数理解析研究所講究録
第375巻 1980年 1-5

ひねった境界条件と保存則

阪大　理学部　　細谷暁夫

§1. 序

近年，場の量子論において，場の大域的なふるまいが研究されてきた．それにつれて以前余り問題にされていなかった色々な境界条件の可能性が議論されだした．[1][2]

簡単な例を挙げよう．

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - g\phi^3 \quad ,(1+1 \text{次元}) . \tag{1}$$

場を量子化するには通常系を箱　$0 \leq x \leq L$　の中に入れて，周期境界条件：

$$\phi(0) = \phi(L)$$

を課す．相互作用表示で，場は

$$\phi(xt) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2|k|}}[\,a_k e^{ikx} + a_k^+ e^{-ikx}\,] , \tag{2}$$

$$k = 2\pi/L \times \text{整数}$$

と展開され，係数間には交換関係：

$$[\,a_k\,,\,a_{k'}^+\,] = \delta_{kk'}$$

$$[\,a_k\,,\,a_{k'}\,] = [\,a_k^+,\,a_{k'}^+\,] = 0 \tag{3}$$

が設定される．

ここで通常の方法に従わないで，反周期条件：

$$\phi(0) = -\phi(L) \tag{4}$$

を採用したらどうなるかを考えてみよう．すぐにわかるように，(2)式における波数 $\overbrace{k\text{は}}^{\text{として}}$ 今度の場合

$$k = 2\pi/L \times (\text{整数} + 1/2)$$

が許される値になる．相互作用 $g\phi^3$ の部分を a と a^+ で書いてみると，

$$g \sum_{lmn} a_l a_m a_n^+ \int_0^L dx \exp\left[2\pi i/L \cdot x\left\{(l+1/2)+(m+1/2)-(n+1/2)\right\}\right] + \cdots \tag{5}$$

の形をしている．中括弧の中に $1/2$ が余計に入っているために運動量保存則：$n = l + m$ は明らかに破れている．

以下では，(4)のような"ひねった境界条件"のもとで保存則がどうなるかを $\overbrace{\text{一般的}}^{\text{かなり}}$ に考察する．[3]

§2. ネター荷電の保存

次の Lagrangian を考える．

$$L = \frac{1}{2}\sum_a (\partial_\mu \phi^a)^2 - V(\phi^1 \cdots \phi^N) \tag{6}$$

空間の次元を D とする．

L が変換：

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \qquad (|\partial x'/\partial x| = 1)$$

$$\phi^{a\prime}(x) = \phi^a(x) + \delta\phi^a(x) \tag{7}$$

に対して不変である時，

$$j^\mu(x) = L(\phi,\partial\phi)\,\delta x^\mu + \frac{\partial L(\phi,\partial\phi)}{\partial\,\partial_\mu\phi^a}\,\delta\phi^a \qquad (8)$$

が連続の式：

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \qquad (9)$$

を満足すること（ネターの定理）はよく知られている．

さてここで，ϕ^aに対して次のような"ひねった境界条件"を課すことにしよう．即ち，

$$\phi^a(x_1\cdots x_{n-1}\,L_n\,x_{n+1}\cdots) = R_{(n)}{}^a{}_b\,\phi^b(x_1\cdots x_{n-1}\,0\,x_{n+1}\cdots)$$

$$\text{s.t.}\quad R_{(n)}{}^a{}_b\,R_{(n)}{}^a{}_c = \delta_{bc} \qquad (1\leq n\leq D)\ . \qquad (10)$$

Rは単に定数要素をもつマトリクスである．これから先問題にするのは，ネター荷電：

$$Q = \int d^Dx\ j^0(x) \qquad (11)$$

が保存するかどうかである．空間としてはD次元トーラスを考えているので

$$\dot{Q} = \int d^Dx\ \dot{j}^0(x) = \sum_{n=1}^{D}\int dS^n\, j_n\ . \qquad (12)$$

従って，Qの保存は，

$$[\,j_n\,]_0^{L_n} = 0 \qquad (1\leq n\leq D)\ . \qquad (13)$$

と等価である．(13)式を(6)(8)を用いて具体的に書けば，

$$[\,L(\phi,\partial\phi)\,\delta x^n + \partial_n\phi^a\,\delta\phi^a\,]_0^{L_n} = 0 \qquad (14)$$

となる．

場合を2つ　考える．

1°) 空間に関係せず内部対称性に関する保存則の場合.

$\delta x = 0$ だから, (14)式は(10)式を代入して,

$$\partial^n (R^a_b \Phi^b)\, \delta (R^a_c \Phi^c) = \partial^n \Phi^a \delta \Phi^a \tag{15}$$

と書ける. (引数は $x_n = 0$). (10)式を考えに入れれば, (15)式, 即ちネター荷電の保存のための必要十分条件は,

$$\delta (R^a_c \Phi^c) = R^a_c \delta \Phi^c \tag{16}$$

である. 言い換えると, ひねりのオペレーター R と, 対称変換 δ が可換ならば, 対応するネター荷電は保存する.

2°) 運動量の保存則を考えている場合.

$\delta x = \mathrm{const.}$ だから (16)の条件の他に,

$$L(R\Phi) = L(\Phi) \tag{17}$$

が要求される.

最後に, (16)が成立しない例を挙げておくと, 以上にのべた事の言わんとしている点がはっきりするだろう.

<u>例</u>

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi^a)^2 - V((\Phi^a)^2) \qquad (a = 1, 2) \tag{18}$$

は O(2) 対称性をもっていて,

$$j^\mu = \epsilon^{ab} \partial_\mu \Phi^a \Phi^b \tag{19}$$

は連続の式を満足する.

"ひねった境界条件" として

$$\begin{pmatrix} \phi^1(L) \\ \phi^2(L) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \phi^1(0) \\ \phi^2(0) \end{pmatrix} ,$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

を採用しよう．明らかに．$[g, R] \neq 0$，$g \in O(2)$
だから．

$$Q = \epsilon^{ab} \int_0^L \partial_0 \phi^a \phi^b \, dx \qquad (21)$$

は保存しない．すぐ見てわかるように，この例のトポロジーはウラインのつぼになっていて．これが"ひねった境界条件"の名前の由来になっている．

参考文献

[1] C. J. Isham, Proc. R. Soc. Lond. A 363 581 ('79).

[2] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B153 141 ('79).

[3] A. Hosoya, "Twisted Boundary Conditions and Conservation Law" Osaka University Preprint OU-HET 33 November ('79).