

Buchsbaum 局所環 について

日大 文理 後藤四郎

序. まず例から入る。 $R = k[[x, y, z, w]]$ は体 k の上の中級数環とし $A = R/(x, y) \cap (z, w)$ とおく。 $\{a, b\}$ は A の s.o.p. (system of parameters) とし $\mathfrak{a} = (a, b)$ としよう。自然な完全系列 $0 \rightarrow A \rightarrow R/(x, y) \oplus R/(z, w) \rightarrow R = R/(x, y) + (z, w) \rightarrow 0$ に $\otimes_A A/\mathfrak{a}$ を適用すれば, 完全系列 $0 \rightarrow R^{(2)} \rightarrow A/\mathfrak{a} \rightarrow R/(x, y) + \mathfrak{a} \oplus R/(z, w) + \mathfrak{a} \rightarrow R \rightarrow 0$ をうる。よって $\ell_A(A/\mathfrak{a}) = \ell_R(R/(x, y) + \mathfrak{a}) + \ell_R(R/(z, w) + \mathfrak{a}) + 1$. 一方 \mathfrak{a} に関する重複度を $e_A(\mathfrak{a})$ で表すことにすれば, $e_A(\mathfrak{a}) = e_{R/(x, y)}(\mathfrak{a}) + e_{R/(z, w)}(\mathfrak{a})$ である。故に

$$\ell_A(A/\mathfrak{a}) - e_A(\mathfrak{a}) = 1$$

が, s.o.p. $\{a, b\}$ のとり方に無関係に成立する。ゆえに, 勿論 A は Cohen-Macaulay ではない。この例のように, 差 $\ell_A(A/\mathfrak{a}) - e_A(\mathfrak{a})$ が parameter ideal \mathfrak{a} のとり方に無関係な, A の不変量 (これを $I(A)$ とかく) となる時, 局所環 A は Buchsbaum であるといふ。 A が C-M であることは, A は Buchsbaum であって $I(A) = 0$ なる事とは

同値である。この意味で "Buchsbaum" は "Cohen-Macaulay" の拡張概念であって、^(その) 出所は次の問題にある:

問 (D.A. Buchsbaum [1], 1965). 局所環 A の parameter ideal \mathfrak{q} について $e_A(\mathfrak{q}) - e_A(\mathfrak{q}) = \dim A - \text{depth} A$ が成立するか?

この主張は、一般には全然成立しない。W. Vogel [7] は 1971 年に、反例を与えると共に、この問題が肯定的に解決される様な環を研究する事を提案している。その後 1973 年前後より、Vogel とその弟子にあたると思われる人々によって、上記の意味での Buchsbaum rings についての結果が、ぼっぼっ出はじめた様である。

一方、Homology 代数の手法による局所環の分類を示す次の図式

$$\text{regular} \Rightarrow \text{hypersurfaces} \Rightarrow \text{G-I} \Rightarrow \text{Gorenstein} \Rightarrow \text{G-M}$$

は、既におなじみの事と思いますが、Buchsbaum 局所環は、非 G-M 環の理論の一部をなすものとして、上の図の右端に付け加えるべき一つの有望な候補者であるとも考えられる。今も、こゝ海のものとも山のものともつかぬ代物ではありますが、以下 Buchsbaum rings について二・三の結果を二報告したいと考えます。

以下 (A, \mathfrak{m}) は Noether 局所環 とし、有限生成 A -加

群 $M (\neq (0))$ について,

定義 [4]. M が Buchsbaum であるとは, M が s.o.p. で生成された A の ideal を \mathcal{O} とすれば, 差

$$e_A(M/\mathcal{O}M) - e_M(\mathcal{O})$$

が M の不変量 $I(M)$ となることをいふ。(但し $e_M(\mathcal{O})$ は \mathcal{O} について M の重複度を表す。)

§1. 基本的な性質.

定理 1.1 (四) M は有限生成 A -加群 とし $d = \dim_A M > 0$ とすれば, 次の条件は同値である。

- ① M は Buchsbaum である。
- ② $\exists N \subset A$ の s.o.p. a_1, \dots, a_d について, $(a_1, \dots, a_R)M : a_{R+1} = (a_1, \dots, a_R)M : m$ ($0 \leq R < d$) が成立する。(すなわち, $\exists N \subset A$ の s.o.p. は a weak M-sequence である。)
- ③ $\exists N \subset A$ の s.o.p. a_1, \dots, a_d について, $(a_1, \dots, a_{d-1})M : a_d = (a_1, \dots, a_{d-1})M : a_d^2$ が成立する。
- ④ $\exists N \subset A$ の s.o.p. について $m \cup (a_1, \dots, a_R)M \subset (a_1, \dots, a_R)M$ ($0 \leq R < d$) が成立する。

ここで, $\cup (a_1, \dots, a_R)M$ の定義も $\exists N$ なくしてはならない。 N を M の部分加群 ($N \neq M$) とし $\text{Assh}_A(M/N) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Supp}_A(M/N) \mid \dim A_{\mathfrak{p}} = \dim_A M/N \}$ とおく。 N が M 内で a 準素分解を, $N =$

$\bigcup_{\mathfrak{P} \in \text{Ass}_A(M/N)} N(\mathfrak{P})$ とすれば, $\cup(N)$ は, $\cup(N) = \bigcup_{\mathfrak{P} \in \text{Ass}_A(M/N)} N(\mathfrak{P})$ に
 より定まられる。($\mathfrak{P} \in \text{Ass}_A(M/N)$ は \mathbb{N} で, $\text{Supp}_A(M/N)$ 内で極
 小である \mathfrak{a} で, この定義は \mathfrak{a} の素分解 $N = \bigcap_{\mathfrak{P} \in \text{Ass}_A(M/N)} N(\mathfrak{P})$
 のとり方はよらな。)

注意 1.2. "a weak M-sequence" とは概念は順序に依
 る。 $A = \mathbb{R}[x, y, z] / (x) \cap (x^2, y)$ とすれば, $\{z, y\}$ は弱
 A-列であるが, $\{y, z\}$ はそうではない。又, $\mathcal{R}_A(A(y, z^n)) = 2n$,
 $\mathcal{O}((y, z^n)) = n$. 従って A は Buchsbaum ではない。このことよ
 り, (1.7) の条件 ② にはおいて, " \mathbb{N} での " とは仮定がはず
 せなはとがわかる。

問題 1.3 "それともかわらす", \rightarrow の s.o.p. \mathfrak{a} なるま
 じで, Buchsbaum 加群を特徴付けることが非常に期待さ
 れる。例えは, 「ある s.o.p. $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_d$ が存在して \mathbb{N} での
 $\pi \in \mathcal{O}_{\mathfrak{a}_i}$ と \mathbb{N} での $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_d > 0$ によって $\{a_{\frac{\mathfrak{m}_1}{\pi(1)}}, \dots, a_{\frac{\mathfrak{m}_d}{\pi(d)}}\}$
 が弱 M-列であって その上若干の条件の下に M は
 Buchsbaum である」 という形の補題が欲しい。但し, 若干
の条件は不可欠である。 例をあげておく。

例 1.4 $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d, Y_1, \dots, Y_d] / [(x_1, \dots, x_d) \cap (Y_1, \dots, Y_d) \cap \mathfrak{a}] + (F_i^n)$
 とおく。但し $\mathfrak{a} = (x_1^2, x_2, \dots, x_d, Y_1^2, Y_2, \dots, Y_d)$ ($n, d \geq 3$) と
 $F_i = x_i + Y_i$ ($1 \leq i \leq d$) とする。この時, A は Buchsbaum
 ではないにもかかわらず, F_2^n, \dots, F_d^n は (従って \mathfrak{a} の並列)

かえり) 弱 A -列をなす。もちろん $\dim A = d-1$.

L は $d < \infty$ の間 (1.1) の系井に示される。

系 1.5(四) U は M の部分加群で $uU = (0)$ なる $u \in A$ とする。

M/U が C - M ならば, M は Buchsbaum である。すなわち $\dim_A M > 0$.

なら, $I(M) = \dim_{A_M} U$ となる。

系 1.6 ① M が Buchsbaum である $\iff \hat{M}$ が Buchsbaum

である。このとき $I_{\hat{A}}(\hat{M}) = I_A(M)$ (但し $\hat{}$ は完備化を表す。)

② $A \xrightarrow{\phi} B$ は局所環の有限射とする。 N を有限生成 B -加群とすれば,

N が Buchsbaum B -加群 $\implies \phi N$ は

Buchsbaum A -加群である。 ϕ が onto であれば逆も正

しい。

注意 1.7 (1.6) の ② の逆は ϕ が全射でなくとも正しい。

例えは, A は Buchsbaum とし $\phi: B = A \times A$ (イデリ化) とする。もし $A \neq C$ - M かつ $\dim A = 1$ ならば, B は Buchsbaum ring ではない。しかし, A -加群としては, B はやはり Buchsbaum である。

系 1.8. 局所環の拡大 $A \subset B$ が integral ならば $\dim B = \dim A$

である。 B : Buchsbaum $\iff A$: Buchsbaum が

正しい。従って, G は Buchsbaum 局所環 A の自己同型

のなす有限群とするとき, もし $|G| \in \mathfrak{m}(A)$ ならば A^G

も Buchsbaum となる。

Buchsbaum 加群の local cohomology は vector space である。
 $\neq 0$ は $\neq 1$ か < 0 .

定理 1.9 (c.f. [7]) M は Buchsbaum で $d = \dim_A M > 0$ とする。
 $\neq a$ とき, ① $M/\cup(0)$ は Buchsbaum である。又 $\neq a \in M$ st.
 $\dim_A M/aM = d-1$ ならば, M/aM は Buchsbaum である。

② $\text{Ass}_A M = \text{Ass}_A M \setminus \{m\}$.

③ $\dim H_m^i(M) = 0$ ($\forall i \neq d$) かつ $\cup(0) = H_m^0(M) = [0 : m]_M$.

④ $I(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \dim_A H_m^i(M)$.

⑤ $a \in M$ と $\dim_A M/aM = d-1$ ならば, 完全系列

$$0 \rightarrow H_m^{d-1}(M) \rightarrow H_m^{d-1}(M/aM) \rightarrow H_m^d(M) \xrightarrow{a} H_m^d(M) \rightarrow 0$$

が存在し ε の上 $H_m^i(M/aM) = H_m^i(M) \oplus H_m^{i+1}(M)$ ($0 \leq i < d-1$)
 となつてゐる。

系 1.10 A は Buchsbaum で $A \neq C-M$ とする。 $\neq a$
 とき, $A[[X]]$ は決して Buchsbaum ではない。(従つて,
 $\exists a : A$ -regular st. A/aA は Buchsbaum であるとき, A は必ず
 \neq Buchsbaum ではない。)

系 1.11 M は (1.9) と同じとすれば" 次が正しい。"

① $M_{\mathfrak{p}}$ は $C-M A_{\mathfrak{p}}$ -加群である, $\forall \mathfrak{p} \in \text{Supp}_A(M) \setminus \{m\}$.

② $\dim A_{\mathfrak{p}} + \dim_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = d$, $\forall \mathfrak{p} \in \text{Supp}_A(M)$.

定理 1.12 M は (1.9) と同じと仮定し $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$ は M の \rightarrow の
 parameter ideal とせよ。今 $e_i = \sum_{j=1}^{d-i} \binom{d-i-1}{j-1} \dim_{A_{\mathfrak{f}_i}} H_m^j(M)$

($\forall i < d$), $e_d = \dim_{A_m} H_m^0(M)$ とおくと,

$$\textcircled{1} \text{ ([10]) } \ell_A(M/\mathfrak{q}_R M) = e_M(\mathfrak{q}_R) \binom{d+R}{R} + \sum_{i=1}^d e_i \binom{d+R-i}{d-i} \quad (\forall R \geq 0).$$

$$\textcircled{2} H(M, \lambda) = \sum_{R=0}^{\infty} \ell_A(M/\mathfrak{q}_R M) \lambda^R \quad (\in \mathbb{Z}[[\lambda]]) \text{ と定めれば,}$$

$$H(M, \lambda) = \frac{1}{(1-\lambda)^d} \left\{ \ell_A(M/\mathfrak{q}_0 M) + \sum_{i=1}^d (-1)^i \left[\sum_{j=0}^{d-i} \binom{d}{i+1} \dim_{A_m} H_m^j(M) \right] \lambda^i \right\}$$

この結果を用いれば, D.A. Buchsbaum の 問題 について, 完全な答え がえられる。
(はいのう)

系 1.13 ([10]). $\dim A = d > \text{depth} A = 0$ とする。このとき,
 \mathfrak{q} は A の parameter ideal の \mathfrak{q} について $\ell_A(A/\mathfrak{q}) - e_A(\mathfrak{q}) = d$ が成立する
 $\iff A$ は Buchsbaum であること $\iff \ell^i = \dim_{A_m} H_m^i(A) \quad (i \neq d)$
 とおくと, 次の 1) から 4) が成立する。

$$\textcircled{1} \ell^0 = d, \quad \ell^i = 0 \quad (i \neq 0)$$

$$\textcircled{2} d \geq 2 \text{ のとき, } \ell^0 + \ell^{d-1} = d, \quad \ell^i = 0 \quad (i \neq 0, d-1).$$

$$\textcircled{3} d \geq 3 \text{ のとき, } \ell^0 = \ell^{d-2} = 1, \quad \ell^i = 0 \quad (i \neq 0, d-2).$$

$$\textcircled{4} d \geq 2 \text{ のとき, } \ell^0 = \ell^1 = 1, \quad \ell^i = 0 \quad (i \neq 0, 1).$$

§2. 判定条件.

Cohen-Macaulay rings の場合と同様に, Buchsbaum rings は Koszul homology のふるまひにより特徴付けられる。すなわち,

定理 2.1 (Schenzel [11], Suzuki [16]).

$\dim_A M = d > 0$ ならば"次の条件は同値である。

① M は Buchsbaum である。

② \mathfrak{A} の S.O.P. $a_1, \dots, a_d \in \mathfrak{A}$ ならば $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^2 \cap \dots \cap \mathfrak{A}^d M = (0)$.

の逆ならば、 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2$ とき、 $1 \leq \forall i \leq d$ と $1 \leq \forall p \leq r$ ならば $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^2 \cap \dots \cap \mathfrak{A}^p M = (0)$ である。 $\dim_{A/M} H_p(a_1, \dots, a_r; M) = \sum_{i=0}^{r-p} \binom{r}{p+i} \dim_{A/M} H_i^u(M)$ である。

先にも (1.9) で述べた様に、 M が Buchsbaum であるならば

$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^i M = (0)$ ($\forall i \neq \dim_A M$) である。しかし逆は正しくない。

例としては、 $A = \mathbb{R} \llbracket x, y, z, w \rrbracket / (x, y) \cap (z, w) \cap (x^2, y, z^2, w)$ と

おくと $H_i^u(A) = A/M$ ($i=0, 1$) であるが、 A は Buchsbaum である。

この間の事情を説明する結果として、

定理 2.2 (Stückrad-Vogel [15], Stückrad [13]). $d =$

$\dim_A M$ とする。 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2$ とき、

① $\text{Ext}_A^i(A/M, M) \xrightarrow{\varphi_M^i} H_i^u(M) = \varinjlim \text{Ext}_A^i(A/M^k, M)$ が \mathfrak{A} の i 番

の \mathfrak{A} による \mathfrak{A} による全射であるならば、 M は Buchsbaum である。

② A が regular であるならば、逆も正しくなる。

注意 2.3 ① (2.2) の ② は A が regular のときは、

必ずしも正しくない。 $A = \mathbb{R} \llbracket x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \rrbracket / (F)$

($m \geq 3$) とせよ。但し $F = x_1^2 + \dots + x_m^2 + y_1^2 + \dots + y_m^2$ とする。

このとき $M = \mathbb{R} \llbracket x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \rrbracket / \left[(x_1, \dots, x_m) \cap (y_1, \dots, y_m) \right] + (F)$

となるが、 M は Buchsbaum であるが、 $\text{Ext}_A^1(A/M, M) \xrightarrow{\varphi_M^1} H_1^u(M)$

は全射ではない。

② (2.2) の ① の条件は $0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \dots \rightarrow E^i \rightarrow \dots$
 が M の minimal injective resolution とした時, $I^\bullet = H_m^0(E^\bullet)$
 の cohomology が $[0: M]_{E^\bullet}$ の元で代表されることを主張
 している。すなわち, $H_m^i(M)$ が vector space になること
 こそ, そのなり方が問題であるといおうか!

系 2.3 ([5]). $\text{depth}_A M = t < \dim_A M = d$ であって
 かつ $H_m^i(M) = (0)$ ($i \neq t, d$) と仮定せよ。このとき,
 M が Buchsbaum $\iff \forall i: H_m^i(M) = (0)$.

従って $\dim A = 2$ で A が, 例えば "整域" であるならば, A が Buchsbaum であるためには $H_m^1(A) = (0)$ なる事が必要十分である。

例 2.4 ① $A = k[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m] / (x_i) \cap (y_i)$ ($m \geq 2$)
 とすれば, $0 \rightarrow A \rightarrow k[x, y] / (x) \oplus k[x, y] / (y) \rightarrow k \rightarrow 0$
 より, $H_m^i(A) = (0)$ ($\forall i \neq 1, m$) かつ $H_m^1(A) \subseteq k$ となる。故
 り A は Buchsbaum で $I(A) = m - 1$.

② $A = k[s^4, s^3t, st^3, t^4] \subset k[s, t]$ とすれば,
 $0 \rightarrow A \rightarrow k[s^i t^{4-i} \mid 0 \leq i \leq 4] \rightarrow k \rightarrow 0$ (完全).
 よって $H_m^1(A) \subseteq k$ 故に A は Buchsbaum で
 $I(A) = 1$. A が Cohen-Macaulay ではないことは, F.S.
 Macaulay 自身が "逆" N で示している所である。(c.f. p.98, [8]).

系 2.5 (Vogel [12]) $\text{depth}_A M > 0$ ならば次の条件は同
 値である。

① M は Buchsbaum である。

② $\exists a \in \mathfrak{m}^2$ s.t. a は M -正則だから M/aM は Buchsbaum.

系 1.10 でも示した様子は, $a \in \mathfrak{m}^2$ にとれば a では, ② \Rightarrow

① は必ずしも成り立たない。

次に次数環も考えよう。 $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ は $R_0 = \mathbb{R}$ (体) である様な Noether 次数環とし $\mathfrak{m} = R_+$ とおく。

定理 2.6 (Watanabe - Goto [19]). M は有限生成次数付き R -加群で $d = \dim_R M \geq 2$ とせよ。 \Leftrightarrow ① とき, $\exists \{t_i\}_{0 \leq i < d}$ s.t. $t_{i+1} \leq t_i + 1$ ($1 \leq i < d$) かつ $[\underline{H}_m^i(M)]_n = 0$ (②) for $\forall n \neq t_i, 0 \leq i < d \Rightarrow M_m$ は Buchsbaum である。

② の事実とは, $\text{Ext}_R^i(R_m, M) \rightarrow \underline{H}_m^i(M)$ が $\forall n \neq t_i$ ($i \neq d$) において全射であることを示して, (2.2) より導かれる。

系 2.7 ([19]). ある $t \in \mathbb{Z}$ があって $[\underline{H}_m^i(R)]_n = 0$ (③) ($\forall n \neq t, \forall i \neq d$) $\Leftrightarrow R_m$ は Buchsbaum である。

注意 2.8 (2.6) における $\{t_i\}_{0 \leq i < d}$ に関する条件のうち " $t_{i+1} \leq t_i + 1$ " は best possible である。例えは,

$R = \mathbb{R}[x, y, z, w] / (x, y)_0, (z, w)_0, (x^2y, z^2, w)$
 とすると $\underline{H}_m^0(R) = \mathbb{R}(-2), \underline{H}_m^1(R) = \mathbb{R}$. かつ $\forall n$
 $R_m \neq$ Buchsbaum である。

系 2.8 ([9]). $R = k[R_+]$ かつ $\forall \mathfrak{q} \in \text{Ass} R$ について $\dim R/\mathfrak{q} = d$ であるを仮定すれば, $X = \text{Proj}(R)$ が $G-M$ である $\iff \exists N \gg 0$ s.t. $R^{(N)}$ は Buchsbaum である (cf. $[R^{(N)}]_+$).

例 2.9 $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ かつ R と同様, $S_0 = k$ なる Noether 次数環とする. R, S は共に $G-M$ で $\dim R = r \geq 2$, $\dim S = s \geq 2$ と仮定しよう. $m = R_+$, $n = S_+$ とし $T = R \# S$ (Segre 積), $M = T_+$ とおく. すると $\dim T = r + s - 1$ であり, $r \geq 2$ と

$$H_M^p(T) = \begin{cases} (0) & (p=0, 1) \\ [R \# H_m^p(S)] \oplus [H_m^p(R) \# S] & (2 \leq p < r+s-1) \end{cases}$$

となる (cf. [6]). $r=2$ の面倒真いので, $r=s$ とし, $r \geq 3$ と,

T_M が Buchsbaum である $\iff R \# H_m^r(S), H_m^r(R) \# S$ は T_M -vector spaces である

となる (cf. (2.3)). 例えは, $R = \mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^3 + Y^3 + Z^3)$, $S = \mathbb{C}[V, W]$ とすれば $R \# S$ は 正規であり, $r=3$ $G-M$ ではない (環として有名である) が, R は Buchsbaum ではない.

系 2.10 ([1]). $\dim R/\mathfrak{q} = \dim R$ かつ $\forall \mathfrak{a}$ かつ $\mathfrak{q} \in \text{Ass} R$ について成立する \mathfrak{a} と仮定せよ. すると $\forall \mathfrak{q} \neq m$ について $R_{\mathfrak{q}}$ は $G-M$ であるとする. R は $\text{chr} = p > 0$ で 完全

であるとしよ。もし $F: R \rightarrow R$ が pure であるならば R_m は Buchsbaum である。
 $a \mapsto a^p$

注意 2.11 これは全く一般の状況ではない。すなわち、 A は標数 $p > 0$ の体を含む \mathbb{Z} 上 F -pure であるとは定せよ。もしも $\sum_A(\text{H}_i^m(A)) < \infty$ ($\forall i \neq \dim A$) ならば、 A は Buchsbaum になる。もしも A が Cohen-Macaulay 局所環の像であって \mathbb{Z} 上 $\dim A = 2$ の整域であるならば、自動的に A は Buchsbaum となる (c.f. [5])。

§3. 存在定理.

Buchsbaum 局所環 A の不変量の多くなさ、 $\dim_{A_m} \text{H}_i^m(A)$ ($i \neq \dim A$) の言葉を書き表される (c.f. (1.9), (1.13), (2.1)).
 この観点からみて、次の主張はいくらか面白いかもしれない。

定理 3.1 (Goto [3]). $d > 0$; $r^0, r^1, \dots, r^{d-1} \geq 0$ は整数とせよ。すると Buchsbaum 局所環 A をおいて、 $\dim A = d$ であらう $\dim_{A_m} \text{H}_i^m(A) = r^i$ ($0 \leq i < d$) とする = とができる。とくにもしも $r^0 = 0$ (あるいは、 $r^0 = r^1 = 0$) ならば、 A は整域 (正規環) となる。

系 3.2 (次数付き表現) R は無限体、 $R = R[x_1, \dots, x_n]$ ($n \geq 4$) は多項式環 $\subset L$ $U = R_+$ と

おこ。 $\{L_i\}_{1 \leq i \leq n-3}$ は有限次元 d 次数付き \mathbb{R} -ベクトル空間とせよ。 $d=0$ のとき, $\exists Y \in \mathbb{Z}, \exists \mathcal{P}$: graded 素イデアル st. ① $\text{ht}_{\mathbb{R}} \mathcal{P} = 2$ ② $\mathbb{R}_m / \mathcal{P}_m$ は Buchsbaum である ③ $H_m^i(\mathbb{R}/\mathcal{P}) \cong L_i(\mathbb{F})$ ($1 \leq i \leq n-3$).
 また $L_1 = (0)$ ならば, \mathbb{R}/\mathcal{P} は正規となる様に \mathcal{P} をえらぶ。

注意 3.3 $\{t_i\}_{0 \leq i \leq n-3}$ を $t_{i+1} \leq t_i + 1$ ($0 \leq i \leq n-3$)
 として, $L_i = \begin{cases} \mathbb{R}(-t_i) & (1 \leq i \leq n-3) \\ (0) & (i=0) \end{cases}$ とおこ。

すると (3.2) より $\underbrace{\mathcal{P}}_{\text{次数付き素イデアル}} \mathbb{R}/\mathcal{P} \cong L_i(\mathbb{F})$ ($0 \leq i \leq n-3$) ができるが, $d=0$ の \mathbb{R}/\mathcal{P} は (2.6) の条件を満たしてゐることに注意せよ。

§4. 双対性.

定理 4.1 ([12]). A は complete で M は Buchsbaum A -加群とせよ。 $d = \dim_A M$ とすると, A -加群

$$K_M = \text{Hom}_A(H_m^d(M), E_A(A_m))$$

も Buchsbaum である。 $\underbrace{(\text{次元は } d \text{ である})}_{d \leq 2 \text{ ならば } K_M \text{ は } C\text{-M である}}$
 $d \geq 3$ ならば $\text{depth}_A K_M \geq 2$ である。

$$H_m^i(K_M) \cong H_m^{d-i+1}(M) \quad (2 \leq i < d-1)$$

と成り立つ。

系 4.2. A は Buchsbaum で $\exists K_A$ とせよ。 $n = a$ とき, K_A も又 Buchsbaum A -加群である。

系 4.3 A は regular で M は Buchsbaum A -加群 とせよ。 $n = a$ とき $\text{Ext}_A^g(M, A)$ も又 Buchsbaum である ($g = \dim A - \dim_A M$)。

§5. Almost G-M rings について.

定義 5.1. A が almost G-M である $\iff A$ は Buchsbaum で $H_m^i(A) = (0)$ ($i \neq 1, \dim A$) である。

$d = \dim A \geq 2$ のとき $n = a$ 条件は, 「 $H_m^i(A) = (0)$ ($i \neq 1, d$) かつ $mH_m^1(A) = (0)$ 」 と同値である (c.f. (2.3))。従って, $d = 2$ ならば, $\text{depth } A > 0$ なる かつ $n = a$ Buchsbaum rings A は almost G-M となる。

補題 5.2 (2). $\mathcal{Q}(A)$ により A の 全商環 もあらわす。 $n = a$ とき 次の条件は同値である。 ($d = \dim A$)

① A は almost G-M である。

② $\mathcal{Q}(A) \supset \overset{\exists}{\underset{\text{subring}}{B}} \supset A$ s.t. (a) B は A 上の加群として有限生成である (b) $\dim B_p = d, \forall p \in \text{Max } B$
(c) $mB \subset A$.

もし $d \geq 2$ なら, B は 唯一つだけ存在せよ, $n = a$ 上 $H_m^1(A) = B/A$ となつてゐる。

定理 5.3 ([2]). $S \subset \mathbb{N}^m$ は有限生成(加法的) semigroup ($0 \in S$) であって $\text{rank } S = d \geq 2$ とする。 \tilde{S} は S の G-M 化をあらわす $\tilde{S} = S \cup \{0\}$ とする。次の条件は同値である。但し $R = \mathbb{R}[S]$ は体 \mathbb{R} 上の semigroup ring で $\mathcal{M} = \mathbb{R}[S \setminus \{0\}]$ とする。

① $R_{\mathcal{M}}$ は almost G-M である。

② $R_{\mathcal{M}}$ は Buchsbaum である。

③ $[S \setminus \{0\}] + \tilde{S} \subset S$.

⇔ $\mathcal{I}(R_{\mathcal{M}}) = \#[\tilde{S} \setminus S]$ とする。

よく知られた例として $S = \langle (4,0), (3,1), (1,3), (0,4) \rangle$ とすると $\tilde{S} = \langle (4,0), (3,1), (2,2), (1,3), (0,4) \rangle$ である。 $\tilde{S} \setminus S = \{(2,2)\}$ 故に $R[S]_{\mathcal{M}}$ は almost G-M である。

定理 5.4 ([4]). $R \subset S$ は可換環の有限型拡大とし、 S は G-M であって $\alpha \in \text{Max } S \Rightarrow \dim S_{\alpha} = \dim S$ なる α が存在する。 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ とし $W(\mathfrak{p}) = \{ \mathfrak{P} \in \text{Spec } S \mid \mathfrak{P} \cap R = \mathfrak{p} \}$ とおく。 \mathfrak{p} は a glueing をとって (R, \mathfrak{p}) とし $A = R'_{\mathfrak{p}}$ とおく。 $d = \dim R_{\mathfrak{p}}$ とすれば、次の主張が正しい。("glueing" については、本研究集会の大石、柳原西氏の講演を参照下さい。)

① A は almost G-M であって、 $\dim A = d$.

② $d > 0$ ならば,

$$I(A) = (\alpha - 1) \cdot \left\{ \sum_{P \in W(\mathfrak{g})} [R(P) : R(\mathfrak{g})] - 1 \right\}$$

$$\text{emb}(A) = \sum_{P \in W(\mathfrak{g})} \text{emb}(S_P) \cdot [R(P) : R(\mathfrak{g})]$$

$$e(A) = \sum_{P \in W(\mathfrak{g})} e(S_P) \cdot [R(P) : R(\mathfrak{g})].$$

但し $e(\cdot)$ は重複度を, $\text{emb}(\cdot)$ は embedding dimension をあらわす。

系 5.5 \mathfrak{g} の状況下で, $A : \subset M$ (i.e., A は $(S_{\mathfrak{g}})$ をみたす) $\iff d \leq 1$ か又は, $d \geq 2$ であつて $W(\mathfrak{g}) = \{P\}$ であつて $e = 0$ の $P \implies R(\mathfrak{g}) = R(P)$ が成り立つ。

沢山の例が 柳原氏の講演から得られるのである。

定理 5.6 ([2], [9]). A は almost $\subset M$ であるとき

定せよ。 $e = 0$ のとき,

① $\mathfrak{g}^{\wedge n}$ の parameter ideal of $\mathfrak{g}^{\wedge n}$ $G_{\mathfrak{g}}^n(A)$ は almost $\subset M$ である。

② $\text{emb}(A) \leq e(A) + \dim A + I(A) - 1$ であつて, $e = 0$ かつ " $=$ " が成り立つれば, $G_m^n(A)$ は almost $\subset M$ である。

References

- [1] D. A. Buchsbaum, Complexes in local ring theory, In: Some aspects of ring theory, C. I. M. E. Rom. 1965.
 [2] S. Goto, On the Cohen-Macaulayfication of certain Buchsbaum rings, to appear in Nagoya Math. J.

- [3] S. Goto, On Buchsbaum rings, in preprint.
- [4] ———, On Buchsbaum rings obtained by glueing, in preprint.
- [5] ———, On F-pure Buchsbaum rings, in preparation.
- [6] S. Goto and K. Watanabe, On graded rings I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 179-213.
- [7] S. Goto and Y. Shimoda, On Rees algebras over Buchsbaum rings, to appear in J. Math. Kyoto Univ.
- [8] F. S. Macaulay, Algebraic Theory of Modular Systems, Cambridge Tracts No. 19, Cambridge, 1916.
- [9] P. Schenzel, On Veronesean embeddings and projections of Veronesean varieties, Archiv der Mathematik, 30 (1978), 391-397.
- [10] ———, Multiplizitäten in verallgemeinerte Cohen-Macaulay-Moduln, Math. Nachr., 98 (1979), 295-306.
- [11] ———, Applications of dualizing complexes to Buchsbaum rings, in preprint.
- [12] ———, On Buchsbaum rings and their canonical modules, in preprint.
- [13] J. Stückrad, Über die kohomologische Charakterisierung von Buchsbaum-Moduln, to appear in Math. Nachr.
- [14] J. Stückrad and W. Vogel, Eine Verallgemeinerung der Cohen-Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie, J. Math. Kyoto Univ., 13 (1973), 513-528.
- [15] ———, Toward a theory of Buchsbaum singularities, Amer. J. Math., 100 (1978), 727-746.
- [16] N. Suzuki, On the Koszul complex generated by a system of parameters for a Buchsbaum module, Science Reports of Shizuoka College of Pharmacy, Department of Mathematics, General Education, 8 (1979), 37-35.
- [17] W. Vogel, Über eine Vermutung von D. A. Buchsbaum, J. Algebra, 25 (1973), 106-112.
- [18] ———, A non-zero-divisor characterization of Buchsbaum modules, in preprint.
- [19] K. Watanabe and S. Goto, Tangent cones at Buchsbaum singularities, in preparation.