数理解析研究所講究録
第374巻 1980年 174-186

擬幾何学的環の formal fiber による素イデアル鎖条件の判定

高知大理学部　小駒哲司

前の藤田さんの講演で，歴史的な経緯が述べられた次の予想を考える。

素イデアル鎖予想（Ratliff [R]）

Rをネーター整域，R'をその正規化とする。R'の任意の素イデアルの組 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ について，$R'_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}R'_{\mathfrak{q}}$ は第2素イデアル鎖条件[注)] を満たす。

この予想について，研究者の間では Rが一般の場合には怪しそうであるが，擬幾何学的環くらいを仮定すれば正しそうだという空気が強かったように思われたので，この仮定のもとで，まず素イデアル鎖予想の成立する環の特徴付けを行う。

注）　第2素イデアル鎖条件　second chain condition
　　　強素イデアル鎖条件　universally catenary
　　　弱素イデアル鎖条件　catenary

次のことは知られている。

命　題　　Rが、ネーター局所整域であれば、次は同値である。

1、Rが第2素イデアル鎖条件を満たす。

2、Rが強素イデアル鎖条件を満たす。

この命題により、次の定理は素イデアル鎖予想を満たす環の特徴付けとなっている。この定理では、Rが局所整域であることを仮定しているが、これは単に定理を述べ易くしている為だけであって、何ら本質的なものではない。

定　理　A　　Rを擬幾何学的局所整域とする。次は同値である。

1、Rの商体KとRの完備化$\hat{R}$について、$\hat{R}\otimes_R K$ は、局所的に同Krull次元。

2、正規化R'とその極大イデアル$\mathfrak{m}'$について、$\widehat{(R'_{\mathfrak{m}'})}$は同Krull次元。

3、正規化R'は、強イデアル鎖条件を満たす。

4、hensel化^hR は、弱素イデアル鎖条件を満たす。

まとめて言えば，強素イデアル鎖条件の成立に障害となる

ものは、永田先生の例に見られるような、正規化や hensel 化で消えてしまうものと、そうでないもの(存在はまだ何も言ってないが)に分けられ、そのどちらであるかは、generic formal fiber で判定できるということである。

なお、注意すべきことは、この formal fiber による判定には、擬幾何学的環であるという仮定は重要で、この条件を抜かすと、1が成立して2〜4が成立しない例を構成できる。

さて、定理Aの証明であるが、擬幾何学的環という条件を使えば証明を簡単化できるところもあるけれど、2 $\Leftrightarrow$ 3 $\Leftrightarrow$ 4 $\Rightarrow$ 1 は本質的には知られているので、ここでは省略する。

1 $\Rightarrow$ 2 を証明するには、R'が有限R加群であるということから、$\widehat{(R'_{\mathfrak{m}})}\otimes_{R'}K$ が $\hat{R}\otimes_R K$ の直和因子となることがわかる。よって次のことを示せばよい。

定 理 B　　R を擬幾何学的正規局所整域、その商体をKとする。$\hat{R}\otimes_R K$ が局所的に同 Krull 次元であれば、$\hat{R}$は同 Krull 次元である。

この定理を証明するのに、次の補題が必要である。証明は西村さんによって簡単化された。

補 題　$(R, \mathfrak{m})$ を reduced な局所環, $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ $(n \geq 2)$ を R の極小素イデアルとする。ある整数 r $(1 \leq r < n)$ について, $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{b} = \bigcap_{j=r+1}^{n} \mathfrak{p}_j$ とおいた時, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ が $\mathfrak{m}$-準素イデアルとなれば, $\operatorname{depth} R \leq 1$ である。

証明) $\operatorname{depth} R \geq 1$ と仮定してよい。R- 加群の完全列,

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{a} \oplus R/\mathfrak{b} \longrightarrow R/\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \longrightarrow 0$$

を考える。これから完全列,

$$\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, R/\mathfrak{a} \oplus R/\mathfrak{b}) \to \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, R/\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \to \operatorname{Ext}^1_R(R/\mathfrak{m}, R)$$

を得る。$\operatorname{depth} R \geq 1$ より $\operatorname{depth}(R/\mathfrak{a} \oplus R/\mathfrak{b}) \geq 1$ であるから, $\operatorname{Hom}(R/\mathfrak{m}, R/\mathfrak{a} \oplus R/\mathfrak{b}) = 0$ である。他方, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ は, $\mathfrak{m}$-準素イデアルであるから, $\operatorname{Hom}(R/\mathfrak{m}, R/\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \neq 0$ となって, $\operatorname{Ext}^1(R/\mathfrak{m}, R) \neq 0$ である。故に, $\operatorname{depth} R = 1$ である。(証明終り)

定理Bの証明)　完備局所環は, 素イデアル鎖条件を満たすことを考えれば, 任意の極小素イデアル $\mathfrak{P}$ について, $\dim \hat{R}/\mathfrak{P} = \dim \hat{R}$ を示せばよい。今そうでないとして, 矛盾に導こう。すなわち, $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_n$ を $\hat{R}$ の極小素イデア

ルとし，$\dim \hat{R}/\mathfrak{p}_i = \dim \hat{R}$ となるのは，i が $1 \leq i \leq r$ の場合に限るとし，$r < n$ と仮定する。

$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$，$\mathfrak{b} = \bigcap_{j=r+1}^{n} \mathfrak{p}_j$ とおいて，$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ の極小素イデアルを一つ選んで $\mathfrak{Q}$ とおく。必要なら，番号を付け変えることにより，$\mathfrak{Q}$ に含まれる $\hat{R}$ の極小素イデアルは，$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_t$，$\mathfrak{p}_{r+1}, \cdots \mathfrak{p}_s$（$1 \leq t \leq r$，$r+1 \leq s \leq n$）と仮定してよい。すると，$\mathfrak{p}_1\hat{R}_{\mathfrak{Q}}, \cdots, \mathfrak{p}_t\hat{R}_{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{p}_{r+1}\hat{R}_{\mathfrak{Q}}, \cdots, \mathfrak{p}_s\hat{R}_{\mathfrak{Q}}$ が $\hat{R}_{\mathfrak{Q}}$ の極小素イデアルであり，$\mathfrak{a}\hat{R}_{\mathfrak{Q}} = \bigcap_{i=1}^{t} \mathfrak{p}_i\hat{R}_{\mathfrak{Q}}$，$\mathfrak{b}\hat{R}_{\mathfrak{Q}} = \bigcap_{j=r+1}^{s} \mathfrak{p}_j\hat{R}_{\mathfrak{Q}}$ かつ $\mathfrak{a}\hat{R}_{\mathfrak{Q}} + \mathfrak{b}\hat{R}_{\mathfrak{Q}}$ は $\mathfrak{Q}\hat{R}_{\mathfrak{Q}}$-準素イデアルである。よって，補題により，depth $\hat{R}_{\mathfrak{Q}} \leq 1$ を得る。

さて，$\mathfrak{q} = R \cap \mathfrak{Q}$ とおく。

1) ht $\mathfrak{q} \geq 2$ のとき

Rは正規環だから，depth $R_{\mathfrak{q}} \geq 2$ である。ところで，$R_{\mathfrak{q}} \longrightarrow \hat{R}_{\mathfrak{Q}}$ は忠実に平坦であるから，depth $\hat{R}_{\mathfrak{Q}} \geq 2$ でなければならないが，これは上述のことに矛盾する。

2) ht $\mathfrak{q} = 1$ のとき

Rは正規環であるから，$R_{\mathfrak{q}}$ は離散的附値環であるが，その極大イデアルの生成元を $\mathfrak{t}$ とおく。$\mathfrak{Q}$ のとり方から，$\hat{R}_{\mathfrak{Q}}$ は正則環ではないので，もし $\dim \hat{R}_{\mathfrak{Q}} = 1$ とすると，$\hat{R}_{\mathfrak{Q}}/\mathfrak{t}\hat{R}_{\mathfrak{Q}}$ は reduced にならないが，これは擬幾何学的環の formal fiber が reduced であることに矛盾する。よ

って $\dim \widehat{R}_{\mathfrak{q}} > 1$ でなければならないが、その時 $\dim \widehat{R}_{\mathfrak{q}}/q\widehat{R}_{\mathfrak{q}} \geq 1$ である。一方 $\operatorname{depth} \widehat{R}_{\mathfrak{q}}/q\widehat{R}_{\mathfrak{q}} = 0$ であるから，$\widehat{R}_{\mathfrak{q}}/q\widehat{R}_{\mathfrak{q}}$ は reduced でないことになり，やはり矛盾である。

3) $ht\,\mathfrak{q} = 0$ すなわち $\mathfrak{q} = 0$ の場合

$\widehat{R}_{\mathfrak{q}}$ は $K \otimes_R \widehat{R}$ の局所化であることになり，これは定理の条件より，同Krull次元でなければならない。しかし，これは構成のし方から $\dim \widehat{R}_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}_1\widehat{R}_{\mathfrak{q}} > \dim \widehat{R}_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}_{r+1}\widehat{R}_{\mathfrak{q}}$ となることに矛盾する。

以上のことから，$\widehat{R}$は同Krull次元でなければならない。（定理Bの証明終り）

さて，定理Aの1を満たさない擬幾何学的環，すなわち素イデアル鎖予想の成立しない環を実際に構成する。これは，C. Rotthaus の例の構成法[RO] を発展させたものである。

$\mathbb{Q}$ を有理数体，$\{a_i, b_j, c_k \mid i, j, k \in \mathbb{N}\}$ を不定元の集合とする。$K = \mathbb{Q}(\{a_i, b_j, c_k \mid i, j, k \in \mathbb{N}\})$ とおく。x, y, z, w を不定元とし，

$$S = K[x, y, z, w]_{(x, y, z, w)}$$

とおけば，S は Krull 次元4の正則局所環である。

$\mathcal{P}$ を S の素元の集合であって，次の性質をもつものとする

S の高さ1のどの素イデアル $\mathfrak{p}$ についても，$\mathfrak{p}$ の生成元が $\mathcal{P}$ の中にただ一つ存在する。

S の濃度は可算，したがって $\mathcal{P}$ の濃度も可算。よって，$\mathcal{P}=\{p_k \mid k\in\mathbb{N}\}$ という形に書ける。

$$q_n=\prod_{k=1}^{n} p_k \qquad g_n=x+\sum_{k=1}^{n} a_k q_k^k$$

$$h_n=y+\sum_{k=1}^{n} b_k q_k^k \qquad l_n=z+\sum_{k=1}^{n} c_k q_k^k$$

とおこう。S の素イデアル $\mathfrak{p}_n\ (n\geq 0)$ を

$$\mathfrak{p}_0=(x,y,z)S\ ,\quad \mathfrak{p}_n=(g_n,h_n,l_n)S \qquad (n\in\mathbb{N})$$

で定義する。次の定理が成立つ。

定　理　C　　次の条件を満たす番号付け（双射）$\psi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathcal{P}$ が存在する。

$\psi(k)=p_k\ (k\in\mathbb{N})$ とおいた時，上の記号で

$$p_n\notin\mathfrak{p}_{n-1}\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

証明は，この例の構成の中で最もやっかいな部分であるが，ここでは省略する。

$\mathcal{P}=\{p_n=\psi(n)\mid n\in\mathbb{N}\}$ を定理Cの番号付けとする。
g,h,l を S の完備化 $\hat{S}$ の元で

$$g = x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n^n, \quad h = y + \sum_{n=1}^{\infty} b_n q_n^n, \quad l = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q_n^n$$

で定義されるものとする。容易にわかるように，これらはある $\sigma_{n+1}, \tau_{n+1}, \lambda_{n+1} \in \hat{S}$ により

$$g = g_n + q_{n+1}^{n+1}\sigma_{n+1}, \quad h = h_n + q_{n+1}^{n+1}\tau_{n+1}, \quad l = l_n + q_{n+1}^{n+1}\lambda_{n+1}$$

と表わせるから，$\hat{S}$ の中で関係式

$$g_n h_n = gh - q_{n+1}^{n+1}(g\tau_{n+1} + h\sigma_{n+1} - q_{n+1}^{n+1}\sigma_{n+1}\tau_{n+1}) \cdots (*)$$

$$g_n l_n = gl - q_{n+1}^{n+1}(g\lambda_{n+1} + l\sigma_{n+1} - q_{n+1}^{n+1}\sigma_{n+1}\lambda_{n+1})$$

が得られる。

S の商体を L とし，L の元 ω_n, μ_m $(n, m \in N)$ を

$$\omega_n = \frac{g_n h_n}{q_n^n}, \quad \mu_m = \frac{g_m h_m}{q_m^m}$$

で定義する。すると次の関係式が成り立つ。

$$\omega_n = q_n p_{n+1}^{n+1}(\omega_{n+1} - a_{n+1}h_{n+1} - b_{n+1}g_{n+1} + a_{n+1}b_{n+1}q_{n+1}^{n+1}) \cdots (**)$$

$$\mu_m = q_m p_{m+1}^{m+1}(\mu_{m+1} - a_{m+1}l_{m+1} - c_{m+1}g_{m+1} + a_{m+1}c_{m+1}q_{m+1}^{m+1})$$

そして，

$$R_n = S[\omega_n, \mu_n]_{(x,y,z,w,\omega_n,\mu_n)}$$

$$R = \varinjlim_n R_n \subset L$$

で R を定義すれば，R が求めるものである。実際，その為には次の (1)〜(5) を示せばよい。

(1) R はネーター環である。

$\mathfrak{g}$ を R の 0 でない素イデアルとすると，R は S と同じ商体 L をもつから，$\mathfrak{g} \cap S \neq 0$。$p(\in \mathfrak{g} \cap S)$ を S の素元とせ

よ。$n(\in \mathbb{N})$ を適当にとれば，p は $P_n=\psi(n)$ に同伴となるが，R/pR は (**) の式より S の準同型像となることがわかり，ネーターである。よって $\mathfrak{p}$ は有限生成，故にRはネーター環である。

(2) $(g,h,l)\hat{S}\cap S=0$

$\mathfrak{g}=(g,h,l)\hat{S}\cap S$ が0でないとすれば，ある $P_n\in\mathfrak{P}$ が $\mathfrak{g}$ に含まれる。そのとき，$(g_{n-1},h_{n-1},l_{n-1})S\subset\mathfrak{g}$ となり，また $P_n\notin(g_{n-1},h_{n-1},l_{n-1})S=\mathfrak{g}_{n-1}$ であるから，$ht\,\mathfrak{g}\geq 4$ となるが，これは $ht(g,h,l)\hat{S}=3$ であることに矛盾する。

(3) $\hat{R}$ は $\hat{S}/(gh,gl)$ と S 同型である。

右のdiagramを考えよう。

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & R \arrow[d, "\hat{i}"'] \arrow[ddr, "f"] \arrow[drr] & & \\
\hat{S} \arrow[r, "\hat{j}"] \arrow[drr, "p"'] & \hat{R} \arrow[dr, "\hat{f}"] & & L\otimes_S T \\
 & & \hat{S}/(gh,gl) \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}
$$

i と j は自然単射であり，Pは自然射影である。$T=\hat{S}/(gh,gl)$ は (2) によってねじれのない S-加群であるから，$k: T\longrightarrow L\otimes_S T$ は単射であり，一方 (*) の式より自然射 $R\longrightarrow L\longrightarrow L\otimes_S T$ の像は k の像に含まれることがわかる。よって S-準同型 $f: R\longrightarrow T$ が定義される。Tは完備で f は局所準同型であるから，$\hat{f}: \hat{R}\longrightarrow T$ が自然に定義される。一方 (**) の式より $S/\mathfrak{m}^n\longrightarrow R/\mathfrak{m}^nR$ （$\mathfrak{m}=(x,y,z,w)S$）は全射で

あるから $\hat{\varphi}: \hat{S} \to \hat{R}$ は全射である。再び (*) を使えば，$\hat{\varphi}(g \cdot h) \in g_n^n \hat{R}$ となるが，n は任意であるから，$\hat{\varphi}(gh)=0$ を得る。同様にして $\hat{\varphi}(g \cdot l)=0$．よって，次の S－準同型 $\hat{\varphi}'$ を得る。

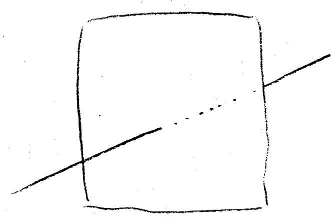
$$\hat{S}/(gh, gl) \xrightarrow{\hat{\varphi}'} \hat{R} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{S}/(gh, gl)$$

$\hat{\varphi}$ は全射であり，$\hat{f} \circ \hat{\varphi}'$ は identity であるから，$\hat{f}$ は S－同型である。

(4) R は擬幾何学的環である。

k の標数は 0 だから，(3) より R の generic formal fiber は geometrically reduced である。一方，0 でない素イデアル $\mathfrak{q}$ については，$R/\mathfrak{q}$ は S の準同型像となるから，点 $\mathfrak{q}$ での formal fiber は絶対正則となる。よって R は擬幾何学的環である。

(5) $\hat{R}_{(g,h,l)}$ は generic formal fiber の局所化であって，同 Krull 次元でない。



$\hat{R}_{(g,h,l)}$ は，(3) より曲面と曲線の交点の局所環を表わしていると考えられるが，これは (2) より generic formal fiber の局所化である。

以上により，素イデアル鎖予想の反例が構成できたが，同

様の構成法により，次のような問題に結着が付く。

1．ネーター局所整域 R であって，完備化 $\hat{R}$ が imbedded prime divisor をもつものがあるか。

2．Japanese ring ではあるが，universally Japanese ring にはならないものが存在するか。

3．擬幾何学的正則局所環は，その generic formal fiber が，絶対正規となるか。

4．K を商体とするネーター整域 A であって，任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A K/A$ について $A/\mathfrak{p}$ が Japanese ring になるとすれば，任意の 0 でない $x \in A$ について，A の $A[\frac{1}{x}]$ での整閉包 B はネーターとなるか。

1 は永田の問題［N］である。存在は，Ferrand，Raynaud［F］によって，すでに証明されているが，新らしい構成法によるものは，その imbedded prime divisor の様子が，よりわかるようになっている。

2 については，Japanese ring でない例はいろいろ知られていたが，上述の例は知られていなかった。実際このような環を構成できるのである。

3 については，正則局所環の完備化は正則局所環になるから，「絶対」の部分は擬幾何学的環という条件から帰結さ

れるかも知れないと思われる。実際，Kurke その他は [K] の中で成立すると述べているが，証明は完全でない。上述の構成法を使えば，実は成立しない例が作れる。

4 については，Bを「AのKでの整閉包」にとり換えてやれば，問題は肯定的であるが，Marot [M] はその議論を発展させて，やはり4の問題も成立すると述べている。しかしながらこれも証明は完全でなく，上述の構成法により反例ができる。

以上，今まで講演者にとって問題となった例について述べたが，その他にもこの構成法は formal fiber に関する問題を考える上で大きな力となるものと思われる。

文献

[F] D. Ferrand and M. Raynaud, *Fiber formelles d'un anneau local noetherien*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 3 (1970) 295-311

[K] H. Kurke, G. Pfister, M. Roczen, *Henselsche Ringe und algebraische Geometrie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1975.

[M] J. Marot, *Sur une question d'A. Grothendieck.* (preprint)

[N] M. Nagata, *On the chain problem of prime ideals,* Nagoya. Math. J., 10 (1956) 51-64

[R] L. J. Ratriff, Jr., *Chain conjectures in ring theory,* Lect. Notes in Math. no 647, Springer-Verlag, Berlin Hidelberg New York (1978)

[R.0] C. Rotthaus, *Universell Japanische Ringe mit nicht offenem regulärem Ort,* Nagoya Math. J. 74 (1979) 123-135