -3(t-1) \end{pmatrix}$$

（Remark）これは、Knot table 上の Knot で、その Alexander matrix が対角化できない最初の例である。（See 中西［本講究録］）

(i) rank 2 の metabelian rep.　Prop.3 の計算法により

$$D(G_T) \longrightarrow H_1(\Sigma_2) \cong \langle u \mid 9u=0\rangle \oplus \langle v \mid 3v=0\rangle$$

$$\begin{cases} x\bar{y} \longmapsto u \\ x\bar{z} \longmapsto 2u+v \end{cases}$$

一方、$H_1(\Sigma_2)$ の sub module は次の通り。

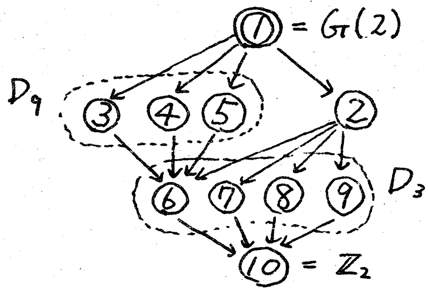
$0,\ \langle 3u\rangle,\ \langle v\rangle,\ \langle 3u+v\rangle,\ \langle 6u+v\rangle,\ \langle 3u, v\rangle,\ \langle u\rangle,\ \langle u+v\rangle,\ \langle u-v\rangle,\ \langle u,v\rangle.$

従って G_T の rank 2 の metabelian rep. は下記のようになる。

	Metabelian group	$f(x)$	$f(y)$	$f(z)$
①	$G_T(2) = \left\langle u, v, t \;\middle|\; \begin{array}{l} u^9 = v^3 = [u,v] = t^2 = 1 \\ tu\bar{t} = \bar{u},\ tv\bar{t} = \bar{v} \end{array} \right\rangle$	t	$\bar{u}t$	$\bar{u}^2\bar{v}t$
②	$\left\langle u, v, t \;\middle|\; \begin{array}{l} u^3 = v^3 = [u,v] = t^2 = 1 \\ tu\bar{t} = \bar{u},\ tv\bar{t} = \bar{v} \end{array} \right\rangle$	t	$\bar{u}t$	$u\bar{v}t$
③	$D_9 = \langle u, t \mid u^9 = t^2 = 1,\ tu\bar{t} = \bar{u} \rangle$	t	$\bar{u}t$	$\bar{u}^2 t$
④	⋮　　　⋮	t	$\bar{u}t$	ut
⑤	⋮　　　⋮	t		$u^4 t$

⑥ $D_3 = \langle u, t \mid u^3 = t^2 = 1,\ tu\bar{t} = \bar{u} \rangle$	t	$\bar{u}t$	ut
⑦ : :	t	t	$\bar{u}t$
⑧ : :	t	$\bar{u}t$	$\bar{u}t$
⑨ : :	t	$\bar{u}t$	t
⑩ $\mathbb{Z}_2 = \langle t \mid t^2 = 1 \rangle$	t	t	t

又. representation 達の間の関係は、対応する $H_1(\Sigma_2)$ の submodule の包含関係に対応して、次の様になる。(Compair 西田 [7])



(ii) rank 3 の metabelian rep.　Prop 3 の方法により

$$D(G_T) \longrightarrow H_1(\Sigma_3) \cong \langle u \mid 20u = 0 \rangle \oplus \langle v \mid 20v = 0 \rangle$$

$$\begin{cases} y\bar{x} \longmapsto -5u + 9v \\ z\bar{x} \longmapsto -9u + 4v \end{cases}$$

(但し、$t \cdot u = 4u - 9v,\ t \cdot v = 9u - 5v$)

$H_1(\Sigma_3)$ の $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ submodule は次の 6 個。

$0,\ \langle 10u \rangle \oplus \langle 10v \rangle,\ \langle 5u \rangle \oplus \langle 5v \rangle,\ \langle 4u \rangle \oplus \langle 4v \rangle,\ \langle 2u \rangle \oplus \langle 2v \rangle,\ \langle u \rangle \oplus \langle v \rangle$。

従って G_T の rank 3 の metabelian rep. は下記のようになる。

Metabelian group	$f(x)$	$f(y)$	$f(z)$
① $G_T(3) = \left\langle u, v, t \,\middle|\, \begin{matrix} u^{20} = v^{20} = [u, v] = t^3 = 1 \\ tu\bar{t} = u^4\bar{v}^9,\ tv\bar{t} = u^9\bar{v}^5 \end{matrix} \right\rangle$	t	$\bar{u}^5v^4t$	$\bar{u}^9v^4t$

② $\left\langle u, v, t \;\middle|\; \begin{array}{l} u^{10} = v^{10} = [u, v] = t^3 = 1 \\ tu\bar{t} = u^4 v,\ tv\bar{t} = \bar{u} v^5 \end{array} \right\rangle$ $\quad t,\ u^5 \bar{v} t,\ u v^4 t$

③ $\left\langle u, v, t \;\middle|\; \begin{array}{l} u^5 = v^5 = [u, v] = t^3 = 1 \\ tu\bar{t} = \bar{u} v,\ tv\bar{t} = \bar{u} \end{array} \right\rangle$ $\quad t,\ \bar{v} t,\ u \bar{v} t$

④ $\left\langle u, v, t \;\middle|\; \begin{array}{l} u^4 = v^4 = [u, v] = t^3 = 1 \\ tu\bar{t} = \bar{v},\ tv\bar{t} = u\bar{v} \end{array} \right\rangle$ $\quad t,\ \bar{u} v t,\ \bar{u} t$

⑤ $\left\langle u, v, t \;\middle|\; \begin{array}{l} u^2 = v^2 = [u, v] = t^2 = 1 \\ tu\bar{t} = \bar{v},\ tv\bar{t} = u\bar{v} \end{array} \right\rangle$ $\quad t,\ uvt,\ ut$

⑥ $\langle t \mid t^3 = 1 \rangle$ $\quad t,\ t,\ t$

Representation 達の間の関係は次のようになる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & ① = G_T(3) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
② \arrow[d] \arrow[drr] & & ④ \arrow[d] \\
③ \arrow[dr] & & ⑤ \arrow[dl] \\
 & ⑥ = \mathbb{Z}_3 &
\end{tikzcd}$$

最後に metacyclic representation について考えてみる。$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ を ring $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の unit group とすると、$Aut(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ となる。そこで Prop. 1 の Remark により、可換化した時 cyclic group になる metacyclic group は、$\Gamma(p, k, l) \equiv \langle a, t \mid a^p = t^k = 1,\ ta\bar{t} = a^p \rangle$ (但し、$p, l, k \in \mathbb{N}$, l 及び $l-1$ は p と互いに素, $l^k \equiv 1 \bmod p$)

に限る。$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ が可換群であることに注意すれば、Th.1の証明と同様な方法で次を得る。

<u>Prop.4</u> (i) $(\Gamma(p,k,l), t^m) \cong (\Gamma(p',k',l'), t^{m'})$

$\Leftrightarrow$ $p=p'$, $k=k'$, $l^m \equiv l^{m'} \mod p$

(ii) $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ 上の同値関係 $\sim$ ($[m] \sim [m'] \Leftrightarrow l^m \equiv l^{m'} \mod p$)

に対して、その同値類の代表系を $[m_1], \cdots, [m_\mu]$ とすると、

"Base group" を $\Gamma(p,k,l)$ とする oriented group の同値類の代表系は $(\Gamma(p,k,l), t^{m_i})$ $1 \leqq i \leqq \mu$ である。

(Remark) (i) により、$(\Gamma(p,k,l), t^{m_i}) \cong (\Gamma(p,k,l^{m_i}), t)$

(G',t) から $(\Gamma(p,k,l),t)$ への o.p. rep. について考える。

これは、Th.1により、$H_1(\tilde{C}_\infty)$ から $D(\Gamma(p,k,l)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ への $\mathbb{Z}\langle t\rangle$ homo. に帰着される。$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ では、$\langle t\rangle$ の action は、$t\cdot[\alpha] = [l\alpha]$ により与えられており、又、Prop3により、$H_1(\tilde{C}_\infty)$ は $A(t)$ を presentation matrix に持つ。これより次を得る。

<u>Prop.5</u> $\exists f : (G',t) \longrightarrow (\Gamma(p,k,l),t)$ o.p. rep.

$\Leftrightarrow$ 不定方程式(※): $A(l)\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mod p$ が、

g.c.d $(p, \xi_1, \cdots, \xi_n) = 1$ なる解 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ を持つ。

更に、この時．

(*)の二つの解$(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $(\xi_1', \ldots, \xi_n')$に対応するrep.が同値

$\Leftrightarrow$ $\exists g \in \mathbb{Z}$ s.t $g.c.d(p, g) = 1$, $\xi_i' \equiv g\xi_i \mod P$ $(1 \leq i \leq n)$。

以上により、次を得る。

Theorem 3. Knot group Gの$\Gamma(p, k, l)$へのrep.の同値類は、不定方程式"$A(l^{m_i})\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mod P$"の$g.c.d(p, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 1$なる解のProp. 5の意味での同値類に対応する。

Corollary (Fox [2]) Pを素数とする時、Knot group Gが$\Gamma(p, p-1, l)$へrep.を持つための必要十分条件は、"$\exists m \in \mathbb{Z}$ s.t $g.c.d(m, p-1) = 1$, $p \mid \Delta(l^m)$"。

(追記) 本講の大部分はHartley [5]と重複していることが、わかりました。

References

[1] G. Burde : Darstellungen von Knotengruppen und eine Knoteninvariante. Hamburg Abh. vol 35 (1970) pp. 107–120

[2] R. H. Fox : Metacyclic Invariants of Knots and Links. Canadian. J. of Math. vol. 22 No. 2 (1970) pp. 193–201

[3] F. González-Acuña : Homomorphs of Knot Groups. Ann. of Math. 102 (1975) pp. 373–377

[4] C. McA. Gordon : Knots whose Branched Coverings have Periodic Homology. Trans. A.M.S. 168 (1972) p.p. 357–370

[5] R. Hartley : Metabelian Representations of Knot Groups. (preprint)

[6] J. Milnor : Infinite Cyclic Coverings. Conference on the Topology of Manifold, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1968, pp. 115–133

[7] O. Nishida : On irregular Branched Coverings of Knots. 数理研講究録 309 pp. 38–51