数理解析研究所講究録
第 369 巻 1979 年 201-207

正則複体について.

東大・教養　　加藤 十吉

定義. 局所有限な stratification $\mathring{K}=\{\mathring{A}\}$ on X (可分な距離空間) が閉胞体的 n-複体であるとは, 各 stratum $\mathring{A}$ の閉包 $A=Cl_X(\mathring{A})$ が位相的に(閉)球体であるときをいう。

このとき, $K=\{A \mid \mathring{A}\in\mathring{K}\}$ を n-複体(閉胞体的 n-複体)という。$X=|K|(=\bigcup_{A\in K}A)$ と表わされる。

注意. 通常の凸胞体的複体と異なる点は K の2つの胞体が1つ以上の共通面をもつこともありうることである。しかしながら K の導複体 K' は通常の単体的複体と同型になる。したがって, 記法等は通常のものを援用しても不都合はない。

<正則複体の定義> 正則 n-複体は次の様に帰納的に定義される。symbol $x=(x_1,\cdots,x_n)$ の正則 n-複体 K とは,

$n=0$ のとき, $K=$ 1点, $x=\emptyset$

$n=1$ のとき, $|K|$ は円周か直線に同相で, $x=(x_1)$ の x_1

はKの頂点の個数である。(例. n角形の周は正則1-複体で $\kappa=(n)$である。)

$m \leqq n-1$ $(n \geqq 2)$なるmに対し，正則m-複体が定義されたとして，symbol $\kappa(K)$の正則n-複体を，連結な複体Kで，

(i). Kはπ_2-正則である；Kの導複体K'において，Kの各$(n-k)$-胞体のlink $lk(A, K' rel A)$が1-連結$(k \geqq 3)$，あるいは，S^{k-1} $(k \leqq 2)$に同相であるときをいう。

(ii). Kの各n-胞体Aは正則n-胞体，symbol $\kappa(A)=(\kappa_1, \cdots, \kappa_{n-1})$である。すなわち，Aの境界$\partial A$をおゝうKの部分複体$K(\partial A)$がsymbol $\kappa'=(\kappa_1, \cdots, \kappa_{n-1})$の正則$(n-1)$-複体である。

(iii) Kの各$(n-2)$-胞体Cに対し，Cを含むKのn-胞体の個数は丁度κ_n である。

なる3条件(i)〜(iii)をみたすものと定義する。

例. 周知のように，symbol (p, q)の正則2-複体Kで，$|K| \cong S^2$なるものは，p角形が頂点のまわりにq個集まるS^2の分割であるが，これは，Platon多面体の表面の分割に限られる。(但し，同型を除く)。とくに，非順序対$\{p, q\}$はこの場合$\{3, 3\}$(正4面体)，$\{3, 4\}$(正8面体，正6面体)，$\{3, 5\}$(正20面体，正12面体)に限られる。

この例における双対性((p, q)型が存在すれば，(q, p)型も存在する)が一般に成立する。

補題1（双対定理）． symbol $\kappa=(\kappa_1,\cdots,\kappa_n)$ の正則n-複体Kに対し，その導複体K′における双対複体K^*も（星形複体として）正則であり，symbol $\kappa^*=(\kappa_n,\cdots,\kappa_1)$ をもつ。

正則n-複体のsymbolsを決定する為にCoxeterのhoneycombsを想起する。すなわち，n次元spherical，euclideanあるいはhyperbolic space（E^n，S^nあるいはH^n）の最も強い意味（合同類）での正則胞体からなる正則分割の分類は次の表のsymbolsで完全になされる。（κとκ^*は同一視されている。）

(1)、 $n=1$ ： $\kappa=(\kappa_1)$ ， $\kappa_1 \geqq 3$.

(2). $n=2$ ：

κ	$\kappa(S^2_0)$	$\kappa(S^2_1)$	$\kappa(S^2_2)$	$\kappa(E^2_0)$	$\kappa(E^2_1)$	$\kappa(H^2_{3,k})$	$\kappa(H^2_{4,l})$	$\kappa(H^2_{p,q})$
κ_1	3	3	3	4	3	3	4	$p \geqq 5$
κ_2	3	4	5	4	6	$k \geqq 7$	$l \geqq 6$	$q \geqq 5$

(3). $n=3$ ：

<table>
<tr><td>κ</td><td>$\kappa(S^3_0)$</td><td colspan="2">$\kappa(S^3_1)$</td><td colspan="2">$\kappa(S^3_2)$</td><td>$\kappa(S^3_3)$</td><td>$\kappa(E^3_0)$</td><td>$\kappa(H^3_0)$</td><td colspan="2">$\kappa(H^3_1)$</td><td>$\kappa(H^3_2)$</td></tr>
<tr><td>κ_1</td><td>3</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">3</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td colspan="2">4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>κ_2</td><td>3</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">3</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td colspan="2">3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>κ_3</td><td>3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">5</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td colspan="2">5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>各3次元面</td><td>正4面体</td><td>正4面体</td><td>正6面体</td><td>正4面体</td><td>正12面体</td><td>正8面体</td><td>正6面体</td><td>正20面体</td><td>正6面体</td><td>正12面体</td><td>正12面体</td></tr>
<tr><td>面数</td><td>5</td><td>16</td><td>8</td><td>600</td><td>120</td><td>24</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr>
</table>

(4). $n = 4$;

<table>
<tr><td>κ</td><td>$\kappa(S_0^4)$</td><td colspan="2">$\kappa(S_1^4)$</td><td>$\kappa(E_0^4)$</td><td colspan="2">$\kappa(H_0^4)$</td><td colspan="2">$\kappa(H_1^4)$</td><td>$\kappa(H_2^4)$</td></tr>
<tr><td>κ_1</td><td>3</td><td colspan="2">3</td><td>4</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>κ_2</td><td>3</td><td colspan="2">3</td><td>3</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>κ_3</td><td>3</td><td colspan="2">3</td><td>3</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>κ_4</td><td>3</td><td colspan="2">4</td><td>4</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>各4次面</td><td>正5面体</td><td>正5面体</td><td>正8面体</td><td>正8面体</td><td>正5面体</td><td>正120面体</td><td>正8面体</td><td>正120面体</td><td>正120面体</td></tr>
<tr><td>面数</td><td>6</td><td>32</td><td>10</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr>
</table>

(5) $n \geqq 5$:
$$\kappa(S_0^n) = (3, \cdots, 3),$$
$$\kappa(S_1^n) = (3, \cdots, 3, 4),$$
$$\kappa(E^n) = (4, 3, \cdots, 3, 4).$$

(Coxeter, [1], [2] 参照)。

(注意). $n=2$ の場合が最も豊富であり，$n=3$ のときがそれに続く。Coxeter の honeycombs は後に示されるように，単連結(単純)正則 n-複体の標準形となる。したがって，単連結でない正則複体は Coxeter の標準形をある合同変換群 $(\cong \pi_1(K))$ でわってえられる。この観点から，3，4 次元の正則複体は対称性をもった多様体として興味深い。しかし，未だ充分な研究はなされていない。

補題2. symbol $\varkappa$ あるいは $\varkappa^*$ が上記の表に現われる正則 n-複体Kは spherical, euclidean あるいは hyperbolic な凸胞体のなす複体$\mathbb{K}$に同型となり,

(i) $\mathbb{K}$の各 n-胞体は Coxeter's honeycomb の n-胞体と合同,

(ii) $\mathbb{K}$の universal covering $\hat{\mathbb{K}}$は Coxeter's honeycomb に合同同型となる。とくに, $\mathbb{K}$は完備定曲率空間である。

この補題はKの各 n-胞体に(i)をみたすように geometric structure を与えて, 各 $(n-2)$-胞体のまわりの角度が full angle (2π) であることを見て, developping map の構成により示される。このとき, π_2-正則の条件が使用される。

補題3. symbol $\varkappa$ の正則 n-複体Kが存在し, $\varkappa_i \geqq 3$ であれば, それは Coxeter's symbol (上表の $\varkappa$ あるいは $\varkappa^*$) に限られる。

この補題は次元 n に関する帰納法で示される。とくに, Kの双対複体 K^* も各双対胞体(星形胞体)が胞体で, 我々の意味での胞体的複体であることが示される。

$\varkappa_i = 2$ なるときには, Kは球面の分割に限られ, 更に, m 次元と $n-m-1$ 次元の球面の正則分割の一種の join 分割と表わされる。この観点から, $\varkappa_i \geqq 3$ $(\forall i)$ なる symbol を単純という。以上をまとめると次の定理となる。

定理.1. 単純な symbol $\varkappa$ をもつ正則 n-複体 K の universal covering $\hat{K}$ は Coxeter's honeycombs の1つに同型となる。とくに，K がコンパクト，単連結ならば，$|K|$ は n-球面に同相である。（正則複体に対する Poincaré 予想の成立）。

2次元コンパクト Riemann 面（可附向閉曲面）は
種数 0 のとき，spherical structure をもち，
種数 1 のとき，euclidean structure をもち，
種数 $\geqq 2$ のとき，hyperbolic structure をもつ。
種数 0 の正則分割は，Platon 多面体の表面に限られる。
種数 1 の正則分割は，(4, 4)，(3, 6)，(6, 3) 型に限られる。これらのことは良く知られている。
これに対し，我々は hyperbolic case について次を得る。

定理2. 種数 $\geqq 2$ のすべての閉曲面の正則分割として実現される symbols $\{p, q\}$ (unordered pairs) は，
$\{3, 7\}$，$\{3, 8\}$，$\{3, 9\}$，$\{3, 10\}$，$\{4, 5\}$，$\{4, 6\}$
であり，これらに限られる。

この定理の証明は，種数2の曲面に対し同じことを示し，その d-fold covering の種数が $d+1$ となることで一般種数の正

則分割へ拡張して示される。

Lannér [3] は鏡映群の構造の観点から，正則 ω-complex を分類している。例えば，3角群 T(2, 3, 7) の proper torsion free normal subgroup Φ に対し，基本群が Φ となる閉曲面の正則 ω-分割がえられる。逆に，正則 ω-surface に対し，かゝる部分群が対応する。(3, 7) に対応する我々の種数 2 の正則分割の基本群は，universal covering の合同変換群として T(2, 3, 7) のある部分群 Φ_2 ($\cong \pi_1$(種数2の閉曲面)) となるが絶対に正規部分群でない。よく知られているように，T(2, 3, 7) の最大正規部分群は種数 3 の閉曲面に対応するからである。正則 ω-複体は代数的に (Coxeter 群とその正規部分群達によって) 決定されるが，我々の正則複体についてはその点について未知である。

References.

[1] Coxeter, Regular honeycombs in elliptic space, Proc. London Math. Soc. (3), 4 (1954), 471-509.

[2] Coxeter, Regular honeycombs in hyperbolic space, Proc. Int. Cong. of Math., Amsterdam, 1954, vol III, 155-169.

[3] F. Lannér, *On complexes with transitive groups of automorphisms.* Medd. Lunds Univ. Math. Sem. 11 (1950), 1-71.