数理解析研究所講究録
第 375 巻 1980 年 13-26

配置と特殊関数

(Onsager vortex model 及び
Dyson Complex model へのひとつの注意)

数・理 青本和彦

1. 古典的な Appell 超幾何関数, Lauricella 超幾何関数, 半単純 Lie 群上の球関数などは, 適当な代数多様体上の多重初等関数積分表示を持つ. すなわち, ある代数多様体上の hyperplane sections の配置を与え, それに附随するしかるべく複素積分を考える. その微分方程式の構造はすなわちその Gauß-Manin 接続の構造によって与えられる. もっとも簡単な例として

$$(1)\quad J = \int f_1^{\lambda_1}(x)\cdots f_m^{\lambda_m}(x)\exp(f_0(x))\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$$

($f_0, f_1, \cdots, f_m$ はいづれも線型)

の Gauß-Manin 接続は [1] にある. この場合 $f_0, f_1, \cdots, f_m$ が "一般の位置にある" という仮定をつけなければ

かなりの部分の超幾何関数を含む。
ここでは $f_1, f_2, \cdots, f_m$ が線型だが，f_0 が2次式の場合を考察する．すなわち

$$(2)\quad J' = \int \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_1^n x_j^2\right) f_1^{\lambda_1} \cdots f_m^{\lambda_m}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

の Gauß-Manin 接続を計算する．
J の場合被積分関数は affine 変換を許すから，J は affine 変換群の不変式を用いて表示された．（$f_0=0$ のときは射影変換群をとる）J' の場合は同じ理由によって直交変換群の不変式を用いて表示されねばならない．
今，$a_{jk} = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{j\nu}\alpha_{k\nu}\ (1 \leq j, k \leq m)$，

$$f_j = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{j\nu} x_\nu + \alpha_{j0} \qquad (1 \leq j \leq m),$$

$$f_0 = 1$$

$a_{00}=0$，$a_{j0} = a_{0j} = \alpha_{j0}$

とおく事により $(m+1)\times(m+1)$ の対称行列 $A = ((a_{jk}))_{0\leq j,k\leq m}$ を定義する．
J' の Gauß-Manin 接続は変数 a_{jk} を用いて表示される．以下次の仮定をおく．

$$(*)\quad \begin{cases} \text{i)}\ f_1,\dots,f_m \text{ は実で } f_1=0, f_2=0,\dots,f_m=0 \text{ は一般の位置にある,} \\ \text{ii)}\ \det A\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{pmatrix} \neq 0 \qquad 1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq m \end{cases}$$

ここで $\det A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_p \\ j_1 \cdots j_p \end{pmatrix}$ は $i_1 \cdots i_p$ 行, $j_1 \cdots j_p$ 列の小行列式, $\det A(i_1 \cdots i_p) = \det A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_p \\ i_1 \cdots i_p \end{pmatrix}$ とおく.

$\omega = -\sum_1^n x_j\,dx_j + \sum_1^m \lambda_j\,d\log f_j$ を connection ~~form~~ とする), analytic, ~~twisted~~ de Rham cohomology を $H^*(X, \nabla_\omega)$ ([2] を参照) とすれば ($X = \mathbb{C}^n - \bigcup_{j=1}^m (f_j=0)$),

Lemma 1. $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ が $\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_\sigma} \notin \mathbb{Z}^+$ $(1 \leq \sigma \leq n)(1 \leq i_1 < \cdots < i_\sigma \leq m)$ をみたせば

i) $H^p(X, \nabla_\omega) = 0 \qquad 0 \leq p \leq n-1$

ii) $H^n(X, \nabla_\omega)$ の基底として

$$\varphi(i_1 \cdots i_p) = \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n}{f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_p}}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n, \quad 0 \leq p \leq n$$

がとれる. (これについては [3] を参照)

J' の積分の輪体として線型独立なものは $\mathbb{R}^n - \bigcup (f_j=0)$ の connected components が取れる.

$$(3) \cdots\cdots \tilde{\varphi}(i_1\cdots i_p) = \int \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n x_j^2} \cdot f_1^{\lambda_1} \cdots f_m^{\lambda_m}}_{U_\lambda} \cdot \varphi(i_1\cdots i_p)$$

とおくとき $\tilde{\varphi}_{i_1\cdots i_p}$ は次の差分方程式をみたす. 計算の方法は [2] と同様.

Proposition 1. $0 \leqq p \leqq n$ に対して

$$(4) \cdots\cdots T_j \tilde{\varphi}(i_1\cdots i_p) = \int U_\lambda \cdot f_j \cdot \varphi(i_1\cdots i_p)$$

とおくとき

$$T_{i_0} \tilde{\varphi}(i_1\cdots i_p) = +\sum_{\sigma=1}^{p} \frac{\det A\binom{i_1\, i_2 \cdots i_p}{i_0\, i_1 \cdots \hat{i}_\sigma \cdots i_p}}{\det A(i_1\cdots i_p)} (-1)^{\sigma-1} \cdot$$

$$\left\{\tilde{\varphi}(i_1\cdots\hat{i}_\sigma\cdots i_p) - \alpha_{i_\sigma 0}\tilde{\varphi}(i_1\cdots i_p)\right\} + \alpha_{i_0,0}\tilde{\varphi}(i_1\cdots i_p) +$$

$$+ \sum_{k\notin(i_1,\dots,i_p)} \lambda_k \frac{\det A\binom{i_1\cdots i_p\, i_0}{i_1\cdots i_p\, k}}{\det A(i_1\cdots i_p)} \tilde{\varphi}(i_1\cdots i_p\, k),\ i_0 \notin I$$

($I = (i_1,\dots,i_p)$ とおいた);

$$T_{i_\mu}\tilde{\varphi}(i_1\cdots i_p) = \tilde{\varphi}(i_1\cdots\hat{i}_\mu\cdots i_p),\ 1\leqq\mu\leqq p$$

これは最大過剰な線型差分系である.

これを逆に解くと

<u>Prop 1′</u>　$I=(i_1,i_2,\dots,i_p)$, $0\leqq p\leqq n$ <u>に対して</u>,

$$(5)\cdots\cdots(\lambda_{i_1}-1)\,T_{i_1}^{-1}\tilde\varphi(i_1 i_2\cdots i_n) = -\left\{\sum_{k\notin I}\lambda_k \frac{\det A\binom{k\, i_1\cdots i_n}{0\, k\, i_2\cdots i_n}}{\det A(k\, i_1\cdots i_n)} + \frac{\det A\binom{0\, i_2\cdots i_n}{i_1 i_2\cdots i_n}}{\det A(i_1\cdots i_n)}\right\}\cdot$$

$$\cdot\,\tilde\varphi(i_1\cdots i_n) - \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu}\frac{\det A\binom{k\, i_2\cdots i_n}{k\, i_1\cdots\hat{i_\nu}\cdots i_n}}{\det A\binom{k\, i_1\cdots i_n}{0\, i_1\cdots i_n}}\tilde\varphi(k\, i_1\cdots\hat{i_\nu}\cdots i_n)$$

$$+\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\det A\binom{i_2\cdots i_n}{i_1\cdots\hat{i_\mu}\cdots i_n}}{\det A(i_1 i_2\cdots i_n)}(-1)^{\mu-1}\cdot\tilde\varphi(i_1\cdots\hat{i_\mu}\cdots i_n)\ ;$$

$$T_{i_0}^{-1}\tilde\varphi(i_1\cdots i_n) = \frac{1}{[i_0 i_1\cdots i_n]}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}[i_0\cdots\hat{i_\nu}\cdots i_n]\,\tilde\varphi(i_1\cdots\hat{i_\nu}\cdots i_n),$$

$$(\lambda_{i_1}-1)\,T_{i_1}^{-1}\tilde\varphi(i_1\cdots i_p) = \sum_{\nu=1}^{p}\frac{\det A\binom{i_1\cdots\hat{i_\nu}\cdots i_p}{i_2\cdots\cdots i_p}}{\det A(i_1\cdots i_p)}(-1)^{\nu+1}\tilde\varphi(i_1\cdots\hat{i_\nu}\cdots i_p)+$$

$$+\sum_{k\notin I}\lambda_k\frac{\det A\binom{i_1 i_2\cdots i_p}{i_1\cdots i_p\, k}}{\det A(i_1 i_2\cdots i_p)}(-1)^{p+\mu-1}\tilde\varphi(k\, i_1\cdots i_p),$$

$$T_{i_0}^{-1}\tilde\varphi(i_1\cdots i_p) = \tilde\varphi(i_0 i_1\cdots i_p)\quad ;$$

<u>Prop 2.</u>　J' <u>のみたす最大過剰決定系は</u>
<u>次で与えられる</u>：

(6) $$d\tilde{\varphi}_{\varphi} = \sum_{j=1}^{m} d\alpha_{j0}\cdot\lambda_j\ \tilde{\varphi}(j) + $$

$$+\ \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqq j,k\leqq m\\ j\neq k}} d\alpha_{jk}\cdot\lambda_j\lambda_k\ \tilde{\varphi}(jk)$$

(これだけでは閉じていないが，(5)と合わせれば閉じている！)

2. Dyson の <complex system> (unitary ensemble) の密度

関数は次の多重積分によって与えられる([4]参照)：

(7) $$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\Bigl(-\frac{1}{2}\sum_{j=p+1}^{n} x_j^2\Bigr)\cdot\prod_{p+1\leqq i<j\leqq n}|x_i-x_j|^{\beta}\cdot\prod_{\substack{p+1\leqq i\\ 1\leqq j\leqq p}}|x_i-x_j|^{\beta}dx_{p+1}\cdots dx_n$$

これは積分形としては(2)のカテゴリーに属する．我々はこれを $x_1,\dots,x_p$，β の関数とみて $F_n(x_1,\dots,x_p;\beta)$ とおく．$x_1,\dots,x_p$ については最大過剰決定系(holonomic 系)，β については差分系をみたす事は一般的によく知られている事だが，以下この方程式系を陽に求める事にする．

接続型式を $\omega = -\sum_1^n x_j dx_j + \beta\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\frac{d(x_i-x_j)}{x_i-x_j}$ とおく．

Lemma 1 に呼応して，(*)をみたさないが同様の考察により，

Lemma 2. β が generic（$\beta>0$，$\beta\notin\mathbb{Z}$）のとき，

(i) $H^p(X, \nabla_\omega)\cong 0 \quad p<n$

(ii) $H^n(X, \nabla_\omega)$ は

$$d\log f_{s_1}\wedge\cdots\wedge d\log f_{s_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_{n-k}}$$

（ここで $\log f_s$ は $\log(x_i-x_j)$ の形のもの）で張られる。これは又基底として

$$\frac{dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n}{(x_{i_1}-x_{j_1})\cdots(x_{i_s}-x_{j_s})},$$

$i_1>j_1,\cdots,i_s>j_s$，$p+1\leq i_1<i_2<\cdots<i_s\leq n$ を取る事が出来る。従って次元は $(p+1)(p+2)\cdots n$ である。上記微分型式を $\varphi(k_{p+1},\cdots,k_n)$ と記す（ $0\leq k_\nu\leq\nu-1$ ）：

$\nu\in(i_1,\cdots,i_s)$ のとき k_ν を対応する j_ν とおき

$\nu\notin(i_1,\cdots,i_s)$ のとき $k_\nu=0$ とおく。

積分 $\tilde{\varphi}(k_{p+1},\cdots,k_n)$ は，$x_n, x_{n-1},\cdots,x_{p+1}$ と順々に積分を行なってゆくのであるから，各段階の積分の構造を知る事によって明らかにされる。まず x_n についての積分は Pochhammer 型であり，その結果は簡単な方程式をみたす。

さらにその解を積分する，… と繰り返す.

Lemma 3. (Pochhammer 型積分の公式) ([5])

(8) $$\frac{dY}{dw} = Y\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{U_i}{w-\alpha_i} + Aw + B\right]; Y, U_i \text{ は } p\times s$$

の matrix ; において U_i は Schlesinger の方程式をみたすとする (A, B を const) :

(9) $$\begin{cases} dU_i = -\sum_{j\neq i} [U_i, U_j] \dfrac{d(\alpha_i-\alpha_j)}{\alpha_i-\alpha_j} \\ U_i A = A U_i, \quad \cancel{U_i B = B U_i}, \quad AB = BA \end{cases}$$

この時積分

(10) $$\tilde{\varphi} = \int Y \cdot \psi \, \cancel{dw}, \quad \psi \text{ rational 1-form}$$
$$\psi \in \Omega^1(\mathbb{C} - \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\})$$

は一般化された Pochhammer 方程式をみたす：

$\varphi(i) = \dfrac{dw}{w-\alpha_i}$, $\cancel{\varphi = dw}$ とおくとき

(11) $$\begin{cases} d\tilde{\varphi}(i) = \sum_{j\neq i} \dfrac{U_j\, d(\alpha_i-\alpha_j)}{\alpha_i-\alpha_j} (\tilde{\varphi}(i) - \tilde{\varphi}(j)) + \\ \qquad + A\tilde{\varphi}\, d\alpha_i + \{A\alpha_i + B\}\tilde{\varphi}(i)\, d\alpha_i, \\ d\tilde{\varphi} = -\sum_{i=1}^{m} U_i \tilde{\varphi}(i)\, d\alpha_i \end{cases}$$

$\tilde{\varphi}(k_{p+1}, \dots, k_n)$ のみたすべき Gauß-Manin 接続 ($0 \leq k_\nu \leq r-1$) を

(12) $$d\tilde{\varphi}(\cdots) = \tilde{\varphi}(\cdots)\left[\sum_{1\le i<j\le p} U_{ij}^{(p)}\, d\log(\alpha_i-\alpha_j) + \sum_{i=1}^{p}\left(A_i^{(p)}\alpha_i + B_i^{(p)}\right)d\alpha_i\right]$$

($U_{ij}^{(p)}, A_i^{(p)}, B_i^{(p)}$ はいづれも $(p+1)\cdots n \times (p+1)\cdots n$ の Matrix) とおくとき，Lemma 3 を繰り返し用いて

Lemma 4.（漸化式）

(13) $$\begin{cases} U_{ij}^{(p)} = U_{ij}^{(p)} = \xi_{ij}\otimes(\beta + U_{j,p+1}^{(p+1)}) + \xi'_{ij}\otimes(\beta + U_{i,p+1}^{(p+1)}) + 1_p\otimes U_{ij}^{(p+1)}, \\ A_j^{(p)} = e_j\otimes A_{p+1}^{(p+1)} + 1_p\otimes A_j^{(p+1)} - e_j\otimes 1_{p+1}\otimes\cdots\otimes 1_n, \\ B_j^{(p)} = -\beta e_{j0} - e_{j0}\otimes U_{j\,p+1}^{(p+1)} + e_{0j}\otimes A_j^{(p+1)} - e_{0j}\otimes 1_{p+1}\otimes\cdots \\ \qquad + e_j\otimes B_j^{(p+1)} + 1_p\otimes B_j^{(p+1)}, \end{cases}$$

ここに $\xi_{ij}, \xi'_{ij}, e_j, e_{j0}, e_{0j}$ は各 $(p+1)$ 次の行列を表わす：

$$\xi_{ij}:\ \begin{array}{c|cc} & i & j \\ \hline i & 1 & 0 \\ j & -1 & 0 \end{array} \qquad \xi'_{ij}:\ \begin{array}{c|cc} & i & j \\ \hline i & 0 & -1 \\ j & 0 & 0 \end{array} \qquad e_j:\ \begin{array}{c|c} & j \\ \hline j & 1 \end{array} \qquad e_{j0}:\ \begin{array}{c|cc} & 0 & j \\ \hline 0 & & 0 \\ j & 1 & \end{array} \qquad e_{0j}:\ \begin{array}{c|cc} & 0 & j \\ \hline 0 & & 1 \\ j & 0 & \end{array}$$

すなわち $\tilde{\varphi}(k_{p+1},\dots,k_n)$ についての Gauss-Manin 接続は $(n-p)$ 個のベクトル空間

のテンソル積 $\mathbb{C}^{p+1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}^{n}$ に作用する事になる。

差分方程式系については (4) の方程式がそのまま成立する，実際 (4) において $f_{i_1},\dots f_{i_p}, f_k$ が線型従属ならば $\det A\begin{pmatrix} i_0\, i_1 \cdots i_p \\ k\, i_1 \cdots i_p\end{pmatrix}=0$ となるので $\varphi(i_1\cdots i_p\, k)$ を含む項は無視出来る。

特に Lemma 2 において $p=0$ とおく。このとき対称群について不変な $H^{n}(X,\nabla_\omega)$ の元全体は、1次元でそれは $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ で張られる。その事から積分

(7′) $$\int \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{1}^{n} x_j^2\right)\prod_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|^{\beta}\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$$

は β の関数として Γ-因子のみを持つ事が知られる。これは Dyson conjecture として知られている。Dyson は正確な形を予想しているが，これは私には証明出来なかった（[4] 参照）。

3. Onsager vortex model の巨大標準集団の密度関数の形は

(14) ……

$$F_N(z_1\cdots z_p\,\bar z_1\cdots \bar z_p)=\int_{\mathbb{C}^{N-p}}\prod_{1\le k\le p}\prod_{p+1\le i<j\le N}(z_i-z_k)^{\beta}(\bar z_i-\bar z_k)^{\beta}(z_i-z_j)^{\beta}(\bar z_i-\bar z_j)^{\beta}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{p+1}^{N}|z_j|^2\right)\cdot$$

$$\cdot\, dz_{p+1}\cdots dz_N\, d\bar z_{p+1}\cdots d\bar z_N$$

([6]参照); $n=2N$;

この場合は (*) の i) も ii) も満たさないので一層複雑である. しかし

(15) $\tilde{F}_N(z_1\cdots z_p\ \bar{z}_1\cdots\bar{z}_p)=$

$$=\int_{\mathbb{C}^{n-p}}\prod_{1\leq k\leq p}\prod_{p+1\leq i<j\leq N}(z_i-z_k)^\beta(\bar{z}_i-\bar{z}_k)^\beta(z_i-z_j)^\beta(\bar{z}_i-\bar{z}_j)^\beta\cdot$$

$$\cdot(z_{p+1}\cdots z_N\ \bar{z}_{p+1}\cdots\bar{z}_N)^\gamma\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{j=p+1}^{N}|z_j|^2\Big]dz_{p+1}\cdots dz_N\,d\bar{z}_{p+1}\cdots d\bar{z}_N$$

を考察するときは 2. と同じように積分を帰納的に実行する事が出来る;

Lemma 5. $s\times s$ 行列 $Y(w,\bar{w})$ は次の方程式をみたすとする:

$$dY=Y\Big\{\sum_{j=0}^{m}\frac{U_j\,dw}{w-\alpha_j}+\sum_{j=0}^{m}\frac{U_j^*\,d\bar{w}}{\bar{w}-\bar{\alpha}_j}+(A^*w\,d\bar{w}+A\,\bar{w}\,dw)\Big\}$$

$(\alpha_0=0,\ \alpha_j\neq 0)$

且つ U_j, U_j^*, A, A^* は integrability conditions:

$$[U_j,U_k^*]=0,\quad [A,U_j^*]=0,\quad [A^*,U_k]=0$$

$$0=[A,U_0^*]+[U_0,A^*]+A^*-A$$

を満たしているとする. この時

積分

$$\tilde{\varphi}(jk^*) = \int Y \cdot \frac{dw \wedge d\bar{w}}{(w-\alpha_j)(\bar{w}-\bar{\alpha}_k)} \qquad 0 \leqq j, k \leqq m$$

$$\tilde{\varphi} = \int Y \, dw \wedge d\bar{w}$$

は次の微分方程式系をみたす：
($\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \bar{\alpha}_1, \cdots, \bar{\alpha}_m$ について)

$$d\tilde{\varphi} = \sum_{j=1}^{m} d\log\alpha_j \cdot U_j (A^*)^{-1} \left\{ \sum U_{k^*} \tilde{\varphi}_{jk^*} + A^* \tilde{\varphi} \right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} d\log\bar{\alpha}_j \cdot U_{j^*} A^{-1} \left\{ \sum U_k \tilde{\varphi}_{j^*k} + A \tilde{\varphi} \right\},$$

$$d\tilde{\varphi}_{jk^*} = \sum_{l \neq j,\ 0 \leqq l \leqq m} d\log(\alpha_l - \alpha_j) \cdot U_l (-\tilde{\varphi}_{lk^*} + \tilde{\varphi}_{jk^*}) +$$

$$+ A\, d\alpha_j\, \bar{\alpha}_k\, \tilde{\varphi}_{jk^*} - d\log\alpha_j \cdot A (A^*)^{-1} (U_{k^*} \tilde{\varphi}_{jk^*} + A^* \cdot \tilde{\varphi}) +$$

$$+ \sum_{l \neq k,\ 0 \leqq l \leqq m} d\log(\bar{\alpha}_l - \bar{\alpha}_k) \cdot U_{l^*} (-\tilde{\varphi}_{jl^*} + \tilde{\varphi}_{jk^*}) +$$

$$+ A^* d\bar{\alpha}_k \cdot \alpha_j\, \tilde{\varphi}_{jk^*} - d\log\bar{\alpha}_k \cdot A^* \cdot A^{-1} (U_j \tilde{\varphi}_{jk^*} + A \tilde{\varphi});$$

この Lemma を繰り返し用いれば (15) の満たす微分方程式が得られるが，複雑なので省略する．

4.（結論） i) $\beta = 1, 2, 4$ のとき Dyson の

complex system は 1次元 ~~理~~想 Bose ガス模型とも関連してよくわかっている。それらは $N \mapsto \infty$ のとき Fredholm 行列式を用いて表わされており、最近の Sato-Miwa-Jimbo 理論の枠組の中に入っているらしい。 β が一般の時或いは Onsager vortex 模型のときに類似の現象があるかないかはよくわからない([9] 参照)

ii) J, J' のような積分を不変式の拡張として把える事は興味があるかもしれない。 J において $f_0, f_1, \cdots, f_m$ が 2次式の場合はどうであろうか? この場合はすく矢 Feynmann 図形に附随する複素積分を含んでおり、応用はさらに広がるであろう。([8] 参照)

[1] K. AOMOTO, Sci. Papers, Colle. of Gene. Ed., Univ. of Tokyo, Vol 27 (1977), 49-61

[2] ——, J. of Fac. Sci., Univ. of Tokyo, 22 (1975), 271-297

[3] ——, ibid (1980), to appear

[4] F.J. Dyson, Commun. Math. Phys. 47 (1976), 171-183

[5] K. AOMOTO ; J. de Math., pures et appliquées, Tom 52(1973), 1 ~ 11

[6] T.S. Lundgrin and Y.B. Pointin , J. of Stati. Phys. Vol 17(1977),

[7] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri and M. Sato, Density matrix of impenetrable bose gas and the fifth Painlevé transcendent, (1979) preprint

[8] M. Kashiwara, T. Kawai and H.P. Stapp, Commun. Math. Phys. 66 (1979), 95-130 .