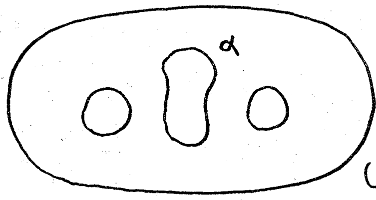
数理解析研究所講究録
第369巻 1979年 128-143

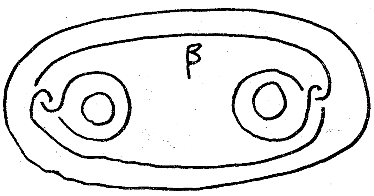
Standard representation curve of $\pi_1(M^3)$.

北大 教養 小林一章

本稿ではコンパクト向きづけ可能な3次元多様体Mの基本群$\pi_1(M^3)$の元をある意味で標準的な単純閉曲線で表現する事を考えます。ある意味で標準的という事は，例えば下図の(a)



(a)



(b)

(b)のようにgenus 2のハンドル体の内部にある2つの閉曲線α, βを考える時，α，βは共にホモトピック0ですが$1\in\pi_1(M)$を表現する閉曲線としては，αを考える方がいろいろな面で好都合です。このように"標準的"な閉曲線にふさわしい，いくつかのモデルがあるのですが，それらに該当する"標準的な表現曲線"の定義を与え，そこから導かれる種々の性質を調べるのが本稿の目的です。

対象とするのはPL-カテゴリーの範囲とします。

定義. M^3を向きづけ可能な3次元多様体とし, α, βをM^3内の単純閉曲線とします。この時αとβが parallel とは
$^\exists$埋め込み $f: S^1\times[0,1]\longrightarrow M^3$ $\ni$ $f(S^1\times\{0\})=\alpha$, $f(S^1\times\{1\})=\beta$
なる時と定義します。αとβが parallel の時$\alpha /\!/ \beta$ とかき, αと parallel な単純閉曲線の集合をP_αとかく。

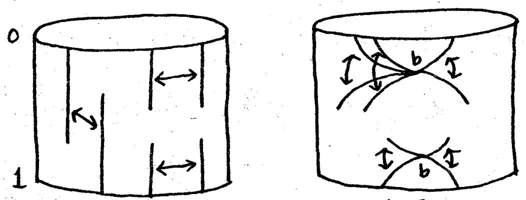
定義. M^3を上の定義と同じとし, α, βをM^3内の単純閉曲線で$\langle\alpha\rangle=0$ in $H_1(M:Z)$ とする。($\langle\alpha\rangle$はαのホモロジー類).
次の条件を満足するとき, αとβは singular parallel と定義する。$^\exists$map $f: S^1\times[0,1]\longrightarrow M^3$ $\ni$ (1) $f(S^1\times\{0\})=\alpha$, $f(S^1\times\{1\})=\beta$
(2) $0<{}^\exists\varepsilon_1<{}^\exists\varepsilon_2<1$ $\ni$ $^\forall t\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$に対し $f(S^1\times[0,t])\cong f(S^1\times[t,1])$ $\cong f(S^1\times[0,1])$ 且つ $^\forall t_1\in[0,\varepsilon_1)$, $^\forall t_2\in(\varepsilon_2,1]$に対し $f|S^1\times[0,t_1]$ と $f|S^1\times[t_2,1]$ は埋め込みである。(3) fが埋め込みでない時 αによって bound される任意の向きづけ可能な曲面F_αに対し $F_\alpha\cap\beta=\phi$ (up to ambient isotopy of M keeping α fixed, i.e. $^\exists$cont. family of homeomorphisms $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}: M^3\longrightarrow M^3$ $\ni$ $\varphi_t|\alpha$ $=id.$ & $\varphi_1(F_\alpha)\cap\beta=\phi$). αとβが singular parallel の時$\alpha \tilde{/\!/} \beta$とかき$\alpha$と singular parallel な単純閉曲線の集合をSP_αとかく。上の条件(1), (2)のみを満足するときαとβは weak singular parallel といい, $\alpha \underset{w}{\tilde{/\!/}} \beta$ とかく。この時は $H_1(M:Z)$で$\langle\alpha\rangle=0$という条件は不要です。

注1. M^3が3次元球面S^3でαとβが上の(3)の条件を満足する$\Longrightarrow$ αとβはホモロジカル unlinking。

注2. singular parallel, parallel という関係は同値関係のうち推移律をみたさない。

定義. αが$\omega \in \pi_1(M^3)$の standard representation curve とは $\omega = [\alpha]$ ($[\alpha]$はαのホモトピー類)で，αと singular parallel となるM^3内の任意の単純閉曲線はαと parallel となる事である。即ち $SP_\alpha = P_\alpha$ となる事である。

一般に Smythe [S] によって $\alpha \simeq \beta$ (ホモトピック)のとき
$\exists$写像 $f: S^1 \times [0,1] \longrightarrow M^3$ $\ni$ $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$ で更に $S(f)$ は次の3つのタイプ I, II, III のみであるとしてよい。ここで $S(f) = Cl\{x \in S^1 \times I \mid \# f^{-1}f(x) \geqq 2\}$: fの特異点の集合.



(I) (II). (III)

(b は branch point (分岐点)).
(I)は C, C' が f の2重線(即ち $f(C) = f(C')$)で $\partial C = p \cup q$, $\partial C' = p' \cup q'$ とすると $p \in S^1 \times \{0\}$, $p' \in S^1 \times \{1\}$, $q, q' \in S^1 \times (0,1)$.
(II)は上の記号の下で $p, p' \in S^1 \times \{0\}$ または $p, p' \in S^1 \times \{1\}$ そして $q, q' \in S^1 \times (0,1)$. (III)は $S^1 \times \{0\}$ または $S^1 \times \{1\}$ からの2重線の tree T で1つの分岐点を共有する。更にこの時 $\exists$ 2-ball $B^2 \subset S^1 \times I$ $\ni$

$B^2 \supset T$, $B^2 \cap \partial(S^1 \times I) \cong B^1$ (1-ball) & $B^2 \cap (S(f) - T) = \phi$.
(X が多様体のとき ∂X, $\mathrm{Int}\, X$ は各々 X の境界，内部を表す。)

補題 1. M^3 を向きづけ可能な 3 次元多様体とし，α, β を $\mathrm{Int}\, M$ に含まれる 2 つの単純閉曲線とする。このとき $\alpha \approx \beta$ (ambient isotopic) $\Longleftrightarrow$ $\exists$ 写像 $f : S^1 \times [0,1] \longrightarrow M^3$ $\ni$ $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$ & $S(f)$ は type I の singularities のみから成る。

略証. ($\Rightarrow$) piping technique を使う事により $\exists$ map $f : S^1 \times [0,1] \longrightarrow M^3$ $\ni$ $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$, $S(f)$ は type I, II, III のみ，しかも $F(x,t) = (f(x,t), t)$ によって定義される $F : S^1 \times [0,1] \longrightarrow M \times [0,1]$ は locally flat level preserving embedding になっている。(従って Hudson-Zeeman [H-Z] により F は ambient isotopy で cover される). そして F が埋め込みという事から $S(f)$ は type II の singularity をもたず，また F が ambient isotopy で cover される事より type III の singularities は $F|S^1 \times (0,1)$ のみを変えて除去出来る。
($\Leftarrow$) 写像 $f : S^1 \times [0,1] \longrightarrow M$ は $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$ で $S(f)$ は type I の singularities のみをもつとする。$F : S^1 \times [0,1] \longrightarrow M \times [0,1]$ を $F(x,t) = (f(x,t), t)$ とおくと，$S(f)$ が type I の singularity のみからなる事から level preserving embedding である。そして $pF = f$ で f が immersion である事から locally flat で

ある事が示される。それ故 Isotopy covering theorem [H-Z] により $\alpha \approx \beta$ である。』

I_α を α と ambient isotopic な simple closed curves の集合とし, SP^w_α を α と weak singular parallel な simple closed curves の集合とする。

定理1。M^3 を向きづけ可能な3次元閉多様体とし，α を M に含まれる単純閉曲線とする。

(1) $SP^w_\alpha = I_\alpha$。そして $\langle\alpha\rangle = 0$ in $H_1(M:Z)$ なら $SP_\alpha \subset I_\alpha$.

(2) $\alpha \approx \beta$ のとき，$SP^w_\alpha = P_\alpha \Leftrightarrow SP^w_\beta = P_\beta$。更に $\langle\alpha\rangle = 0$ in $H_1(M:Z)$ なら $SP_\alpha = P_\beta \Leftrightarrow SP_\beta = P_\beta$.

略証. (1) 補題1を使えば $SP^w_\alpha \subset I_\alpha$ を示すには $\alpha \mathbin{/\!\!/^{\!\sim}} \beta$ なる β に対し，type I の singularity しかもたない map $f: S^1 \times [0,1] \longrightarrow M$ で $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$，$f(S^1 \times \{1\}) = \beta$ なるものの存在を示せばよい。そこで先ず $g: S^1 \times [0,1] \longrightarrow M$ を $\beta \in SP^w_\alpha$ を表現しているmapとする。$S(g)$ の triple points の個数，branch points の個数は $g(S^1 \times [0,1])$ の homeomorphism type の不変量だから $\alpha \mathbin{/\!\!/^{\!\sim}} \beta$ の定義の条件(2)より3重点，分岐点をもたない事がわかる。従って g は type III の singularity はもたない。次に type II の singularity または ribbon type の singularity があっても適当な $t \in (0,1)$ を取ると $\alpha \mathbin{/\!\!/^{\!\sim}} \beta$ の(2)を満足しない事がわかる。従って

g は type I の singularity しかもたない。∴ $SP^{\omega}_{\alpha} \subset I_{\alpha}$. 逆に g が type I の singularity しかもたなければ（即ち補題1によって g は $\alpha \approx \beta$ を表現している） $S^1 \times I$ の適当な座標変換を行なう事によって $I_{\alpha} \subset SP^{\omega}_{\alpha}$ が示される。

(2). $\alpha \approx \beta$ だから $f(\alpha) = \beta$ となる位相同形写像 $f: M \to M$ があり，それによって求める結果が得られる。』

補題2. M^3 を向きづけ可能なコンパクト多様体で $\partial M \neq \phi$ とする。$\alpha \subset \partial M^3$; $\beta, \gamma \subset \mathrm{Int}\, M^3$ なる単純閉曲線 α, β, γ に対しもし $\alpha /\!/ \beta$, $\beta \approx \gamma$ なら $\alpha /\!/ \gamma$ である。更に $\partial M^3 \cong S^2$ で $\alpha /\!/ \beta$, $\beta \not\approx \gamma$ なら実は $\beta /\!/ \gamma$ である。

略証.（前半）. $\alpha /\!/ \beta$, $\beta \approx \gamma$ だから $\exists$ 埋め込み $f: S^1 \times [0,1] \to M^3$ ∋ $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$. $\exists$ 写像 $g: S^1 \times [1,2] \to M^3$ ∋ $g(S^1 \times \{1\}) = \beta$, $g(S^1 \times \{2\}) = \gamma$ 且つ $S(g)$ は type I の singularities のみ. $f = g$ on $S^1 \times \{1\}$ としてよい。$F = f \cup g$ とおくと $\alpha \subset \partial M$ だから $S^1 \times \{0\} \cap S(F) = \phi$. その事と α, γ を動かさない piping technique を使って（即ち $F | S^1 \times (0,2)$ のみを変化させて）F の singularity を除去出来る. ∴ $\alpha /\!/ \gamma$.

（後半）. $\alpha \subset \partial M^3 \cong S^2$ で $\alpha /\!/ \beta$ だから $\exists$ embedding $h: B^2 \to M$ ∋ $h(\partial B^2) = \beta$. そして $\beta \not\approx \gamma$ より $h(B^2) \cap \gamma = \phi$. また $g: S^1 \times [1,2] \to M^3$ を $\beta \not\approx \gamma$ を表現している写像とし $h = g$ on $S^1 \times \{1\} = \partial B^2$

とする。$G=g\cup h$ とおき $p\in B^2-S(G)$ を取り $U(p,B^2)\subset B^2-S(G)$ となるように取る。$h(\partial U(p,B^2))=\beta'$ とおくと前半と同様にして $\beta' /\!/ \gamma$ が示せる。そこで $^\exists$埋め込み $G_1: S^1\times[0,1]\longrightarrow M$ $\ni$ $G_1(S^1\times\{0\})=\beta'$, $G_1(S^1\times\{1\})=\gamma$. また h が埋め込みで $\gamma\cap h(B^2)=\phi$ だから $\beta /\!/ \beta'$ in $M-\gamma$. それ故 $^\exists$位相同形写像 $\varphi: M\to M$ $\ni$ $\varphi(\beta')=\beta$, $\varphi|\gamma=id$. そこで φG_1 によって $\beta /\!/ \gamma$ 』

注. 後半の証明から明らかなように $\langle\alpha\rangle=0$ in $H_1(M;\mathbb{Z})$, $\partial M\cong S^2$ でなくとも $\beta\approx\gamma$ であり且つ $^\exists$埋め込み $h: S^1\times[0,1]\longrightarrow M$, $^\exists$写像 $f: S^1\times[1,2]\longrightarrow M$ $\ni$ (1) $h(S^1\times\{1\})=\beta$, $h=f$ on $S^1\times\{1\}$ (2) f は $\beta\approx\gamma$ を表現している. (3) $S(F)\cap(S^1\times\{0\})=\phi$ (ただし $F=h\cup f$) (4) $\mathrm{Im}\,h\cap\gamma=\phi$ $\Longrightarrow$ $\beta /\!/ \gamma$ が証明出来る。

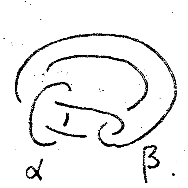
定理 2. α が $\mathbb{R}^3$ での non-trivial knot $\Longleftrightarrow$ $SP_\alpha \supsetneqq P_\alpha$.

略証. ($\Rightarrow$). α を $\mathbb{R}^3$ 内の non-trivial knot とし $\mathbb{R}^3$ の平行移動を使って α と split している knot β を作ると $\beta\in SP_\alpha$. α と β を split している 2 次元球面を S_0^2 とおく。もし $\beta\in SP_\alpha$ なら $^\exists$埋め込み $f: S^1\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ $\ni$ $f(S^1\times\{0\})=\alpha$, $f(S^1\times\{1\})=\beta$. α と β が split しているから $f^{-1}(\mathrm{Im}f\cap S_0^2)$ の component で $S^1\times[0,1]$ 内で $S^1\times\{t\}$ に ambient isotopic なものがある。それの f による像を γ とすると $\alpha\approx\gamma\approx\beta$ 所が $\gamma\subset S_0^2$ だから γ は

trivial knot. これは矛盾. ∴ $\beta \in SP_\alpha - P_\alpha$.

(⇐) α が trivial knot なら $SP_\alpha = P_\alpha$ を示す。$\beta \in SP_\alpha$ とすると $^\exists$埋め込み $f: B^2 \longrightarrow R^3 \ni f(\partial B^2) = \alpha$. また写像 g は $\alpha \not\parallel \beta$ を表現しているとすると補題2の後半より $\alpha \parallel \beta$. ∴ $SP_\alpha = P_\alpha$ □

系. R^3(またはS^3)には $I_\alpha \supsetneqq SP_\alpha$ となる knot α がある。下図の Whitehead link がその例を示している。



$\beta \in I_\alpha - SP_\alpha$.

補題3. (1) M^3を向きづけ可能な閉多様体($\partial M \neq \phi$ でも $\partial M \cong S^2$ なら良い), α をM^3内の単純閉曲線とする。すると

$Im(H_1(\partial U(\alpha, M): Z) \xrightarrow{i_*} H_1(M - \mathring{U}(\alpha, M); Z))$ は無限群である。従って特に $\langle\alpha\rangle$ が $H_1(M: Z)$で有限位数($\langle\alpha\rangle = 0$ も含む)をもてば $\langle m_\alpha \rangle$ が $H_1(M - \mathring{U}(\alpha, M): Z)$で無限位数をもつ(ここで m_α は $\partial U(\alpha, M)$ の meridian curve).

(2) M^3を向きづけ可能なコンパクト多様体とする。M^3内の単純閉曲線αは$\langle\alpha\rangle = 0$ in $H_1(M: Z)$ とする。F_1, F_2 をαによって bound される non-singular orientable surfaces とし $\partial U(\alpha, M) \cap F_i = C_i$ $(i=1,2)$ とする。($\partial U(\alpha, M)$ を十分小さく取って $\partial U(\alpha, M) \cap F_i \subset$ boundary collar of F_i とすれば C_iは$\partial U(\alpha, M)$ 上の単純閉曲線としてよい). このとき $\langle m_\alpha \rangle$ が $H_1(M - \mathring{U}(\alpha);$

$\mathbb{Z}$) で無限位数をもてば $\partial U(\alpha, M)$ 上で $C_1 \approx C_2$ である。

略証(1). $\mathbb{Q}$ を有理数体とする。$(M-\mathrm{Int}\,U(\alpha, M), \partial U(\alpha, M))$ の $\mathbb{Q}$ 係数ホモロジー完全系列を考えると，もし $\mathrm{Im}\, i_*$ が有限群(従って $\mathbb{Q}$ 係数で $\mathrm{Im}\, i_* = 0$) なら $H_1(\partial U(\alpha, M); \mathbb{Q}) = 0$ が出て $\partial U(\alpha, M) \cong S^1 \times S^1$ に矛盾.

(2). $\langle C_1 \rangle = \langle C_2 \rangle$ in $H_1(\partial U(\alpha, M); \mathbb{Z})$ を示せばよい。$C_i /\!/ \alpha$ in $U(\alpha, M)$ だから $H_1(\partial U(\alpha, M); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \{\langle m_\alpha \rangle\} \oplus \{\langle C_i \rangle\}$ そこで $\langle C_2 \rangle = \langle C_1 \rangle + p\langle m_\alpha \rangle$ $(p \in \mathbb{Z})$ とかける。もし $p \neq 0$ なら条件より $H_1(M-\mathrm{Int}\,U(\alpha, M); \mathbb{Z})$ で $i_*\langle C_2 \rangle \neq 0$. これは矛盾. $\therefore p = 0$. ┘

$V \cong \natural^g (S^1 \times B^2)$ を(種数 g の)ハンドル体とする。$\pi_1(V)$ の standard representation curves を研究するときは SP_α の定義の中の $\langle \alpha \rangle = 0$ in $H_1(V; \mathbb{Z})$ という条件は強すぎる。V は常に $\mathbb{R}^3$ に埋め込むことが出来るから，その事を使って singular parallel の定義を次の様にかえる。"埋め込み $V \subset \mathbb{R}^3$ が1つ固定されているとする。この時 V 内の2つの単純閉曲線 α, β が singular parallel ($\alpha \underset{R}{\approx} \beta$) とは $\alpha \underset{w}{\approx} \beta$ であって且つ α によって bound される任意の non-singular orientable surface F_α in $\mathbb{R}^3$ に対し $F_\alpha \cap V$ の component のうち α を含むものを F_α^0 とおき，条件(3)として α と β の間の写像 f が埋め込みでな

いとき $F^{\circ}_\alpha \cap \beta = \phi$ を満足すると定義する" この singular parallel の定義によって α と singular parallel な単純閉曲線の集合を SP^R_α とかく. α が $\pi_1(V)$ の元 ω の R-standard representation curve とは今迄と同様に $[\alpha]=\omega$ で $SP^R_\alpha = P_\alpha$ のときと定義する。 上の F°_α を F_α の α-component とよぶ.

定理3. $V \cong \natural^g (S^1 \times B^2)$ を R^3 内のハンドル体とする。

(1) V 内の単純閉曲線 α によって bound される任意の向きづけ可能な曲面 F_α in R^3 に対し, その α-component が $S^1 \times I$ と位相同型 (up to ambient isotopy of R^3 keeping $\partial F_\alpha = \alpha$ fixed) $\Longrightarrow$ α は $\pi_1(V)$ のある元の R-standard representation curve.

(2) V 内の単純閉曲線 α が $\pi_1(V)$ のある元の R-standard representation curve $\Longrightarrow$ $B^3 \cap \alpha \cong B^1$ なる V 内の任意の 3-ball B^3 に対し $(B^3, B^3 \cap \alpha) \cong (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$.

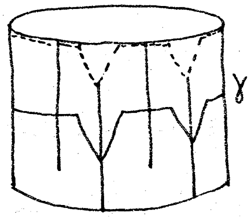
(3) $\alpha \sim 0$ (ホモローグ) in V のとき, α が R-standard $\Longleftrightarrow$ α が standard.

略証 (1) Lemma 2 の後の注と Lemma 3 を使えばよい。

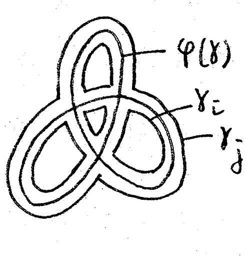
(2) $B^3 \cap \alpha \cong B^1$ だが $(B^3, B^3 \cap \alpha) \cong (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$ とならない B^3 があれば $\partial B^3 \cap \alpha$ を動かさずに $\mathrm{Int}\, B^3 \cap \alpha$ を"平行移動"させて定理2と同様な方法で $\beta \in SP^R_\alpha - P_\alpha$ なる β を作れる。これは α についての条件に矛盾.

(3) 一般に $SP_\alpha^R \subset SP_\alpha$。従って($\Leftarrow$)は明らか。($\Rightarrow$) $\beta\in SP_\alpha$ とし α と β の間の写像を f とする。もし f が embedding でないなら α によって bound される V 内の曲面 F_α に対し $F_\alpha\cap\beta=\phi$. $\tilde{F}_\alpha$ を α によって bound される $\mathbb{R}^3$ 内の任意の曲面とする。補題3によって $U(\alpha,V)\cap\tilde{F}_\alpha = U(\alpha,V)\cap F_\alpha$ だから $\tilde{F}_\alpha$ の α-component $\tilde{F}_\alpha^0$ に対し $\tilde{F}_\alpha^0\cap\beta\neq\phi$ なら $F_\alpha\cap\beta\neq\phi$ となり矛盾. ∴ $\beta\in SP_\alpha^R$ そして仮定より $SP_\alpha^R=P_\alpha$ ∴ $\beta\in P_\alpha$. 故に α は standard //

<u>Splitting</u>.(向きづけ可能な3次元多様体 M^3 内の2つの単純閉曲線 α,β の splitting について).



$\beta\in SP_\alpha^\omega$ で α と β の間の写像を f とする。$S^1\times I$ で図のような点線に平行な線の f による像を γ とする。このとき $\gamma\subset(\alpha\xleftrightarrow{f}\beta)$ とかく。γ は自分自身に交わる曲線。γ の M における正則近傍 $U(\gamma,M)$ は種数 p のハンドル体. ここで $p=\#\{S(f)$ の type I の singularity の成分$\}\times\frac{1}{2}+1$。$\natural^p(S^1\times[-1,1]\times[-1,1])$ を $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^1$ の中の種数 p のハンドル体で $\natural^p(S^1\times[-1,1]\times[-1,1])\cap(\mathbb{R}^2\times\{0\})=\natural^p(S^1\times[-1,1]\times\{0\})$ となっているものとする。$\varphi: U(\gamma,M)\longrightarrow\natural^p(S^1\times[-1,1]\times[-1,1])$ を $\varphi(\gamma)\subset\mathbb{R}^2\times\{0\}$ となるような位相同型写像とする。$\varphi(\gamma)$ を $\mathbb{R}^2\times\{0\}$ の中で図のように $p+1$ 個の交わらない単純閉曲線 $\gamma_1',\dots,\gamma_{p+1}'$ に



分ける。$\varphi^{-1}(\gamma_i')=\gamma_i$ とおく。

定義。$\langle\alpha\rangle=0$ in $H_1(M^3;\mathbb{Z})$ で且つ $\beta\in SP_\alpha'$ とする。次の条件(1),(2)を満足している時 α と β は split していると定義する。(1) α によって bound される任意の向きづけ可能な曲面 F_α 及び β によって bound される任意の向きづけ可能な曲面 F_β に対し $\beta\cap F_\alpha=\phi$ (up to ambient isotopy of M keeping α fixed), $\alpha\cap F_\beta=\phi$ (up to ambient isotopy of M keeping β fixed).
(2) $\beta\in SP_\alpha$ を示す写像及び上の位相同型写像 φ を適当に選んで上のような単純閉曲線 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{p+1}$ を作った時 $SP_{\gamma_i}=P_{\gamma_i}$ $(i=1,2,\cdots,p+1)$ となっている。(従ってこの時各 γ_i は $\langle\gamma_i\rangle=0$ in $H_1(M;\mathbb{Z})$ が前提条件になっている。)

定理4. α は $\langle\alpha\rangle=0$ in $H_1(M;\mathbb{Z})$ なる M 内の単純閉曲線とする。α がある $w\in\pi_1(M^3)$ の standard representation curve なら $B^3\cap\alpha\cong B^1$ となる任意の 3-ball $B^3\subset M^3$ に対し $(B^3,B^3\cap\alpha)\cong(B^2\times B^1,\{0\}\times B^1)$.

略証. $B^3\cap\alpha\cong B^1$ だが $(B^3,B^3\cap\alpha)\cong(B^1\times B^2,B^1\times\{0\})$ とならない 3-ball $B^3\subset M^3$ があったとする。$U(\alpha,M^3)$ を十分小さくとると $T\equiv U(\alpha,M)\cup B^3$ は $S^1\times B^2$ に位相同型. そこで定理3(2)と同様にして T 内の平行移動によって T 内では $\beta\in SP_\alpha-P_\alpha$ なる β が取れる。(実際は $\alpha\nsim 0$ in T だから T を R^3 に移して考え

る）そしてもし $\beta\in P\alpha$ in M^3 なら実は ∂T の longitude curve l_T が $M-\mathring{T}$ で non-singular 2-ball B^2 を bound する事が示され，それに沿って T を surgery して α,β を内部に含む 3-ball B^3_0 が存在し，その中で $\alpha /\!/ \beta$ という事が示される。そしてこれと $(B^3, B^3\cap\alpha)\not\approx(B^1\times B^2, B^1\times\{0\})$ という事から矛盾が出せる。

定理5．M^3 を向きづけ可能な閉多様体とし，α を M^3 に含まれる単純閉曲線とする。このとき α が $1\in\pi_1(M^3)$ の standard representation curve $\Longleftrightarrow$ α が M^3 で non-singular 2-ball を bound する．

略証 $(\Longrightarrow)$．$\alpha\simeq 0$ in M^3 だから α は M^3 で singular 2-ball を bound する。Smythe [S] の方法でその singularity は type II, III のみとしてよい。そして α が standard representation curve という事と定理4を使うと type III の singularity はないと仮定して良い。そこで ${}^\exists$写像 $f: D^2\longrightarrow M^3 \ni f(\partial D^2)=\alpha$，$S(f)$ は type II のみでその成分の個数 $2p$ は最小とする。すると $U(f(D^2), M)$ は種数 p のハンドル体。$V\cong \natural^{p}(S^1\times B^2)$ を R^3 内の標準的なハンドル体とし，$h: U(f(D^2), M^3)\longrightarrow V$ を位相同型写像とする。V の中で平行移動を利用して $\beta'\in SP_{h(\alpha)}-P_{h(\alpha)}$ なる閉曲線を取る。$\beta=h^{-1}(\beta')$ とおくと $\beta\in SP_\alpha$ となるが条件より $\beta\in P_\alpha$。そこで ${}^\exists$埋め込み $g: S^1\times[0,1]\longrightarrow M^3 \ni g(S^1\times\{0\})=\alpha$，$g(S^1\times\{1\})=\beta$，

$S^1\times\{0\}=\partial D^2$ 上で $f=g$. この g を使って $S(f)\neq\phi$ なら矛盾である事を示す。($\Leftarrow$) α が non-singular 2-ball を bound し, $\beta\in SP_\alpha$ とすると Lemma 2 の後の注によって $\alpha /\!/ \beta$ が示せる ⌟

定理 6. M^3 をホモロジー球面とし, α を M^3 内の任意の単純閉曲線とすると, α と split している単純閉曲線で $\alpha \not/\!/ \beta$ となる β が取れる。

略証 F_α を α によって bound される種数最小の non-singular orientable surface とする。$U(F_\alpha, M^3)\equiv T_0$ とすると T_0 は種数 $2p$ のハンドル体、ここで $p=F_\alpha$ の種数。$T=U(T_0,M^3)$ とする。$\overset{2p}{\natural}(S^1\times B^2)$ を R^3 内の種数 $2p$ のハンドル体とし $h: T\longrightarrow \overset{2p}{\natural}(S^1\times B^2)$ を位相同型写像とする。$h(\partial T_0)$ 上に standard longitude curves $l_1\vee l_2\vee\cdots\cdots\vee l_{2p}$ を取り, $U(l_1\vee\cdots\cdots\vee l_{2p}, h(T-\mathrm{Int}\,T_0))=T_1'$, $h^{-1}(T_1')=T_1$ とおく。R^3 の平行移動を利用して $\beta'\in SP_{h(\alpha)}$ であって $h(T_0)\cap T_1'$ を含む 2 次元球面によって (R^3 内で) split している β' を T_1' 内に取り $h^{-1}(\beta')=\beta$ とする。この β が求める閉曲線である事を示す。⌟

系。M^3 は $\pi_1(M^3)\neq\{1\}$ であるようなホモロジー球面とする。
$\Longrightarrow$ standard representation curve をもつ $\pi_1(M^3)$ の元 ω がある。

略証. $\pi_1(M^3)$ はアーベル群でない。そこで $^\exists\eta(\neq 1)\in\pi_1(M^3)$ $\ni$ $\varphi(\eta)=0$ （$\varphi:\pi_1(M^3)\longrightarrow H_1(M^3;\mathbb{Z})$ は Hurewitz 準同型）となる元 η があり，α を η の表現曲線とする。$SP_\alpha=P_\alpha$ なら $\omega=\eta$ とおけばよい。$SP_\alpha \supsetneqq P_\alpha$ のとき定理6より α と split していて $\alpha \,\widetilde{/\!/}\, \beta$ となる閉曲線 β がある。そこで $\gamma\subset(\alpha \xleftrightarrow{f} \beta)$ を取り γ から交わらない単純閉曲線 $\gamma_1,\cdots,\gamma_g$ を取ると定義より $SP_{\gamma_i}=P_{\gamma_i}$ $(i=1,2,\cdots,g)$、そして $[\alpha]\neq 1$ だから $^\exists i \ni [\gamma_i]\neq 1$. そこで $\omega=[\gamma_i]$ とおけばよい。┘

定理7. M^3 をホモロジー球面とする。$\omega\in\pi_1(M^3)$ が *standard representation curve* をもてば *ambient isotopy* を除いて一意である。

略証. α,β を ω の *standard representation curves* としたとき $\alpha\approx\beta$ を示せばよい。$\alpha\simeq\beta$ だから $^\exists$写像 $f:S^1\times[0,1]\longrightarrow M^3 \ni f(S^1\times\{0\})=\alpha$, $f(S^1\times\{1\})=\beta$ 且つ $S(f)$ は *type* I, II, III のみをもつ。そして α,β が *standard representation curves* という事と定理4から f は *type* III の *singularity* をもたないとしてよい事が示せる。次に *piping technique* 及び *ambient isotopy* によって $^\exists\beta_1\approx\beta$, $^\exists$写像 $g:S^1\times[0,1]\longrightarrow M^3 \ni g(S^1\times\{0\})=\alpha$ $g(S^1\times\{1\})=\beta_1$ 且つ $S(g)$ は $S^1\times\{1\}$ に足をもつ *type* II の *singularity* のみ. 定理6より β_1 と split していて $\gamma\in SP_{\beta_1}$ となる γ が

ある。$SP_{\beta_1}=P_{\beta_1}$だから$^\exists$埋め込み $h: S^1\times[1,2]\longrightarrow M^3 \ni h(S^1\times\{1\})=\beta_1$, $h(S^1\times\{2\})=\gamma$ 且つ $h=g$ on $S^1\times\{1\}$. この h を使って実は $S(g)=\phi$ である事を示す. 従って $\alpha /\!/ \beta_1\approx\beta$. $\therefore \alpha\approx\beta$ 』

References

[H-Z]. J.F.P. Hudson and E.C. Zeeman; 'On combinatorial isotopy' Publ. I.H.E.S. 19 (1964) 69-94.

[R] D. Rolfsen: 'Isotopy of links in codimension two' J. the Indian Math. Soc. 36 (1972) 263-278.

[S] N. Smythe: 'Handlebodies in 3-manifolds' Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970) 534-538.