数理解析研究所講究録
第374巻 1980年 75-94

Rees環がCohen-Macaulay環になるための条件について

日大　文理　後藤四郎
都立大　理　下田保博

はじめに

Aはd次元局所環で$\mathfrak{m}$はAの極大イデアルとする。Aのイデアル$\mathfrak{q}$に対して$R(\mathfrak{q})=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{q}^n$とおいて$\mathfrak{q}$に関するA上のRees環と呼ぶことにする。$R(\mathfrak{q})$は一変数多項式環$A[X]$の部分環$A[\{aX \mid a\in\mathfrak{q}\}]$と自然に同一視できる。

AがCohen-Macaulayであれば，すべてのパラメーターイデアル$\mathfrak{q}$に対してRees環$R(\mathfrak{q})$もCohen-Macaulayになる（Barshay[1], Goto[2], Valla[12]）。しかしながら，AがCohen-MacaulayでなくてもRees環はCohen-Macaulayになるような例も知られている。たとえば，Hochster-Robertsによる次の例がある。

$$A=k[[S^4, S^3T, ST^3, T^4]],\quad \mathfrak{q}=(S^4, T^4)$$

とすると，$R(\mathfrak{q})$はCohen-Macaulayになる。そこで，パラメーターイデアルの場合にRees環がCohen-Macaulayとなるのはいつかという問題が考えられる。本稿ではこの問いに対する答え

を与えるのがまず1つの目的である。

もう1つの話題は極大イデアルに関するRees環がいつCohen-Macaulayになるかという問題についてである。Hochster-Ratliff [4], Sally [7] は $\mathrm{Proj}(R(\mathfrak{m}))$ が $\mathrm{Spec}(A)$ の閉点の blowing up であり $\mathrm{proj}(G_{\mathfrak{m}}(A))$ が fiber になることを用いて，$\mathrm{proj}(G_{\mathfrak{m}}(A))$ が Cohen-Macaulay ならば $\mathrm{proj}(R(\mathfrak{m}))$ もそうなることを示した。ここでは $R(\mathfrak{m})$ と $G_{\mathfrak{m}}(A) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ との関係を重視して $R(\mathfrak{m})$ が Cohen-Macaulay になる条件を与えることにする。

§1. パラメーターイデアルに関するRees環の場合

ここでは次の定理を証明するのが目的である。

(1.1) 定理. $\mathfrak{q} = (a_1, \cdots, a_d)$ をAのパラメーターイデアルとする。このとき，次は同値である。

(1) $R(\mathfrak{q})$ は Cohen-Macaulay 環である。

(2) Aは次の2つの条件をみたす。

(1-1) $(a_1^{n_1}, \cdots, a_i^{n_i}) : a_{i+1}^{n_{i+1}} = (a_1^{n_1}, \cdots, a_i^{n_i}) : \mathfrak{q}$ が $0 \leq i \leq d-1$ なる i と，すべての正の整数 $n_1, \cdots, n_{i+1}$ について成り立つ。

(1-2) local cohomology module $H_{\mathfrak{m}}^i(A)$ は $1, d$ 以外の i に対して (0) となる。

上の定理(1.1)を証明するために，まず次の定義から始めよ

う。

(1.2) 定義. Aの任意のイデアル$\mathfrak{a}$に対して $\mathrm{Assh}(\mathfrak{a}) = \{p \in \mathrm{Ass}(\mathfrak{a});\ \dim A/p = \dim A/\mathfrak{a}\}$ とおく。さらに $\mathfrak{a} = \bigcap_{p \in \mathrm{Ass}(\mathfrak{a})} \mathfrak{a}(p)$ を$\mathfrak{a}$の準素分解とするとき，$U(\mathfrak{a}) = \bigcap_{p \in \mathrm{Assh}(\mathfrak{a})} \mathfrak{a}(p)$ と定める。

以下しばらくの間，定理の(1-1)の条件を仮定しておく。

(1.3) 補題([11])。$\mathfrak{q} H^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$ $(0 \leqq i \leqq d-1)$ が成り立つ。

$0 \leqq j \leqq d$ に対して $\mathfrak{q}_j = (a_1, \cdots, a_j)$ とおく。このとき，

(1.4) 補題。$\mathfrak{q}_j = U(\mathfrak{q}_j) \cap Q_j$ $(0 \leqq j \leqq d)$，ここで Q_j は $\mathfrak{m}$-primary成分である。さらに $U(\mathfrak{q}_j) = (a_1, \cdots, a_j) : a_{j+1}$ が $0 \leqq j \leqq d-1$ なるjに対して成り立つ。

証明. (1.3)より $\ell_A(H^i_{\mathfrak{m}}(A)) < \infty$ となる。従って[8]のSatz (2.5) により $\mathfrak{q}_j = U(\mathfrak{q}_j) \cap Q_j$ が成り立つ。次に $0 \leqq j \leqq d-1$ なるjに対して，$U(\mathfrak{q}_j)$ の定義より a_{j+1} は $U(\mathfrak{q}_j)$ の準素成分に属するどんな素イデアルにも含まれない。よって，$(a_1, \cdots, a_j) : a_{j+1}$ は $U(\mathfrak{q}_j)$ に含まれる。逆に $x \in U(\mathfrak{q}_j)$ とする。Q_j は $\mathfrak{m}$-primaryより $a_{j+1}^n \in Q_j$ となる整数nが存在する。このとき，$a_{j+1}^n x \in U(\mathfrak{q}_j) \cap Q_j = \mathfrak{q}_j$。よって，$x \in (\mathfrak{q}_j) : a_{j+1}^n = \mathfrak{q}_j : a_{j+1}$ となり，補題がいえた。

(1.5) 補題. $U(\mathfrak{q}_j) \cap \mathfrak{q}^n = \mathfrak{q}_j \mathfrak{q}^{n-1}$ が任意の $0 \leqq j \leqq d$, $n > 0$ について成り立つ。

証明. [3]の補題(4.2)と同様である。

(1.6)補題．$U(0)=H^0_m(A)$。

証明．$qH^0_m(A)=0$ より $H^0_m(A)\subset(0):q=(0):a_1=U(0)$．逆に $r\in U(0)$ ならば (1.4) より $r\in(0):a_1=(0):q$．今 $q\supset m^n$ なる整数 n をとれば，$r\in(0):m^n\subset H^0_m(A)$．

(1.7) 補題．① $d\geqq 2$ ならば

$$H^i_m(U(a_1A))=\begin{cases}H^i_m(A) & i\neq 1\\ (0) & i=1\end{cases}$$

② $d=1$ ならば，$U(a_1A)=a_1A$ は1次元 Cohen-Macaulay A-加群。

証明．① 次のような完全列が存在する。

(i) $0\longrightarrow U(0)\longrightarrow A\xrightarrow{\varepsilon} a_1A\longrightarrow 0$

(ii) $0\longrightarrow a_1A\xrightarrow{\tau} A\longrightarrow A/a_1A\longrightarrow 0$

(iii) $0\longrightarrow a_1A\longrightarrow U(a_1A)\longrightarrow U(a_1A)/a_1A\longrightarrow 0$

(iv) $0\longrightarrow U(a_1A)/a_1A\longrightarrow A/a_1A\longrightarrow A/U(a_1A)\longrightarrow 0$

まず $A\xrightarrow{\varepsilon} a_1A\xrightarrow{\tau} A$ は $\hat{a}_1: A\xrightarrow{a_1} A$ なる写像と一致すること，また $U(a_1A)/a_1A$ は (1.4) より長さが有限になることに注意する。

$i=0$ のとき，$H^0_m(U(a_1A))\subset H^0_m(A)=U(0)=(0):q$ である。今 $x\in H^0_m(A)$ とすると $xq=0$ より $x\in U(a_1A)$。従って $x\in H^0_m(U(a_1A))$ となる。

$i\geqq 2$ のとき，$H^i_m(U(0))=(0)$ $(i\geqq 1)$ に注意すれば，(i)よ

り $H^i_m(A) \cong H^i_m(a_1A)$ $(i \geq 1)$ となる。このとき(iii)から $H^i_m(U(a_1A)/a_1A) = (0)$ $(i \geq 2)$ より求める結果 $H^i_m(U(a_1A)) \cong H^i_m(a_1A) \cong H^i_m(A)$ $(i \geq 2)$ が得られる。

$i=1$のとき，(iii)より次のような完全列ができる。

$$0 \longrightarrow H^0_m(a_1A) \longrightarrow H^0_m(U(a_1A)) \longrightarrow H^0_m(U(a_1A)/a_1A) \longrightarrow H^1_m(a_1A) \longrightarrow H^1_m(U(a_1A)) \longrightarrow 0 \qquad (1\text{-}3)$$

(i)より $0 \longrightarrow H^0_m(U(0)) \longrightarrow H^0_m(A) \longrightarrow H^0_m(a_1A) \longrightarrow 0$

となるから $H^0_m(U(0)) = H^0_m(A)$ に注意すれば，$H^0_m(a_1A) = (0)$ となる。また(iv)より

$$0 \longrightarrow H^0_m(U(a_1A)/a_1A) \longrightarrow H^0_m(A/a_1A) \longrightarrow H^0_m(A/U(a_1A)) \longrightarrow 0$$

となるが，$\operatorname{depth} A/U(a_1A) > 0$ より $H^0_m(A/U(a_1A)) = (0)$。従って $H^0_m(U(a_1A)/a_1A) \cong H^0_m(A/a_1A)$ である。

一方(ii)より

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0_m(a_1A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0_m(A) \arrow[r] & H^0_m(A/a_1A) \arrow[r] & H^1_m(a_1A) \arrow[r, "\cong"] & H^1_m(A) \\
& (0) & & & H^1_m(A) \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur, "a_1"'] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

今 $a_1 \cdot H^1_m(A) = (0)$ に注意すれば，

$$0 \longrightarrow H^0_m(A) \longrightarrow H^0_m(A/a_1A) \longrightarrow H^1_m(A) \longrightarrow 0$$

が得られる。このとき $H^1_m(a_1A) \cong H^1_m(A)$ より，結局

$$0 \longrightarrow H^0_m(A) \longrightarrow H^0_m(A/a_1A) \longrightarrow H^1_m(A) \longrightarrow 0$$

が得られる。従って $l_A(H^0_m(A/a_1A)) = l_A(H^0_m(A)) + l_A(H^1_m(A))$.

(1-3)において長さを調べると

$$\begin{aligned}\ell_A(H^1_m(U(a_1,A))) + \ell_A(H^0_m(U(a_1,A)/a_1A)) &= \ell_A(H^1_m(A)) + \ell_A(H^0_m(U(a_1,A))) \\ &= \ell_A(H^1_m(A)) + \ell_A(H^0_m(A)) \\ &= \ell_A(H^0_m(A/a_1A))\text{。}\end{aligned}$$

従って $\ell_A(H^1_m(U(a_1,A)))=0$ より $H^1_m(U(a_1,A))=(0)$.

② $U(a_1,A)=a_1A$ は明らか。$x\in U(a_1,A)$ で $a_1x=0$ とする。$x=a_1y$ と表わせる。このとき、$a_1^2y=0$. よって $y\in (0):a_1^2=(0):a_1$. ∴ $x=a_1y=0$. 従って $U(a_1,A)$ は1次元 Cohen-Macaulay A-加群である。

系として次の2つのことが成り立つ。

(1.8) 系. $U(a_1,A)$ が Cohen-Macaulay A-加群であるためには $d=1$ か $d\geq 2$ で $H^i_m(A)=(0)$ $(i\neq 1,d)$ が成り立つことが必要充分である。

(1.9) 系. $d=2$ で depth $A>0$ ならば $U(a_1,A)$ は Cohen-Macaulay.

(1.10) 補題([3]) 次のような $R(q)$-加群の完全列が存在する。

$$0\longrightarrow {}_hU(a_1,A)\longrightarrow R(q)/(a_1X)\longrightarrow R(q+U(a_1,A)/U(a_1,A))\longrightarrow 0$$

ここで h は $R(q)\longrightarrow A$ への自然な projection であって、${}_hU(a_1,A)$ は h を通じて $U(a_1,A)$ を $R(q)$-加群と見なしたものを表わす。

(1.11) 系. depth $A>0$ ならば、depth $R(q)\geq \min\{3, d+1\}$.

証明. $d=1$ のとき, $R(q) \cong A[X]$ より depth $R(q)=2$ である。$d \geqq 2$ とする。depth $A/U(a_1A) > 0$ より, d に関する帰納法によれば, depth $R(q+U(a_1A)/U(a_1A)) \geqq 2$. 一方 (1.7) により depth $U(a_1A) \geqq 2$ となるから, (1.10) の完全列により, depth $R(q/(a_1X)) \geqq 2$. 結局 depth $R(q) \geqq 3$ となる。

(1.12) 系. $d=2$ で depth $A>0$ ならば $R(q)$ は Cohen-Macaulay.

(1.13) 補題. $d \geqq 3$ かつ depth $A > 0$ とする。$\bar{A} = A/U(a_1A)$ とおく。このとき,

$$\operatorname{depth} U(a_2\bar{A}) = \begin{cases} \operatorname{depth} U(a_1A) - 1 & (\operatorname{depth} U(a_1A) \geqq 3) \\ 2 & (\operatorname{depth} U(a_1A) = 2) \end{cases}$$

証明.
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & a_1A \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r] & A/a_1A \arrow[r] & 0 \\ & & A \arrow[ul, "\varepsilon"] \arrow[u, "a_1"'] & & \end{tikzcd}$$

なる完全列に対して $H^i_m(\cdot)$ を適用すれば, $a_1H^i_m(A)=(0)$ に注意すると, (1.7) の結果を合わせて,

$$0 \longrightarrow H^i_m(A) \longrightarrow H^i_m(A/a_1A) \longrightarrow H^{i+1}_m(A) \longrightarrow 0 \quad (1-4)$$

なる完全列が存在する。(ここで $i \leqq d-2$). 同じく次の完全列,

$$0 \longrightarrow U(a_1A)/a_1A \longrightarrow A/a_1A \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow 0$$

に $H^i_m(\cdot)$ を適用すると $H^i_m(U(a_1A)/a_1A) = (0)$ $(i \geqq 1)$ より $H^i_m(A/a_1A) \cong H^i_m(\bar{A})$ $(i \geqq 1)$ が得られる。

depth $U(a,A)=2$ ならば (1.7) より $H^2_m(A)\neq 0$. 従って (1-4) より $H^2_m(A_{a,A})=H^2_m(\bar{A})\neq 0$. (1.7) を使えば, $H^2_m(U(a,\bar{A}))\neq 0$. 従って depth $U(a,\bar{A})\leq 2$. 一方 depth $\bar{A}>0$ より, 再び (1.7) を用いて depth $U(a,\bar{A})\geq 2$ がいえる。よって depth $U(a,\bar{A})=2$ である。

depth $U(a,A)=d\geq 3$ のとき, (1.7) から, $H^d_m(A)\neq 0$ かつ $H^i_m(A)=0$ $(1\leq i<d)$. よって (1-4) より $H^{d-1}_m(A_{a,A})\neq 0$ で $H^i_m(A_{a,A})=0$ $(1\leq i<d-1)$. 従って再び (1.7) により depth $U(a,\bar{A})=d-1$ となる。

(1.14) 命題 $d\geq 3$ で depth $A>0$ とする。このとき,

$$\operatorname{depth} R(\mathcal{F})=\operatorname{depth} U(a,A)+1$$

となる。

証明. depth $U(a,A)=d$ とおく. $d=2$ のとき, depth $U(a,\bar{A})=2$ より, d に関する帰納法により, depth $R(\mathcal{F}+U(a,A)/U(a,A))=3$. このとき, (1.10) により depth $R(\mathcal{F})/(a,X)=2$. よって depth $R(\mathcal{F})=3$ となる。

$d\geq 3$ とする。depth $R(\mathcal{F}+U(a,A)/U(a,A))=$ depth $U(a,\bar{A})+1=(d-1)+1=d$. よって (1.10) から depth $R(\mathcal{F})/(a,X)=d$. 従って depth $R(\mathcal{F})=d+1$ となる。

(1.15) 系. (1-1) の仮定のもとで, 次は同値になる。

(1) $R(\mathcal{F})$ は Cohen-Macaulay 環

(2) $U(\mathfrak{q}, A)$ は Cohen-Macaulay A-加群

(3) $H_{\mathfrak{m}}^i(A) = (0)$ $(i \neq 1, d)$

以上のことにより，定理の証明を完結させるには $R(\mathfrak{q})$ が Cohen-Macaulay ならば条件 (1-1) がみたされることを云えば充分である。そのために今 $M = (\mathfrak{m}, a_1X, \cdots, a_dX)$ を $R(\mathfrak{q})$ の斉次極大イデアルとおく。

(1.16) 補題 ([3]). $a_1, a_2 + a_1X, \cdots, a_d + a_{d-1}X, a_dX$ は $R(\mathfrak{q})_M$ のパラメーター系である。さらに $R(\mathfrak{q})_M$ が Cohen-Macaulay になる必要充分条件は $a_1, a_2 + a_1X, \cdots, a_d + a_{d-1}X, a_dX$ が $R(\mathfrak{q})_M$-列になることである。

(1.17) 補題. $R(\mathfrak{q})$ が Cohen-Macaulay ならば，条件 (1-1) が成り立つ。

証明. まず $(a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i^{n_i} = (a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i$

$= (a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_j$ $(1 \leq i \leqq j \leq d,\ n_1, \cdots, n_i$ は自然数$)$

を示そう。$I = (a_1^{n_1}, (a_1X + a_2)^{n_2}, \cdots, (a_{i-2}X + a_{i-1})^{n_{i-1}}, a_iX)$ とおく。r を $(a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i^{n_i}$ の元とする。$ra_i^{n_i} = \sum_{k=1}^{i-1} A_k a_k^{n_k}$ と表わせる。

$$ra_i(a_dX + a_i)^{n_i} = ra_i\left(\sum_{\ell=0}^{n_i}\binom{n_i}{\ell}(a_dX)^{n_i-\ell}a_i^{\ell}\right) = ra_i\left(\sum_{\ell=0}^{n_i-1}\binom{n_i}{\ell}(a_dX)^{n_i-\ell}a_i^{\ell}\right.$$

$$\left.+ a_i^{n_i}\right) = ra_d\sum_{\ell=0}^{n_i-1}\binom{n_i}{\ell}(a_dX)^{n_i-\ell-1}(a_iX) + ra_i^{n_i+1}$$

$$\equiv a_i\left(\sum_{k=1}^{i-1}A_k a_k^{n_k}\right) \equiv a_i(a_1X + a_2)^{n_2} - a_i\left(\sum_{\ell=0}^{n_2-1}\binom{n_2}{\ell}(a_1X)^{n_2-\ell}a_2^{\ell}\right) + a_i\sum_{k=3}^{i-1}A_k \cdot$$

$$a_k^{n_k} \equiv a_i\left(\sum_{k=3}^{i-1}A_k a_k^{n_k}\right) \equiv \cdots \equiv 0 \pmod{I}.$$

$(a_i X + a_i)^{n_i}$ は $(R(\mathfrak{q})/I)_M$ ー列より $ra_i \in IR(\mathfrak{q})_M$ である。よって $f \cdot ra_i \in I$ $(f \in R(\mathfrak{q}) \setminus M)$. f の次数 0 の係数は A の単元より $f \cdot ra_i$ の次数 0 の係数を考えると, $ra_i \in (a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}})$.
従って最初の等式が証明された。才2の等式も同様に証明できる。さらに上の等式は $a_1, \cdots, a_i$ の任意の置換 $a_{\pi(1)}, \cdots, a_{\pi(i)}$ (π は対称群 $\mathfrak{S}_i$ の元) に対しても成り立つことに注意する。

さて (1-1) を証明することにしよう。r を $(a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i^{n_i}$ の元とする。a_k $(1 \leqq k \leqq i-1)$ をとる。$n_k = 1$ ならば,

$ra_k \in (a_1^{n_1}, \cdots, a_k^{n_k}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}})$ は明らかである。$n_k > 1$ とする。

$ra_i = \sum_{l=1}^{i-1} \lambda_l a_l^{n_l}$ と上の主張から表わすことができる。従って

$$\lambda_k a_k^{n_k} \in (a_1^{n_1}, \cdots, \widehat{a_k^{n_k}}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}, a_i).$$

よって, $\lambda_k a_k \in (a_1^{n_1}, \cdots, \widehat{a_k^{n_k}}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}, a_i)$.

そこで $r - \lambda_k a_k^{n_k-1} \in (a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i = (a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_k$.

従って $ra_k \in (a_1^{n_1}, \cdots, a_k^{n_k}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}})$. よって (1-1) が成り立つ。

定理よりいくつかの系が導ける。

(1.18) 定義([L10]). A の元の列 $a_1, \cdots, a_r$ が weakly regular sequence であるとは,

$$(a_1, \cdots, a_{i-1}) : a_i = (a_1, \cdots, a_{i-1}) : m$$

が $1 \leqq i \leqq r$ に対して成り立つときに云う。A が Buchsbaum 環であるとは, すべてのパラメーター系が weakly regular sequence をなすときに云うことにする。このとき,

(1,19) 系([3]). 次の条件は同値である。

(1) すべてのパラメーターイデアル $\mathfrak{q}$ に対して $R(\mathfrak{q})$ は Cohen-Macaulay である。

(2) A は Buchsbaum 環であって，かつ $H^i_{\mathfrak{m}}(A)=(0)$ $(i\neq 1,d)$.

証明. [10] の定理5により，2組のパラメーター系

$a_1,\cdots,a_{d-1},a_d;\ a_1,\cdots,a_{d-1},a_d'$ に対して

$$(a_1,\cdots,a_{d-1}):a_d=(a_1,\cdots,a_{d-1}):a_d'$$

が成り立つことと A は Buchsbaum 環になることは同値である。

今 (1) が成り立つならば，定理の (4-4) がすべてのパラメーター系について云える。このとき容易に上の条件が成り立つことが示される。よって (1) ならば (2) が云える。

逆に A が Buchsbaum 環ならば，その定義により (4-4) の条件をすべてのパラメーターイデアルはみたすから，(2) ならば (1) がいえる。

(1,20) 系. r を $0\leq r\leq d$ なる整数とする。$a_{r+1},\cdots,a_d$ を A のパラメーター系の一部をなす元の列とし，$\mathfrak{q}=(a_{r+1},\cdots,a_d)$ とおく。このとき次の (1), (2) は同値である。

(1) Rees 環 $R(\mathfrak{q})$ は Cohen-Macaulay である。

(2) $a_1,\cdots,a_r$ を $a_1,\cdots,a_r,a_{r+1},\cdots,a_d$ がパラメーター系をなす元の列とする。このとき次の条件が成り立つ。

(i) $a_1,\cdots,a_r$ は A-列である。

ii) すべての自然数nに対して$A/\mathfrak{q}^n$はCohen-Macaulay。

iii) $A/(a_1,\cdots,a_r)$は定理(1.4)の(2)をみたす。

証明. (i)⇒(ii): $R(\mathfrak{q})$がCohen-Macaulayならば，$a_1,\cdots,a_r$, $a_{r+1}, a_{r+2}+a_{r+1}X, \cdots, a_d+a_{d-1}X, a_dX$は$R(\mathfrak{q})_M$－列をなすことに注意する。このとき，まず$a_1,\cdots,a_r$は$A$－列になることが容易にわかる。さらに

(1-5)　$(a_1,\cdots,a_i)\cap\mathfrak{q}^n=(a_1,\cdots,a_i)\mathfrak{q}^n$

($1\leq i\leq r$, nは自然数)が成り立つ。実際，cを$(a_1,\cdots,a_i)\cap\mathfrak{q}^n$の元とする。$c=\sum_{j=1}^{i}\lambda_j a_j$と表わせ。

$$a_{r+1}^n(cX^n)=\sum_{j=1}^{i}a_j(\lambda_j a_{r+1}^n X^n).$$

$a_1,\cdots,a_i,a_{r+1}^n$は$R(\mathfrak{q})_M$－列より，$cX^n\in(a_1,\cdots,a_i)R(\mathfrak{q})_M$. 従って$c\in(a_1,\cdots,a_i)\mathfrak{q}^n$.

次に$a_1,\cdots,a_r$が$A/\mathfrak{q}^n$－列をなすことを示す。

$x a_i\in(a_1,\cdots,a_{i-1})+\mathfrak{q}^n$

が成り立つとせよ。$x a_i=\sum_{j=1}^{i-1}y_j a_j+y$ ($y\in\mathfrak{q}^n$)と表わせる。このとき，$x a_i-\sum_{j=1}^{i-1}y_j a_j\in(a_1,\cdots,a_i)\cap\mathfrak{q}^n=(a_1,\cdots,a_i)\mathfrak{q}^n$ ((1-5)から成り立つ)。よって$x a_i-\sum_{j=1}^{i-1}y_j a_j=\sum_{j=1}^{i}z_j a_j$ ($z_j\in\mathfrak{q}^n$). $a_1,\cdots,a_i$はA－列であるから，$x-z_i\in(a_1,\cdots,a_{i-1})$. 従って$x\in(a_1,\cdots,a_{i-1})+\mathfrak{q}^n$. このことにより$a_1,\cdots,a_r$は$A/\mathfrak{q}^n$－列。$A/\mathfrak{q}^n$の次元は$A/\mathfrak{q}$と同じで$r$となるから$A/\mathfrak{q}^n$はCohen-Macaulay.

さて，$R(\mathfrak{q})$から$R(\mathfrak{q}+(a_1,\cdots,a_i)/(a_1,\cdots,a_i))$への自然な写像の核

は [12] の命題 (1.1) により $(a_1, \cdots, a_i)A[X] \cap R(\mathfrak{q})$ になる。ところで (1-5) によってこのイデアルは $(a_1, \cdots, a_i)R(\mathfrak{q})$ に一致する。従って，$R(\mathfrak{q})/(a_1, \cdots, a_r)R(\mathfrak{q}) \cong R(\mathfrak{q} + (a_1, \cdots, a_r)/(a_1, \cdots, a_r))$ となり $\mathfrak{q}$ がパラメーターイデアルである場合に帰着できる。このときは定理 (1.1) から条件 (iii) が成り立つ．

(2) ⇒ (1)：(1-5) の式が成り立つことを云う。$i=1$ とする。$a_1, \cdots, a_r$ は $A/\mathfrak{q}^n$-列になるから，$\lambda a_1 \in (a_1) \cap \mathfrak{q}^n$ とすると，$\lambda \in \mathfrak{q}^n$．$i>1$ として $i-1$ 以下では成り立つものとする。x を $(a_1, \cdots, a_i) \cap \mathfrak{q}^n$ の元とする。$x = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j a_j$ とせよ。$\lambda_i a_i \in \mathfrak{q}^n + (a_1, \cdots, a_{i-1})$ より $\lambda_i \in (a_1, \cdots, a_{i-1}) + \mathfrak{q}^n$．よって $\lambda_i = \sum_{k=1}^{i-1} t_k a_k + t$ $(t \in \mathfrak{q}^n)$ と表わせる。このとき，

$$x - t a_i = \sum_{k=1}^{i-1} (\lambda_k + t_k a_i) a_k \in \mathfrak{q}^n \cap (a_1, \cdots, a_{i-1}) = (a_1, \cdots, a_{i-1})\mathfrak{q}^n.$$

そこで $x - t a_i = \sum_{k=1}^{i-1} z_k a_k$ $(z_k \in \mathfrak{q}^n)$。よって $x \in (a_1, \cdots, a_i)\mathfrak{q}^n$．

この (1-5) の式により，$a_1, \cdots, a_r$ は $R(\mathfrak{q})$-列をなすことが容易にわかり，(1) ⇒ (2) の証明から，

$$R(\mathfrak{q})/(a_1, \cdots, a_r)R(\mathfrak{q}) \cong R(\mathfrak{q} + (a_1, \cdots, a_r)/(a_1, \cdots, a_r))$$

が成立する。従って (iii) より右辺は Cohen-Macaulay となるから $R(\mathfrak{q})$ も Cohen-Macaulay が云える。

(1.21) 系 ([9])．r を $0 < r < d$ なる整数とする。このとき次の (1), (2) は同値である。

(1) A は Cohen-Macaulay である。

(2) 長さが$d-r$のパラメーター系の一部をなす元の列で生成された任意のイデアル$\mathfrak{q}$に対して，Rees環$R(\mathfrak{q})$はCohen-Macaulay.

証明. (1)ならば(2)が成り立つのはよく知られている。([1]参照)。

(2)⇒(1): $\mathfrak{q}=(a_{r+1},\cdots,a_d)$とおく。$a_1,\cdots,a_r$を$a_1,\cdots,a_r,a_{r+1},\cdots,a_d$がパラメーター系となる元の列とすると，(1.20)より$a_1,\cdots,a_r$はA−列をなす。今$\bar{A}=A/(a_1^2,\cdots,a_r^2)$とおく。$\bar{A}$の任意のパラメーター系$\bar{b}_{r+1},\cdots,\bar{b}_d$をとると，$b_{r+1},\cdots,b_d$はAのパラメーター系の一部をなす。そこで$\mathfrak{q}'=(b_{r+1},\cdots,b_d)$とおくと$R(\mathfrak{q}')$は仮定によりCohen-Macaulayとなる。このとき，(1.20)により$R((\bar{b}_{r+1},\cdots,\bar{b}_d))=R(\mathfrak{q}')/(a_1^2,\cdots,a_r^2)R(\mathfrak{q}')$が成り立つので$R((\bar{b}_{r+1},\cdots,\bar{b}_d))$もCohen-Macaulayになる。そこで系(1.19)により$\bar{A}$はBuchsbaum環となる。従って，Aもそうである。([13]の定理による)。また$\operatorname{depth} A\geqq 2$なることもわかるので，このときは[9]と同様な証明により，$\operatorname{depth} R(\mathfrak{q})=\operatorname{depth} A+1$がいえて，AはCohen-Macaulayとなる。

§2. 極大イデアルに関するRees環の場合.

ここではAはd次元局所環で$\mathfrak{m}$をその極大イデアルとする。$A/\mathfrak{m}$は無限体と仮定しておく。このとき，

(2.1) 定理. AはCohen-Macaulayと仮定する。次の条件は同

値である。

(1) $R(\mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay である.

(2) $G_{\mathfrak{m}}(A)$ は Cohen-Macaulay であって, $\mathfrak{m}^d=(a_1,\cdots,a_d)\mathfrak{m}^{d-1}$ をみたす $\mathfrak{m}$ の元の列 $a_1,\cdots,a_d$ が存在する。

この結果の詳しい証明は後藤―下田の'On Rees algebras over local rings'という論文で与える予定であるので, ここではその概略を述べることにする。

(2.2)定義([6]). 任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{a}^t=\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{t-1}$ となる $\mathfrak{a}$ に含まれるイデアル $\mathfrak{b}$ のことを $\mathfrak{a}$ の reduction イデアルと呼ぶ。さらに $\mathfrak{a}$ の reduction で $\mathfrak{b}$ に真に含まれるものがないときに $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{a}$ の minimal reduction と呼ぶことにする。もし $A/\mathfrak{m}$ が無限体ならば, 任意のイデアルに対して必ず minimal reduction が存在して, その生成元の個数は A の次元を越えない。

上の定義により, $\mathfrak{q}=(a_1,\cdots,a_d)$ なる $\mathfrak{m}$ の minimal reduction が存在する。このとき, $G_{\mathfrak{m}}(A)$ が Cohen-Macaulay となることと,

$$(2-1)\qquad (a_1,\cdots,a_i)\cap\mathfrak{m}^n=(a_1,\cdots,a_i)\mathfrak{m}^{n-1}$$

($1\leqq i\leqq d$, n は自然数) が成り立つことは同値である。

$R(\mathfrak{m})=A[\{aX\mid a\in\mathfrak{m}\}]$ としたとき, $M=(\mathfrak{m},\{aX\mid a\in\mathfrak{m}\})$ を $R(\mathfrak{m})$ の斉次極大イデアルとする。さらに,

$$f_i=a_i+a_{i-1}X\quad(1\leqq i\leqq d+1,\ a_0=a_{d+1}=0)$$

とおく。このとき,

(2.3) 補題. $f_1, \ldots, f_{d+1}$ は $R(m)_M$ のパラメーター系である。

また Matijevic–Roberts [5] の定理より

(2.4) 補題. $R(m)$ が Cohen–Macaulay である必要充分条件は $f_1, \ldots, f_{d+1}$ が $R(m)_M$‐列となることである。

(2.5) 補題. u を $\mathrm{gr}(A)$ での正則元とする。このとき，次の次数つき $R(m)$‐加群の完全列が存在する。

(2-2) $\quad 0 \to uA \to R(m)/(uX) \to R(m)/(u) \to 0$

証明. $f : R(m) \to R(m)/(u)$ を自然な写像とする。I を f の核とおく。$uX \subset I$ である。今 $z = bX^n$ ($b \in m^n$) を I の元とする。$n \geq 1$ とせよ。(2-1) より $b \in m^n \cap uA = um^{n-1}$。よって $b = ur$ ($r \in m^{n-1}$) とおける。このとき $z = (uX)(rX^{n-1})$。従って $z \in (uX)$。$n = 0$ ならば，$b \in uA$。よって $I = (uA, uX)$。ゆえに上の完全列が成り立つ。

以下しばらくの間，$\mathrm{gr}(A)$ は Cohen–Macaulay であると仮定する。このとき，

(2.6) 補題. $f_1, \ldots, f_d$ は $R(m)$‐列。

証明. i についての帰納法. $i = 1$ ならば明らか。$i \geq 2$ とする。$f_1, \ldots, f_{i-1}$ は $R(m)$‐列だが $f_1, \ldots, f_i$ はそうならないような i を最小にとる。今 $i \leq d$ とせよ。このとき，

$P \in \mathrm{Ass}(R(m)/(f_1, \ldots, f_{i-1}))$ で $f_i \in P$ となるものをとる。(2-2) で $u = u_{i-1}$ とおくと

$$0 \longrightarrow {}_{h}A \longrightarrow R(m)/_{a_{i+1}X} \longrightarrow R(m/_{a_{i+1}A}) \longrightarrow 0 .$$

$a_1, \cdots, a_i$はA－列であるからAをR(m)－加群とみても，$f_1, \cdots, f_i$はA－列．また帰納法の仮定より，$f_1, \cdots, f_i$は$R(m/_{a_{i+1}A})$列．従って$a_{i+1}X, f_1, \cdots, f_i$はR(m)－列となるから，$a_{i+1}X \subset P$．
$\mathfrak{p} = P \cap A$とおく。$\mathfrak{p} \neq m$ならば，$R(m)_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}[X] \ni X$より，$PR(m)_{\mathfrak{p}} \ni a_{i+1}X$となる。ゆえに$P \ni a_{i+1}X$だから矛盾である。
従って$\mathfrak{p} = m$。そこで$P \supset mR(m) + (a_1X, \cdots, a_iX)$となる。
このとき，$\operatorname{depth} R(m)_P > i$を示す。これを証明するために(2－2)の列を$a = a_1, \cdots, a_i$までの元の列に用いてi本のR(m)加群の完全列を作る。このとき各j$(0 \leqq j \leqq i)$に対して
$\operatorname{depth} R(m/(a_1, \cdots, a_j))_P \geqq i - j + 1$が容易に示すことができる。
従って，$\operatorname{depth} R(m)_P > i$となるが，これはPのとり方に反する。
よって，$i \geqq d$となり，$f_1, \cdots, f_d$はR(m)－列。

さて，定理(2.1)の(2)⟹(1)を示すには次の式

(2－3)　$(f_1, \cdots, f_d) : f_{d+1} = (f_1, \cdots, f_d, m^d)$

を云えばよい。なぜなら，もしこれが示されたとすると，
$m^d = (a_1, \cdots, a_d) m^{d-1}$より$m^d \subset (f_1, \cdots, f_d)$が容易に示されて，
$f_1, \cdots, f_d, f_{d+1}$はR(m)－列．つまりR(m)はCohen－Macaulayとなる。

(2－3)の式は次の2つの補題を使ってValla の証明方法を用いることにより証明される。

(2.4) 補題．$(f_1, \cdots, f_i, a_2) : f_{i+1} = (f_1, \cdots, f_i, a_2)$　$(2 \leqq i < d)$

(2.8) 補題. $(f_1,\dots,f_i):a_i=(\mathfrak{m},a_1X,\dots,a_{i-1}X)$ $(2\leqq i\leqq d)$.

最後に，定理の (1) ⇒ (2) を云うことにする。(2) を云うには (2-1) より次の2つの補題が示されれば充分である。

(2.9) 補題. $R(\mathfrak{m})$ が Cohen-Macaulay ならば，$\mathfrak{m}^d=(a_1,\dots,a_d)\mathfrak{m}^{d-1}$.

この証明は $f_1,\dots,f_{d+1}$ が $R(\mathfrak{m})_M$-列をなすことを用いるとできる。

(2.10) 補題. $R(\mathfrak{m})$ が Cohen-Macaulay ならば，(2-1) が成立.

この証明には，$a_1X,\ a_1-a_2X,\dots,a_{i-1}-a_iX,\dots,a_d$ が $R(\mathfrak{m})_M$-列をなすことを用いればよい。

注. このシンポジウム以後に得られた結果をあげておく。

① パラメーターイデアルの Rees 環 $R(\mathfrak{q})$ については，$R(\mathfrak{q})$ が Cohen-Macaulay になる時，そのタイプは定まり，$R(\mathfrak{q})$ が Gorenstein になる条件が求まる。ring B に対して $r(B)$ で B のタイプを表わすことにする。

定理. $R(\mathfrak{q})$ が Cohen-Macaulay とする。

$$r(R(\mathfrak{q}))=(d-1)\cdot(K_A \text{ の生成元の個数})+\dim_{A/\mathfrak{m}}[0:\mathfrak{m}]_{H^d_{\mathfrak{m}}(A)}.$$

ここで K_A は A の canonical module.

とくに $R(\mathfrak{q})$ が Gorenstein 環 ⟺ $d\leqq 2$ かつ A は Gorenstein 環.

② 極大イデアルの場合に $R(\mathfrak{m})$ が Gorenstein になる条件は，

定理. 次は同値である。

(1) $R(m)$ は Gorenstein

(2) (i) $G_m(A)$ は Gorenstein

(ii) $\mathrm{red}(A) = \min\{i \mid m^i = q m^{i-1}$ (q はパラメーターイデアル)$\}$

とおくとき，$\mathrm{red}(A) = \max\{d-2, 1\}$ をみたす。

文　献

[1] J. Barshay, Graded algebras of powers of ideals generated by A-sequences, J. Algebra 25 (1973), 90–99.

[2] S. Goto, On the Rees algebras of the powers of an ideal generated by a regular sequence, Proceedings of the Institute of Natural Sciences, Nihon University, 13 (1978), 1–11.

[3] S. Goto and Y. Shimoda, On Rees algebras over Buchsbaum rings, preprint.

[4] M. Hochster and L. J. Ratliff, Jr., Five theorems on Macaulay rings, Pac. J. Math. 44 (1973), 147–172.

[5] J. Matijevic and P. Roberts, A conjecture of Nagata on graded Cohen-Macaulay rings, J. Math. Kyoto Univ. 14 (1974), 125–128.

[6] D. G. Northcott and D. Rees, Reductions of ideals in local rings, Proc. Camb. Phil. Soc. 50 (1954), 145–158.

[17] J. D. Sally, Cohen-Macaulay local rings of maximal embedding dimension, to appear in J. Algebra.

[18] P. Schenzel, N. V. Trung, and N. T. Cuong, Verallgemeinerte Cohen-Macaulay-Moduln, Math. Nachr. 85 (1978), 57-73.

[19] Y. Shimoda, On Rees algebras of ideals generated by a subsystem of parameters, preprint.

[20] J. Stückrad and W. Vogel, Eine Verallgemeinerung der Cohen-Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie, J. Math. Kyoto Univ., 13 (1973) 513-528.

[21] ———, Toward a theory of Buchsbaum singularities, Amer. J. Math., 100 (1978), 727-746.

[22] G. Valla, Certain graded algebras are always Cohen-Macaulay, J. Algebra, 42 (1976), 537-548.

[23] W. Vogel, A non-zero-divisor characterization of Buchsbaum modules, preprint.