数理解析研究所講究録
第 369 巻 1979 年 71-81

2-fold branched covering spacesの個数について

北大 理 河野正晴

3-sphere S^3 の 2-fold branched covering space はその branch line となる link を一つきめると一意的にきまる。しかし、このことは一般の manifold に対しては正しくない。この Note では一般の 3-manifold に対し、その中の link を一つきめた時、その 2-fold branched covering space の中で互いに同相でないものがどれぐらいあるか、ということを調べる。ここでとりあげる多様体はすべて closed とし、又多様体の中の link と言えば、closed 1-submanifold (connected とは限らない) をさすものとする。

<u>Definition</u>

N を 3 次元多様体、L をその中の link とする。$n(N, L)$ で、L で branch する N の 2-fold covering space で互いに同相でないものの個数を表わす。又 $n(N) := \max\{n(N, L) \mid L$ は N のすべての link$\}$ とする。

Remark

1. $m(N,L)$, $m(N)$ が well-defined (上からおさえられるか) ということはまだ示されていないが、それは後の Prop. 1 で与えられる。
2. [3] の定理により、L が $\mathbb{Z}_2$-係数でホモロガスゼロでなければ $m(N,L)=0$。又同じく $1\leq m(N)$ がわかる。

Lemma

N を3次元多様体とし、$L=L_1\cup\cdots L_\mu$ を N の中の link とする(ただし、各 L_i は L の component)。L_i に対応する meridian を m_i とする。この時次の a), b) は同値。

a) 次の i), ii) を満たす $H_1(N-L)$ の subgroup H が存在する。

  i) $|H_1(N-L):H|=2$

  ii) $\langle m_i\rangle \notin H \quad (1\leq i\leq\mu)$

b) associated unbranched covering が $h^{-1}(H)$ できまる様な N 上の L で branch する 2-fold covering が存在する。ただし、$|\bigcirc:\square|$ は群の index、$\langle m_i\rangle$ は meridian m_i が表わす $H_1(N-L)$ の元、h は $\pi_1(N-L)$ から $H_1(N-L)$ への Hurewicz map とする。

(proof) まず a) $\Rightarrow$ b)。$h^{-1}(H)$ は $\pi_1(N-L)$ の index が 2 の部分群となるので $h^{-1}(H)$ に対応する N − L の (2-fold) unbranched covering が存在する。Fox's unique compactification theorem [1]より、これはN上の2-fold branched covering を一意的にきめる。この時 $\langle m_i \rangle \notin H$ という条件より、各 L_i 上で必ずbranchしている。よってこのbranched covering はLでbranchするcoveringになっている。次にb) ⟹ a)。条件b)を満す2-fold covering $p:(M,\hat{L}) \longrightarrow (N,L)$ が存在したとする。$p_*(\pi_1(M-\hat{L}))=\hat{H}$ とおくと、$\hat{H}$ は $\pi_1(N-L)$ の index 2 の部分群となっている。又 $\pi_1(N-L)/\hat{H} \cong \mathbb{Z}_2$ で $\mathbb{Z}_2$ は可換群だから $\hat{H}$ は $\pi_1(N-L)$ の交換子群を含む。

$H_1(N-L)=\pi_1(N-L)/[\pi_1(N-L),\pi_1(N-L)]$ より（$[G;G]$ は群Gの交換子群）、$H=h(\hat{H})$ とすると、Hは $H_1(N-L)$ の index 2 の部分群。又各 L_i でほんとにbranchしてることから $\langle m_i \rangle \notin H$ $(1 \leq i \leq \mu)$。

<u>Proposition 1</u>

Nを3次元多様体とする。ここで $H_1(N;\mathbb{Z}_2)=\underbrace{\mathbb{Z}_2+\cdots+\mathbb{Z}_2}_{n\text{個}}$ とすると、$1 \leq m(N) \leq 2^n$

(proof) Remarkより $1 \leqq m(N)$ はわかるので任意のlink $L=L_1\cup\cdots\cup L_\mu$ に対して、$m(N,L)\leq 2^n$ を示せばよい。よってLを1つ固定して、Lemmaの a)を満す部分群が高々 2^n 個しか存在しないことを示す。

$H_1(N)$は有限生成可換群だから次の形をしているとしてよい。

$$H_1(N)=\underbrace{\mathbb{Z}+\cdots+\mathbb{Z}}_{m\text{個}}+\mathbb{Z}_{p_1}+\mathbb{Z}_{p_2}+\cdots+\mathbb{Z}_{p_r}+\cdots+\mathbb{Z}_{p_s}$$

ただし、P_iは素数の巾乗で、$i\leq r$の時$2|P_i$，$r+1\leq i\leq s$の時は$2\nmid P_i$となっており、又$n=m+r$。$H_1(N)$のi番目の$\mathbb{Z}$－factorのgeneratorをα_i'，$\mathbb{Z}_{p_i}$のgeneratorをα_{i+m}'とする。そしてα_i'（$1\leq i\leq m+s$）をrepresentする$N-L$のsimple loop l_iを1つとってfixし、l_iが$H_1(N-L)$の中で表わすclassをα_iとする。又L_iのmeridian m_iが表わす$H_1(N-L)$の元をβ_iとしておく。

$H_1(N-L)$から$H_1(N)$への自然な写像をj_*とすると、$j_*(\alpha_i)=\alpha_i'$となっている。$m+r<i\leq m+s$なるiについてα_i'のorderは奇数なので、各α_i'（$m+r<i\leq m+s$）に対し、ある自然数k_iが存在して、$(2k_i+1)\alpha_i'=0$ in $H_1(N)$となる。よって$(2k_i+1)\alpha_i\in\ker j_*$。ある整数$n_j^i$（$j=1,\cdots,\mu$）が存在して

$$(2k_i+1)\alpha_i=\sum_{j=1}^{\mu}n_j^i\beta_j$$

と書ける。この時

$$A':=\{i\mid m+r<i\leq m+s\ ,\ \sum_{j=1}^{\mu}n_j^i\equiv 0\ (\mathrm{mod}.\,2)\}$$
$$B':=\{i\mid m+r<i\leq m+s\ ,\ \sum_{j=1}^{\mu}n_j^i\equiv 1\ (\mathrm{mod}.\,2)\}$$

とおくと、A', B' は n'_j のとり方によらず一意的にきまる。

又 Lemma の a) を満す任意の部分群に対し、

$i \in A'$ なら $\alpha_i \in H$, $i \in B'$ なら $\alpha_i \notin H$ が成立する。

さて Lemma を満す部分群 H に対し、

$A^H := \{ i \mid 1 \leq i \leq n, \ \alpha_i \in H \}$

$B^H := \{ i \mid 1 \leq i \leq n, \ \alpha_i \notin H \}$

とおくと、A^H, B^H は $\{1, 2, \cdots, n\}$ を disjoint にわけるが、この組み合せは 2^n 通り存在する。逆に $\{1, 2, \cdots, n\}$ の分割 A'', B'' を与えた時、Lemma の a) を満す部分群 H で $A^H = A''$, $B^H = B''$ となる様なものが存在するとすれば一意的である、ということが言えれば証明は終了する。よって A'', B'' を1つ固定し、部分群 H が Lemma の a) を満し $A^H = A''$, $B^H = B''$ と仮定する。

$A = A' \cup A^H$, $B = B' \cup B^H$ とおく。そして、

$\tilde{H} := gp\{\beta_i + \beta_j, \beta_i + \alpha_k, \alpha_k + \alpha_l, \alpha_t \mid \text{in } H(N-L)\}$

ただし、$1 \leq i, j \leq \mu$, $k, l \in B$, $t \in A$ とする。$\tilde{H}$ は A^H, B^H によって一意的にきまり $\tilde{H} \subset H$ となる。これが $\tilde{H} = H$ となればよい。まず、ある β_i が存在して $\beta_i \in \tilde{H}$ とすると $\beta_i \in H$ となるので矛盾。よって各 β_i は $\beta_i \notin \tilde{H}$ としてよい。$H_1(N-L)$ の任意の元 g に対して整数 n_i $(1 \leq i \leq \mu)$ m_i $(1 \leq i \leq m+s)$ が存在して、

$$g = \sum_{i=1}^{\mu} n_i \beta_i + \sum_{i=1}^{m+s} m_i \alpha_i$$ と書ける。 よって

$$g \equiv \left(\sum_{i=1}^{\mu} n_i\right)\beta_1 + \sum_{i\in B} m_i \alpha_i \quad (\mathrm{mod}\ \widehat{H})$$
$$\equiv \left(\sum_{i=1}^{\mu} n_i\right)\beta_1 + \left(\sum_{i\in B} m_i\right)\beta_1 \quad (\mathrm{mod}\ \widehat{H})$$
$$\equiv \left(\sum_{i=1}^{\mu} n_i + \sum_{i\in B} m_i\right)\beta_1 \quad (\mathrm{mod}\ \widehat{H})$$

よって $\sum_{i=1}^{\mu} n_i + \sum_{i\in B} m_i \equiv 0 \pmod 2$ なら $g \in \widehat{H}$,

$\sum_{i=1}^{\mu} n_i + \sum_{i\in B} m_i \equiv 1 \pmod 2$ なら $g \in \beta_1\widehat{H}$。

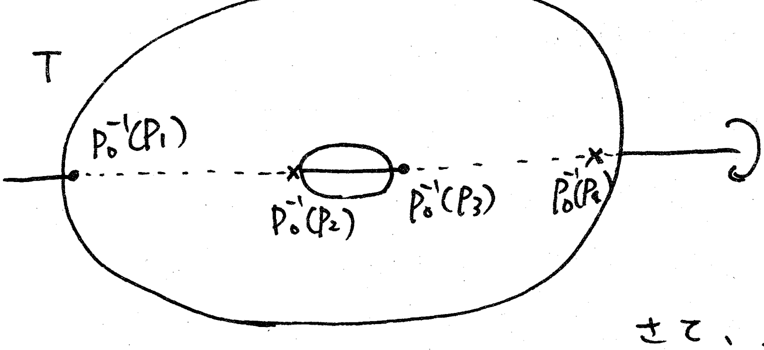
このことは $\widehat{H}$ の指数が2であることを示している。よって
$\widehat{H} = H$ □

次に $m(N) \neq 1$ となる例を実際にあげることにする。

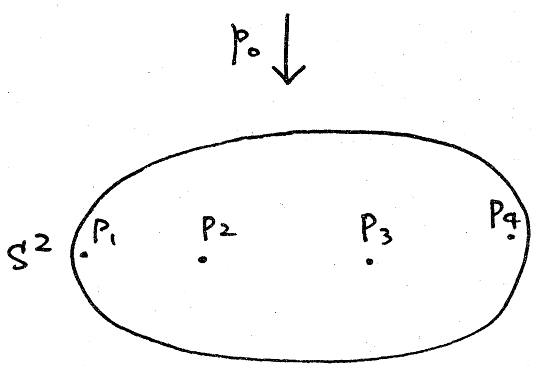
<u>Example</u> $m(S^2 \times S^1) = 2$

2-sphere S^2 上に4点 $p_1, \cdots, p_4$ をとり、$L = \{p_1, \cdots, p_4\} \times S^1$ とする。S^2 上の $\{p_1, \cdots, p_4\}$ で branch する 2-fold covering space は一意的にきまり、それは torus T であることが知られている。この covering の map を p_0 とする。

次ページの図の様な位置に torus を置き軸の $180°$ 回転が与える同相写像を τ とする。この時自然な projection $\iota : T \longrightarrow T/\tau$ が p_0 になっていることが知られている。



180° 回転が与えるhomeo.をτとする。



さて、$I=[0,1]$をunit intervalとした時 $p_0\times id_I : T\times I \longrightarrow S^2\times I$ を考える。さて $S^2\times\{0\}$ と $S^2\times\{1\}$ を id_{S^2} ではり合わせた時、これに対応する $T\times\{0\}$ と $T\times\{1\}$ のはりあわせで $p_0\times id_I$ とcompatibleな同相写像は id_T とτであることがわかる。$T\times I$ を id_T, τではりあわせてできる多様体をそれぞれ M^1_4, M^2_4 とすると、M^1_4, M^2_4 はLでbranchする $S^2\times S^1$ 上の2-fold branched covering spaceとなっている。今 M^1_4 と M^2_4 は同相でない。よって $n(S^2\times S^1, L)\geq 2$。又 Proposition 1 より $n(S^2\times S^1)\leq 2$ となるので $n(S^2\times S^1)=2$

なお同様のことが S^2上に$2m$個の点 $P_1, P_2, \cdots, P_{2m}$ $(m\geq 2)$ をとってもできる。この時つくられる $S^2\times S^1$ の 2-fold covering spaceとなる多様体を M^1_{2m}, M^2_{2m} とする。この時 M^1_{2m} の基本群 $\pi_1(M^1_{2m})$ は $\pi_1(F_{m-1})\times\mathbb{Z}$ と同型で（F_{m-1} は

genus $n-1$ の closed orientable surface)、$\pi_1(M^2_{2m})$ は $\pi_1(F_{m-1})$ の $\mathbb{Z}$ による拡大で trivial でないものになる。よって $1 \leq i, j \leq 2$, $m, n \geq 2$ の時 $(i, m) \neq (j, n)$ なら $\pi_1(M^i_{2m}) \not\cong \pi_1(M^j_{2n})$ がわかるので M^i_{2m} と M^j_{2n} は同相でない。又この M^i_{2m} は irreducible、よって prime であることを注意しておく。

前の Example を一般化すると次の Proposition が得られる。

<u>Proposition 2</u>

$$M = \underbrace{S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1 \# \cdots \# S^2 \times S^1}_{n\text{個}} \quad \text{とすると、}$$

$n(M) = 2^n$ である。

(proof) $H_1(M; \mathbb{Z}_2) = \underbrace{\mathbb{Z}_2 + \cdots + \mathbb{Z}_2}_{n\text{個}}$ より $n(M) \leq 2^n$ となる。よって $n(M, L) = 2^n$ となる M の link の存在を言えばよい。

M の connected sum の factor になっている i 番目の $S^2 \times S^1$ を $(S^2 \times S^1)_i$ と書き、各 $(S^2 \times S^1)_i$ の factor の S^2 上に $2i+2$ 個の点 $P^i_1, \cdots, P^i_{2i+2}$ をとり、$L_i = \{P^i_1, \cdots, P^i_{2i+2}\} \times S^1$ とする。各 $(S^2 \times S^1)_i$ から M をつくる connected sum を次の様にしてつくってやる。$(S^2 \times S^1)_1$ 上に $n-1$ 個の disjoint な 3-balls $B_2, \cdots, B_n$ をとる。ただし、$B_i \cap L_1$ は 1-ball になる様にとる。各 $i (\geq 2)$ に対し 3-ball B'_i を $(S^2 \times S^1)_i$ の中

に$L_i \cap B_i'$が1-ballになる様にとっておく。そして，B_i，B_i'（$i=2,\cdots,n$）の内点をとりさり、∂B_iと$\partial B_i'$をはりつけることによりconnected sumをつくる。ただし、この時$L_i \cap \partial B_i$と$L_i \cap \partial B_i'$はそれぞれ2点よりなるが、これがお互いにはりつけられる様にはりつけの写像を選んでおく。

$L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i - \bigcup_{i=2}^{n} \{\mathrm{Int}(L_i \cap B_i) \cup \mathrm{Int}(L_i \cap B_i')\}$とおくとLはMのlinkとなる。次の形の多様体NはMのLでbranchする2-fold covering spaceとなりうる。

$$N = M_4^{\varepsilon_1} \# M_6^{\varepsilon_2} \# \cdots \# M_{2(i+1)}^{\varepsilon_i} \# \cdots \# M_{2m+2}^{\varepsilon_m}$$

ただし、$M_{2(i+1)}^{\varepsilon_i}$は前のexampleで定義したもので、$\varepsilon_i$は1又は2。$N = M^{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}$と書くと、前のexampleの最後の注意とconnected sumに関するunique decomposition theorem [4]より$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) \neq (\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n')$なら$M^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m}$と$M^{\varepsilon_1'\cdots\varepsilon_m'}$は同相でないことがわかる。よって$n(M,L) \geq 2^n$。□

__Remark__　証明を見ると次のこともわかる。$1 \leq i \leq n$なる任意の自然数iに対して、$n(M,L^i) = 2^i$となるlinkが存在する。

又、Proposition 2はJacoによる次の定理[2]

"Mをclosed orientable 3-manifoldで$\pi_1(M) = \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$（$\mathbb{Z}$のn個のfree product）とすると$M = \Sigma \# S^2 \times S^1 \# \cdots \cdots \# S^2 \times S^1$。ここで$\Sigma$はhomotopy 3-sphere"を使うと次の形

にできる。

<u>Proposition 3</u>

Mはclosed orientable 3-manifoldで$\pi_1(M)$はn個の$\mathbb{Z}$のfree productとする。この時 $m(M)=2^n$

<u>Note</u>

1. ここで定義した$m(N)$は当然topological invariantであるが、homological invariantであろうか？ もしYesならcoveringのhomeo. typeはhomologyできまるということであり、Noなら$m(N)$はNのhomology以外の情報も含んでいることになる。

2. $m(N,L)$はhomeo. typeの個数としたが、少し定義をかえて、covering typeの個数として論じることもできる。つまり、MとM'の間に左の図式を可換にするhomeo.が存在する時covering typeが同じといい、その個数を$m(N,L)$と書く。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & M' \arrow[dl, "p'"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

これについてはViro [5]が少し論じているが、一般には$m(N,L) \lneqq m(N,L)$である。

References.

[1] Fox, R.H., Covering spaces with singularities, Algebraic Geometry and Topology, A Symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton Univ. Pr., 1957, 243-257

[2] Jaco, W., Three manifolds with fundamental group a free product, Bull. Amer. Math. Soc. 75(1969), ~~972~~ 977

[3] 河野正晴, Note on 2-fold branched coverings, (結び目と3次元多様体), 数理解析研講究録346, 1979, 66-79

[4] Milnor, J., A unique factorization theorem for 3-manifolds, Amer. J. Math. 84(1957), 623-630

[5] Viro, O. Ja., Linkings, two sheeted branched coverings and braids, Math. USSR, Sbornik, 16(1972) No2, 223-236 (English translation)