数理解析研究所講究録
第375巻 1980年 47-73

2階線型微分方程式の変形について

東大 理　　木村俊房

はじめに.

本稿はこの短期共同研究において話したことにその後分ったことを加えたものである.

2階線型常微分方程式の変形はPainlevéの方程式と深く結びついている. Painlevéの方程式については岡本和夫氏が詳しく書くであろうから省略してもよかったのであるが, それと変形の関係について書くことにした. その理由は岡本氏と違う記号を用いるかも知れず, また私自身の頭を整理することにある. 個人的理由でパルプを無駄使いするのは気が引けるが, しかし一般の読者にはその方が読みやすいだろうというのが筆者の辯解である.

ある方程式に, たとえば, 変換

$$\lambda = 1+\varepsilon\lambda_1, \quad t = \varepsilon t_1$$

を行い, 変換された方程式で, λ_1 を λ に, t_1 を t に変えるこ

とき簡単に，変換

$$\lambda \longrightarrow 1+\varepsilon\lambda, \quad t \longrightarrow \varepsilon t$$

を行うと書くことにする．

§1. Painlevé の方程式

動く分岐点をもたない代数的常微分方程式の決定は常微分方程式論における重要な問題の1つである．1階の場合はすでに前世紀中に解決された．2階の場合は，完全に決定されたのは有理的方程式に止まっている．2階有理的方程式の決定後80年たつが，その後この方面での進展は大したことはない．その理由はいろいろあろうが，問題が難しいというのが最大の理由であろう．有理的方程式であっても，ともかく2階の方程式が決定されたのは Painlevé の天才的着想によるものである．まず Painlevé の結果を述べておく．

2階微分方程式

$$(1.1) \qquad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = R\left(t, \lambda, \frac{d\lambda}{dt}\right)$$

で R は ~~t~~ λ, λ' については有理的，t については解析的とする．もし (1.1) が動く分岐点をもたなければ，

i) 1階の方程式に帰着されるか，つまり代数的オ1積分をもつか，

ii)　3階線型微分方程式に帰着されるか,

iii)　次の6つの方程式のどれかに帰着されるかである. 6つの方程式は実際動く分岐点をもたない.

(I)　$$\lambda'' = 6\lambda^2 + t$$

(II)　$$\lambda'' = 2\lambda^3 + t\lambda + \alpha$$

(III)　$$\lambda'' = \frac{1}{\lambda}\lambda'^2 - \frac{1}{t}\lambda' + \frac{1}{t}(\alpha\lambda^2+\beta) + \gamma\lambda^3 + \frac{\delta}{\lambda}$$

(IV)　$$\lambda'' = \frac{1}{2\lambda}\lambda'^2 + \frac{3}{2}\lambda^3 + 4t\lambda^2 + 2(t^2-\alpha)\lambda + \frac{\beta}{\lambda}$$

(V)　$$\lambda'' = \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda-1}\right)\lambda'^2 - \frac{1}{t}\lambda' + \frac{(\lambda-1)^2}{t^2}\left(\alpha\lambda + \frac{\beta}{\lambda}\right) + \frac{\gamma\lambda}{t} + \frac{\delta\lambda(\lambda+1)}{\lambda-1}$$

(VI)　$$\lambda'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right)\lambda'^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right)\lambda' + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha + \frac{\beta t}{\lambda^2} + \frac{\gamma(t-1)}{(\lambda-1)^2} + \frac{\delta t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right).$$

ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数である.

Painlevé が発見したのは(I)～(III)で, Painlevé の計算に見落しがあることに気が付き, (IV)～(VI)を補足したのがその弟子の Gambier である. しかし, (I)～(VI)は Painlevé の方程式といわれている.

Painlevé の方程式の番号付けがやさしいものからむずかしいものということにすれば, (III)と(IV)とは番号を交換すべきである. 以下では, 混乱を承知の上で<u>番号(III)と(IV)を交換する</u>ことにした。

Painlevéの方程式について知られていることを2,3まとめておいた。

a) Painlevéの方程式(V)~(I)は次の順序で(VI)から出発し順次退化したものとみなせる:

$$
\begin{tikzcd}
 & & (\mathrm{IV}) \arrow[dr] & & \\
(\mathrm{VI}) \arrow[r] & (\mathrm{V}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (\mathrm{II}) \arrow[r] & (\mathrm{I}) \\
 & & (\mathrm{III}) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

すなわち、矢印の左の方程式に対し、パラメータ ε を含む適当な変換を行い、つぎに $\varepsilon\to 0$ とすることにより矢印の右の方程式が得られる。以下、その変換を記しておく。

$(\mathrm{VI})\to(\mathrm{V})$: $t\to 1+\varepsilon t,\ \gamma\to -\dfrac{\delta}{\varepsilon^2}+\dfrac{\gamma}{\varepsilon},\ \delta\to\dfrac{\delta}{\varepsilon^2}$.

$(\mathrm{V})\to(\mathrm{IV})$: $t\to t^2,\ \lambda\to 1+\varepsilon t\lambda,$

$\alpha\to\dfrac{\gamma}{\varepsilon^2}+\dfrac{\alpha}{\varepsilon},\ \beta\to -\dfrac{\gamma}{\varepsilon^2},\ \gamma\to\varepsilon\beta,\ \delta\to\varepsilon^2\delta$

$(\mathrm{V})\to(\mathrm{III})$: $t\to 1+\sqrt{2}\,\varepsilon t,\ \lambda\to\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\lambda,$

$\alpha\to\dfrac{1}{2\varepsilon^4},\ \beta\to\dfrac{\beta}{4},\ \gamma\to -\dfrac{1}{\varepsilon^4},\ \delta\to +\dfrac{1}{2\varepsilon^4}+\dfrac{\alpha}{\varepsilon^2}$

$(\mathrm{IV})\to(\mathrm{II})$: $t\to 1+\varepsilon^2 t,\ \lambda\to 1+2\varepsilon\lambda,$

$\alpha\to -\dfrac{1}{2\varepsilon^6},\ \beta\to\dfrac{1}{2\varepsilon^6}(1+4\alpha\varepsilon^3)$

$\gamma\to\dfrac{1}{4\varepsilon^6},\ \delta\to -\dfrac{1}{4\varepsilon^6}$

$(\mathrm{III})\to(\mathrm{II})$: $t\to -\dfrac{1}{\varepsilon^{3/2}}\left(1-\dfrac{\varepsilon^2}{2^{2/3}}t\right),\ \lambda\to\dfrac{1}{\varepsilon^{3/2}}\left(1+\dfrac{2\varepsilon}{2^{1/3}}\lambda\right),$

$\alpha\to -\dfrac{1}{2\varepsilon^3}\alpha,\ \beta\to -\dfrac{1}{2\varepsilon^6}$

$(\mathrm{II})\to(\mathrm{I})$: $t\to -\dfrac{6}{\varepsilon^{5/3}}\left(1+\dfrac{\varepsilon^2}{6}t\right),\ \lambda\to\dfrac{1}{\varepsilon^{5/6}}(1+\varepsilon\lambda),\ \alpha\to\dfrac{4}{\varepsilon^{5/2}}$.

b) 変数 μ を適当に導入して，Painlevéの方程式を λ, μ に関する方程式系

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dt} = P(t, \lambda, \mu) \\[2ex] \dfrac{d\mu}{dt} = Q(t, \lambda, \mu) \end{cases}$$

に書き直し，P, Q を次のようにとることができる．

i) P, Q は λ, μ の多項式で係数は t の有理関数，

ii) (1.2) は Hamilton 系，すなわち，

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = P, \quad -\frac{\partial H}{\partial \lambda} = Q$$

を満たす関数 $H(t, \lambda, \mu)$ が存在する．

以上のことから，Painlevé の方程式は，それに対応する Hamilton 関数 H から方程式系

$$(1.3) \qquad \lambda' = \partial H/\partial\mu, \quad \mu' = -\partial H/\partial\lambda$$

を作り，それから μ を消去すれば得られる．念のため Hamilton 関数を列挙しておこう

(I) : $H_{I} = \frac{1}{2}\mu^2 - (2\lambda^3 + \lambda t)$

(II) : $H_{II} = \frac{1}{2}\mu^2 - \left(\lambda^2 + \frac{t}{2}\right)\mu - \frac{2\alpha+1}{2}\lambda$

(III) : $H_{III} = 2\lambda\mu^2 - (\lambda^2 + 2t\lambda + 2\theta_0)\mu + \theta_\infty\lambda$

(IV) : $H_{IV} = \frac{1}{t}\left[2\lambda^2\mu^2 - (2\eta_\infty t\lambda^2 + (2\theta_0 + 1)\lambda - 2\eta_0 t)\mu + \eta_\infty(\theta_\infty + \theta_0)t\lambda\right)$

(V) $H_{V} = \frac{\lambda(\lambda-1)^2}{t}\left[\mu^2 - \left(\frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\eta_1 t}{(\lambda-1)^2} + \frac{\theta_1}{\lambda-1}\right)\mu + \frac{1}{4}\left((\theta_0+\theta_1)^2 - \theta_\infty^2\right)\frac{1}{\lambda(\lambda-1)}\right]$

(VI) $H_{VI} = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)}\left[\mu^2 - \left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} + \frac{\theta_t - 1}{\lambda - t}\right)\mu + \frac{1}{4}\left((\theta_0+\theta_1+\theta_t-1)^2 - \theta_\infty^2\right)\frac{1}{\lambda(\lambda-1)}\right]$

ここで $\theta_0, \theta_1, \cdots, \eta_0, \eta_1, \cdots$ は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ から次の関係式によって定まる定数である.

(III): $\alpha = -\theta_0 + 2\theta_\infty + 1, \quad \beta = -2\theta_0^2$

(IV): $\alpha = -4\eta_\infty\theta_\infty, \quad \beta = 4\eta_0(\theta_0+1), \quad \gamma = 4\eta_\infty^2, \quad \delta = -4\eta_0^2$

(V): $\alpha = \frac{1}{2}\theta_\infty^2, \quad \beta = -\frac{1}{2}\theta_0^2, \quad \gamma = -\eta_1(\theta_1+1), \quad \delta = -\frac{1}{2}\eta_1^2$

(VI): $\alpha = \frac{1}{2}\theta_\infty^2, \quad \beta = -\frac{1}{2}\theta_0^2, \quad \gamma = \frac{1}{2}\theta_1^2, \quad \delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\theta_t^2.$

Painlevé の方程式に対し, それに対する Hamilton 関数は一通りにきまるというわけでない. 実際, たとえば (VI) をみると, $\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty$ はそれぞれ2通りのとり方がある.

Painlevé の方程式に対する方程式系 (1.3) を Painlevé 系といい, 同じ番号をつけることにする. 上に記した H に対応する Painlevé 系を岡本の才1種標準形とよぶことにしよう.

c) Painlevé の方程式について a) でのべたことは Painlevé 系に翻訳される. 岡本の才1種標準形に対する変換と Hamilton 関数の変化を記しておく.

(VI)→(V): $t \to 1+\varepsilon t, \quad \lambda \to \lambda, \quad \mu \to \mu$

$$\theta_0 \to \theta_0, \quad \theta_1 \to \frac{\eta_1}{\varepsilon} + \theta_1 + 1, \quad \theta_t \to -\frac{\eta_1}{\varepsilon}, \quad \theta_t \to \theta_t,$$

$$\varepsilon H_{VI} \to H_V \quad (\varepsilon \to 0)$$

最後の式の意味は H_{VI} に対し上記変換を行い, それに ε を掛けたものが $\varepsilon \to 0$ の時 H_V に収束することである. 以下も同様とする.

$(\mathrm{V}) \to (\mathrm{IV})$: $\quad t \to t^2,\ \lambda \to 1+\varepsilon t\lambda,\ \mu \to \dfrac{\mu}{\varepsilon t}$

$$\theta_0 \to \frac{\eta_\infty}{\varepsilon},\ \eta_1 \to \varepsilon\eta_0,\ \theta_1 \to \theta_0,\ \theta_\infty \to \frac{\eta_\infty}{\varepsilon} - \theta_\infty,$$

$$H_{\mathrm{V}} \to \frac{1}{2t}\left(H_{\mathrm{IV}} + \frac{\lambda\mu}{t}\right) \quad (\varepsilon \to 0).$$

$(\mathrm{V}) \to (\mathrm{III})$: $\quad t \to 1+\sqrt{2}\,\varepsilon t,\ \lambda \to \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\lambda,\ \mu \to \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\mu$

$$\theta_0 \to \theta_0,\ \eta_1 \to -\frac{1}{\varepsilon^2},\ \theta_1 \to +\frac{1}{\varepsilon^2} + 2\theta_\infty - \theta_0,\ \theta_\infty \to \frac{1}{\varepsilon^2},$$

$$\sqrt{2}\,\varepsilon\left(H_{\mathrm{V}} + \frac{1}{4}\left((\theta_0+\theta_1)^2 - \theta_\infty^2\right)\right) \to H_{\mathrm{III}} \quad (\varepsilon \to 0)$$

$(\mathrm{IV}) \to (\mathrm{II})$: $\quad t \to 1+\varepsilon^2 t,\ \lambda \to 1+2\varepsilon\lambda,\ \mu \to \dfrac{1}{2\varepsilon}\mu$

$$\theta_0 \to -\frac{1}{2\varepsilon^3} - 2\alpha - 1,\ \eta_0 \to -\frac{1}{4\varepsilon^3},\ \eta_\infty \to \frac{1}{4\varepsilon^3},\ \theta_\infty \to -\frac{1}{2\varepsilon^3}$$

$$\varepsilon^2\left(H_{\mathrm{IV}} - \eta_\infty(\theta_\infty + \theta_0)\right) \to H_{\mathrm{II}} \quad (\varepsilon \to 0)$$

$(\mathrm{III}) \to (\mathrm{II})$: $\quad t \to -\dfrac{1}{\varepsilon^{3/2}}\left(1 - \dfrac{\varepsilon^2}{2^{2/3}}t\right),\ \lambda \to \dfrac{1}{\varepsilon^{3/2}}\left(1+2^{2/3}\varepsilon\lambda\right),\ \mu \to \dfrac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2^{2/3}}\mu$

$$\theta_0 \to \frac{1}{2\varepsilon^3},\ \theta_\infty \to -\frac{2\alpha+1}{2}$$

$$2^{-\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(H_{\mathrm{III}} + \frac{2\alpha+1}{2\varepsilon^{3/2}}\right) \to H_{\mathrm{II}} \quad (\varepsilon \to 0).$$

Painlevé系(II)を上のように与えないで

$$\begin{cases} \lambda' = \mu \\ \mu' = 2\lambda^3 + t\lambda + \alpha \end{cases}$$

とすれば、これからa)と同様に(I)が導かれる。

§2. 動く分岐点を持たない多項式型2連立方程式系

Painlevéによって動く分岐点を持たない2階有理的方程式が決定された後、目標が動く分岐点を持たない高階有理的方程式、2階代数的方程式、有理的方程式系の決定へと移

ったのは当然であるが，結果はいずれも極めて不完全なものであった。

有理的2連立系

$$(2.1) \quad \begin{cases} \lambda' = P(t, \lambda, \mu) \\ \mu' = Q(t, \lambda, \mu) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} P, Q \text{ は } \lambda, \mu \text{ について有理的，} t \text{ について} \\ \text{解析的} \end{array} \right)$$

を目標とするとき，まず P, Q が λ, μ の多項式の場合から調べるが自然である．実際 Painlevé 系はそうなっている．以下；P, Q は λ, μ の多項式で係数は t の解析関数とする．P, Q の λ, μ についての次数の大きい方を m としよう．まず，Painlevé 系に対しては

$$m = 2, 3, 4, 5$$

であって，P の μ に関する次数は常に 1，Q の μ についての次数は 0，1，2 であることに注意しておく．

お茶水女子大学の松田千鶴子教授と筆者は m が小さい場合にしらみつぶしに調べてみた．ただし計算の大半は松田教授による．$m=5$ のとき，1つの場合がチェック不十分であるが，$m=2, 3, 4, 5$ ならば，Painlevé 系 (I) ～ (VI) が現われ，それ以外新しい型の方程式系は得られなかった。詳しくいうと，1階の方程式，3階の線型方程式に帰着される場合を除くと，Painlevé 系 (I) ～ (VI) のどれかに帰着してしまうのである．たとえば，$m=2$ のときには Painlevé 系 (I)，(II)，(III) が得ら

れる.

$m=6$ の場合から次の方程式系

$$
(2.2)\quad
\begin{cases}
\lambda' = \dfrac{1}{t(t-1)}\Big(3\lambda^4\mu^2 - 2(a+b+c)\lambda^3\mu - 2(t+1)\lambda^2\mu + (ab+bc+ca)\lambda^2 \\
\qquad\qquad + (dt-d+a+b+c)\lambda + t\Big) \\
\mu' = \dfrac{1}{t(t-1)}\Big(-4\lambda^3\mu^3 + 3(a+b+c)\lambda^2\mu^2 + 2(t+1)\lambda\mu^2 - 2(ab+bc+ca)\lambda\mu \\
\qquad\qquad - (dt-d+a+b+c)\mu + abc\Big)
\end{cases}
$$

が得られた. ここで a, b, c, d は定数である. この方程式系も

$$
H = \frac{1}{t(t-1)}\Big(\lambda^4\mu^3 - (a+b+c)\lambda^3\mu^2 - (t+1)\lambda^2\mu^2 + (ab+bc+ca)\lambda^2\mu + (dt-d+a+b+c)\lambda\mu + t\mu - abc\lambda\Big)
$$

を Hamilton 関数と Hamilton 系である.

変換

$$\lambda \longrightarrow \frac{1}{\mu},$$

$$\mu \longrightarrow a\mu + \mu^2\lambda \qquad (a \text{ は } b, c \text{ でおきかえてよい})$$

によって, (2.2) は多項式型の方程式系に移ることは松田−木村によって知られていたが, 岡本によって変換された方程式系は Painlevé 系(VI)であることが確認された. パラメータの間の関係は次のようである.

$$\theta_0 = -a,\quad \theta_1 = d-a,\quad \theta_t = b+c-d+1,\quad \theta_\infty = c-b.$$

動く分岐点を持たない方程式の決定は 2 段階に分けられる. まず, 動く分岐点を持たないための必要条件を求め, そ

れによって方程式の形をきめて行く。こうして得られた方程式が実際に動く分岐点を持たないことを証明する。Painlevé は必要条件を求めるため、いわゆる"パラメータの導入とその極限化法"を案出した。我々の方法も Painlevé の方法を活用することにある。2階有理的方程式の決定でもそうであったように、次数 m が小さくても計算は容易でない。厖大な計算から得た我々の感触は、多項式型の系からは Painlevé 系しか得られないであろうということである。

では、有理的の場合はどうであろうか。松田教授は簡単な場合から当っている。

§3. 2階線型微分方程式の変形による Painlevé 系の導出.

Painlevé の方程式が発見されて間もなく、R. Fuchs（Fuchs の理論で有名な L. Fuchs の息子）によって、まったく違った観点から Painlevé の方程式 (VI) が導き出された。彼は2階線型方程式

$$y'' = \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\lambda)^2} + \frac{\rho}{x} + \frac{\sigma}{x-1} + \frac{\tau}{x-t} + \frac{\omega}{x-\lambda}\right)y \tag{3.1}$$

から出発する。この方程式は

$$x = 0,\ 1,\ t,\ \infty$$

に確定特異点をもつ Fuchs 型の方程式で，その Riemann 図式は

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & t & \lambda & \infty \\ \frac{1-\theta_0}{2} & \frac{1-\theta_1}{2} & \frac{1-\theta_t}{2} & -\frac{1}{2} & \nu \\ \frac{1+\theta_0}{2} & \frac{1+\theta_1}{2} & \frac{1+\theta_t}{2} & \frac{3}{2} & \nu+\theta_\infty \end{matrix}\right\}$$

である．$x=0, 1, t, \lambda$ における指数の和はすべて 1（したがって y' の係数は 0 である），積はそれぞれ $-a, -b, -c, -\frac{3}{4}$ に等しいことに注意しておく．また，$x=0, 1, t, \lambda, \infty$ における指数の差はそれぞれ（± を除いて）$\theta_0, \theta_1, \theta_t, 2, \theta_\infty$ である．

$x=\infty$ が確定特異点であることから

(3.2) $$\rho+\sigma+\tau+\omega=0$$

である．

まず，$x=\lambda$ はみかけの特異点，すなわち，$x=\lambda$ における基本解系に対数項が現われないとする．そのための必要十分条件は

(3.3) $$\mu^2-\left(\frac{a}{\lambda^2}+\frac{b}{(\lambda-1)^2}+\frac{c}{(\lambda-t)^2}+\frac{\rho}{\lambda}+\frac{\sigma}{\lambda-1}+\frac{\tau}{\lambda-t}\right)=0$$

である．

この仮定のもとで，R. Fuchs は (3.1) に含まれるパラメータ $t, \rho, \sigma, \tau, \omega, a, b, c$ を動かしたとき，(3.1) の monodromy 群が不変であるための条件をもとめた．そのとき，$x=0, 1, t, \infty$ での指数は mod 1 で不変である．したがって，解析的なカテゴリーで考えれば，a, b, c は定数としてよい．さらに，

$x=\infty$ での指数が定数であることから

$$\sigma + t\tau + \lambda\omega \equiv \kappa \quad (\kappa\text{は定数}) \tag{3.4}$$

である. (3.2), (3.4) から (3.1) は

$$y'' = \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(x-\lambda)^2} + \frac{\kappa}{x(x-1)} + \frac{t(t-1)\tau}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\omega}{x(x-1)(x-\lambda)}\right)y$$

と書ける.

R. Fuchs は ω は t の関数として, Painlevé の方程式(VI)を満たすことことを示したのである. 彼のアイデアは次のようなものである.

パラメータ $t, \lambda_1, \lambda_2, \cdots$ を含む方程式

$$y'' = p(x, t, \lambda_1, \lambda_2, \cdots)y$$

を考える. パラメータ t を動かしたとき, その monodromy 群が t によらないためには他のパラメータ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ を t の適当な関数 $\lambda_1=\lambda_1(t)$, $\lambda_2=\lambda_2(t), \cdots$ とすればよいかも知れない. そのとき,

$$p(x,t) = p(x, t, \lambda_1(t), \lambda_2(t), \cdots)$$

とおけば,

$$y'' = p(x,t)y \tag{3.5}$$

が t に依存しない monodromy 群をもつ. そのための条件は (3.5) の基本解系 $\vec{y}(x,t) = (y_1(x,t), y_2(x,t))$ を適当に選んだとき,

$$(3.6)\qquad \frac{\partial \vec{y}}{\partial t}(x,t) = A(x,t)\vec{y}(x,t) + B(x,t)\frac{\partial \vec{y}}{\partial x}(x,t)$$

を満たす関数A, B（xについて有理的）が存在することである.

(3.6)と

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial x}(x,t) = p(x,y)\vec{y}(x,t)$$

との完全積分可能条件として，A, Bに対する偏微分方程式系が得られる. Aは簡単に消去できて，Bは

$$(3.7)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial^3 B}{\partial x^3} - 2p\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}B + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

を満さなければならないことが分る.

R. Fuchs は (3.1) の各特異点における標準的基本解の展開式から，Bは xについて

$$B(x,t) = J\frac{x(x-1)}{x-\lambda} = Jx + K + \frac{L}{x-\lambda}$$

の形であることを確め，Bとpとを(3.7)に代入し，ρ, σ, τ, ω, J, K, L に対する条件を求めた. これからλは Painlevé の方程式(VI)を満たし，ρ, σ, τ, ω は t, λ, $d\lambda/dt$ の有理関数であることを示した.

次いで，Garnier は

$$(3.8)\qquad y'' = \Big(\frac{a}{x^2} + \frac{bt^2}{(x-1)^4} + \frac{ct}{(x-1)^3} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\lambda)^2} + \frac{t\tau}{x(x-1)^2} + \frac{\lambda(\lambda-1)\omega}{x(x-1)(x-\lambda)}\Big)y,$$

$$(3.9)\qquad y'' = \Big(\frac{at^2}{x^4} + \frac{bt}{x^3} + \frac{\tau}{x^2} + \frac{ct}{x} + dt^2 + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\lambda)^2} + \frac{\lambda\omega}{x(x-\lambda)}\Big)y,$$

$$(3.10)\qquad y''=\left(\frac{a}{x^2}+\frac{\tau}{x}+b+\frac{x^2}{16}+\frac{tx}{4}+\frac{t^2}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{(x-\lambda)^2}+\frac{\lambda\omega}{x(x-\lambda)}\right)y,$$

$$(3.11)\qquad y''=\left(x^4+tx^2+2ax+\tau+\frac{3}{4}\frac{1}{(x-\lambda)^2}+\frac{\omega}{x-\lambda}\right)y,$$

$$(3.12)\qquad y''=\left(4x^3+2tx+\tau+\frac{3}{4}\frac{1}{(x-\lambda)^2}+\frac{\omega}{x-\lambda}\right)y$$

を考え，(3.6)，したがって(3.7)をみたすBの存在を仮定して，Painlevéの方程式(V)〜(I)を導いた．Garnierは§1, a)で述べたPainlevé (VI)から(V)〜(I)を導いた変換を利用して(3.1)から(3.8)〜(3.12)を導いたものと想像される．

方程式(3.8)〜(3.12)はもはやFuchs型ではなく，不確定特異点をもつが，そのとき，(3.6)を満たすA, Bの存在の意味をGarnierは何も書いていないから，彼は形式的にFuchsのまねをしたのかも知れない．その意味をはっきり述べたのは岡本氏である．すなわち，彼は，(3.6)をみたすA, Bの存在はmonodromy群の不変だけではなく，不確定特異点でのStokesの接続行列の不変性を加えたものと同値であることを示した．

Fuchs も Garnier も λ にのみ注目してPainlevéの方程式を得たが，その一歩前の λ と ω に対する方程式系に注意すると，それはHamilton系である．そのHamilton関数は τ（τ は $x=\lambda$ がみかけの特異点であることから，t, λ, ω の関数となる）を少し変形したものである．

方程式 (3.8)〜(3.12) の Riemann図式を与えておこう.

(3.8)
$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{1}} & \lambda & \infty \\ \frac{1-\theta_0}{2} & -\sqrt{b}\,t & \frac{c}{2\sqrt{b}}+1 & -\frac{1}{2} & \nu \\ \frac{1+\theta_0}{2} & \sqrt{b}\,t & -\frac{c}{2\sqrt{b}}+1 & \frac{3}{2} & \nu+\theta_\infty \end{array}\right\}$$

(3.9)
$$\left\{\begin{array}{ccccc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{0}} & \lambda & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\infty}} \\ -\sqrt{a}\,t & \frac{b}{2\sqrt{a}}+1 & -\frac{1}{2} & -\sqrt{d}\,t & +\frac{c}{\sqrt{d}} \\ \sqrt{a}\,t & -\frac{b}{2\sqrt{a}}+1 & \frac{3}{2} & \sqrt{d}\,t & -\frac{c}{\sqrt{d}} \end{array}\right\}$$

(3.10)
$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \lambda & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\infty}} \\ \frac{1-\theta_0}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{t}{2} & b+\frac{1}{2} \\ \frac{1+\theta_0}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} & \frac{t}{2} & -b+\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

(3.11)
$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\infty}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{t}{2} & a+1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{t}{2} & -a+1 \end{array}\right\}$$

(3.12)
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & \multicolumn{6}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\infty *}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & -t & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & t & \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

こゝで

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{0}} \\ a & b \\ a' & b' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\infty}} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}$$

などの記号は福原によるもので, $x=0$ で形式解

$$e^{\frac{a}{x}} x^{b} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k, \quad e^{\frac{a'}{x}} x^{b'} \sum \alpha'_k x^k$$

をもつこと，　$x=\infty$ で形式解

$$e^{ax^2+bx}x^{-c}\sum \alpha_k x^{-k},\quad e^{a'x^2+b'x}x^{-c'}\sum \alpha'_k x^{-k}$$

をもつことを示している．最後の

$$\begin{array}{cccccc} \multicolumn{6}{c}{\overbrace{\hphantom{-\frac{4}{5}\quad 0\quad 0\quad 0\quad t\quad \frac{3}{4}}}^{\infty^*}} \\ -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & -t & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & t & \frac{3}{4} \end{array}$$

は $x=\infty$ で形式解

$$e^{-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}-tx^{\frac{1}{2}}}x^{-\frac{3}{4}},\quad e^{\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+tx^{\frac{1}{2}}}x^{-\frac{3}{4}}$$

を持つことを示している．

(3.8)～(3.12) に対応する B の形は次の通りである．

(3.8)　$B = J\dfrac{x(x-1)}{x-\lambda} = Jx + K + \dfrac{L}{x-\lambda}$

(3.9)　$B = Jx + K + \dfrac{L}{x-\lambda}$

(3.10)　$B = K + \dfrac{L}{x-\lambda}$

(3.11)　$B = \dfrac{L}{x-\lambda}$

(3.12)　$B = \dfrac{L}{x-\lambda}$.

§4. 岡本による修正

まず，次のことに注意しよう．方程式

(4.1)　$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$

は変換

$$y \longrightarrow y\exp\left(-\int \frac{p_1}{2}dx\right)$$

によって

$$y'' = p\,y$$

に移る．こゝで

(4.2) $$p = \frac{1}{2}p_1' + \frac{1}{4}p_1^2 - p_2 .$$

p_1, p_2 がパラメータ t を含み，(4.1) の monodromy 群およびStokes の接続行列が t によらなければ，やはり

(4.3) $$\frac{\partial \vec{y}}{\partial t} = A\vec{y} + B\frac{\partial \vec{y}}{\partial x}$$

を満たす $\vec{y}$, A, B が存在する．(4.1) と (4.3) との完全積分可能条件から A を消去すれば，当然ながら，p を (4.2) で定義すれば，(3.7) が得られる．

岡本氏は方程式 (3.1) の代りに，その Riemann 図式が

$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & t & \lambda & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_t & 2 & \nu+\theta_\infty \end{Bmatrix}$$

となる方程式を考えた．これは

$$y'' + \left(\frac{1-\theta_0}{x} + \frac{1-\theta_1}{x-1} + \frac{1-\theta_t}{x-t} - \frac{1}{x-\lambda}\right)y'$$
$$+ \left(\frac{\kappa}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)H}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{x(x-1)(x-\lambda)}\right)y = 0$$

と書かれる．こゝで

$$\kappa = \frac{1}{4}\left((\theta_0+\theta_1+\theta_t-1)^2 - \theta_\infty^2\right),$$

こゝで変形を行うと，まさにPainlevé系(VI)が得られ，Hがその Hamilton 関数であることに気付いたのである．この線型方程式も(VI)で表わすことにする．

これに対応することがPainlevé系(V)～(I)に対して成り立つのである．線型方程式とそのRiemann図式を書き上げておこう．

$$(\mathrm{V}):\quad y''+\left(\frac{1-\theta_0}{x}+\frac{\eta_1 t}{(x-1)^2}+\frac{1-\theta_1}{x-1}-\frac{1}{x-\lambda}\right)y' +\left(\frac{\kappa}{x(x-1)}-\frac{tH}{x(x-1)^2}+\frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{x(x-1)(x-\lambda)}\right)y=0$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hphantom{\eta_1 t\quad \theta_1+1}}^{1}} & \lambda & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \\ \theta_0 & \eta_1 t & \theta_1+1 & 2 & \nu+\theta_\infty \end{array}\right\}$$

$$\kappa=\frac{1}{4}\left((\theta_0+\theta_1)^2-\theta_\infty^2\right).$$

$$(\mathrm{IV}):\quad y''+\left(\frac{\eta_0 t}{x^2}+\frac{1-\theta_0}{x}-\eta_\infty t-\frac{1}{x-\lambda}\right)y' +\left(\frac{\eta_\infty(\theta_\infty+\theta_0)t}{2x}-\frac{tH+\lambda\mu}{2x^2}+\frac{\lambda\mu}{x(x-\lambda)}\right)y=0$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hphantom{\eta_0 t\quad \theta_0+1}}^{0}} & \lambda & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hphantom{\eta_\infty t\quad -\frac{\theta_\infty+\theta_0}{2}}}^{\infty}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\theta_\infty+\theta_0}{2} \\ \eta_0 t & \theta_0+1 & 2 & \eta_\infty t & \frac{\theta_\infty-\theta_0}{2} \end{array}\right\}$$

$$(\mathrm{III}):\quad y''+\left(\frac{1-\theta_0}{x}-\frac{x}{2}-t-\frac{1}{x-\lambda}\right)y'+\left(\frac{\theta_\infty}{2}-\frac{H}{2x}+\frac{\lambda\mu}{x(x-\lambda)}\right)y=0$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \lambda & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{\frac14\quad t\quad -\theta_\infty-\theta_0+1}}^{\infty}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +\theta_\infty \\ \theta_0 & 2 & \frac{1}{4} & t & -\theta_\infty-\theta_0+1 \end{array}\right\}$$

(II)： $$y'' - \left(2x^2 + t + \frac{1}{x-\lambda}\right)y' + \left(-(2\alpha+1)x - 2H + \frac{\mu}{x-\lambda}\right)y = 0$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{10em}}^{\infty}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{2}{3} & 0 & t & -\alpha+\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

(I)： $$y'' - \frac{1}{x-\lambda}y' + \left(-4x^3 - 2tx - 2H + \frac{\mu}{x-\lambda}\right)y = 0$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & \multicolumn{6}{c}{\overbrace{\hspace{14em}}^{\infty *}} \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & -t & \frac{1}{4} \\ 2 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & t & \frac{1}{4} \end{array}\right\}$$

線型方程式 (VI)〜(II) は線型方程式 (3.1), (3.8)〜(3.11) をある意味で規格化したものである．しかし，規格化は 1 通りとは限らない．たとえば，(II) として

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{10em}}^{\infty}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{2}{3} & 0 & -t & -\alpha+\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

に対応する方程式をとることができる．もちろん，この方程式は (II) から変換

$$y \longrightarrow y\exp\left(-\frac{2}{3}x^3 - tx\right)$$

で得られる．

方程式 (I) は規格化されていない．無理にしようとすれば係数に x の分数巾が表われる．

Painlevé 系 (V)〜(II) は (VI) から順次得られたように，同じ変換で線型方程式 (V)〜(II) は (VI) から得られる．ただし

λに対応する変換を t にも行わなくてはいけない.

§5. みかけの特異点における指数の差を大きくすること。

線型方程式 (VI) ～ (I) において，みかけの特異点で指数はすべて 0，2 であった。これを 0，$n+1$ として変形が可能であろうか。パルプを惜まず，線型方程式とその Riemann 図式を書いておく.

$(\mathrm{VI})_n$:
$$y'' + \left(\frac{1-\theta_0}{x} + \frac{1-\theta_1}{x-1} + \frac{1-\theta_t}{x-t} - \frac{n}{x-\lambda}\right)y' + \left(\frac{\kappa}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)H}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{x(x-1)(x-\lambda)}\right)y = 0$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & t & \lambda & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_t & n+1 & \nu+\theta_\infty \end{array}\right\},$$

$$\kappa = \frac{1}{4}\left(\left(\theta_0+\theta_1+\theta_t-1\right) - \theta_\infty^2\right)$$

$(\mathrm{V})_n$:
$$y'' + \left(\frac{1-\theta_0}{x} + \frac{\eta_1 t}{(x-1)^2} + \frac{1-\theta_1}{x-1} - \frac{n}{x-\lambda}\right)y' + \left(\frac{\kappa}{x(x-1)} - \frac{tH}{x(x-1)^2} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{x(x-1)(x-\lambda)}\right)y = 0$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{1}} & \lambda & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \\ \theta_0 & \eta_1 t & \theta_1+1 & n+1 & \nu+\theta_\infty \end{array}\right\}$$

$$\kappa = \frac{1}{4}\left(\left(\theta_0+\theta_1\right)^2 - \theta_\infty^2\right).$$

$(\mathrm{IV})_n$: $$y'' + \left(\frac{\eta_0 t}{x^2} + \frac{1-\theta_0}{x} - \eta_\infty t - \frac{n}{x-\lambda}\right) y' + \left(\frac{\eta_\infty(\theta_\infty+\theta_0)t}{2x} - \frac{tH+\lambda\mu}{2x^2} + \frac{\lambda\mu}{x(x-\lambda)}\right) y = 0$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \overbrace{\begin{array}{cc} & \end{array}}^{0} & & \lambda & \overbrace{\begin{array}{cc} & \phantom{\frac{\theta_\infty-\theta_0}{2}-n+1} \end{array}}^{\infty} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\theta_\infty+\theta_0}{2} \\ \eta_0 t & \theta_0+1 & n+1 & \eta_\infty t & \frac{\theta_\infty-\theta_0}{2}-n+1 \end{array}\right\}$$

$(\mathrm{III})_n$: $$y'' + \left(\frac{1-\theta_0}{x} - \frac{x}{2} - t - \frac{n}{x-\lambda}\right) y' + \left(\frac{\theta_\infty}{2} - \frac{H}{2x} + \frac{\lambda\mu}{x(x-\lambda)}\right) y = 0$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \lambda & & \overbrace{}^{\infty} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_\infty \\ \theta_0 & n+1 & \frac{1}{4} & t & -\theta_\infty-\theta_0-n+2 \end{array}\right\}$$

$(\mathrm{II})_n$: $$y'' - \left(2x^2 + t + \frac{n}{x-\lambda}\right) y' + \left(-(2\alpha+1)x - 2H + \frac{\mu}{x-\lambda}\right) y = 0$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & & \overbrace{\phantom{0 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha+\frac{1}{2}}}^{\infty} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+\frac{1}{2} \\ n+1 & \frac{2}{3} & 0 & t & -\alpha-n+\frac{3}{2} \end{array}\right\}$$

$(\mathrm{I})_n$: $$y'' - \frac{n}{x-\lambda} y' + \left(-4x^3 - 2tx - 2H + \frac{\mu}{x-\lambda}\right) y = 0$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & & & \overbrace{\phantom{-\frac{4}{5} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -t \quad \frac{1}{4}}}^{\infty *} & & & \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & -t & \frac{1}{4} \\ n+1 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & t & \frac{1}{4} \end{array}\right\}.$$

ここで次の注意をしておく．$(\mathrm{VI})_n$ は Fuchs 型であるから Fuchs の関係式により，指数の総和は 3 である．$(\mathrm{V})_n \sim (\mathrm{II})_n$ に対しても形式解（確定特異点ではもちろん収束）に表われるベキの総和はやはり 3 である．これは Fuchs-福原の関係式である．

$x=\lambda$ がみかけの特異点であるという条件から，t, λ, μ, H の間に1つの関係式が成り立つ．H を t, λ, μ の関数とみたとき，$n=1$ ならば H は λ, μ の多項式であり，$n=2$ ならば H は λ, μ の有理式である．しかし $n \geqq 3$ ならば H は t, λ, μ の真代数関数となる．

一般の n に対しては計算が大変なので，$n=2$ の場合を考える．結論をいうと，

変形可能で，λ, μ は H を Hamilton 関数とする Hamilton 系を満たす，

ことが分る．

そのとき，H は次のように与えられる．

$$(\mathrm{VI})_2 : \quad H = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)} \frac{S}{\mu - \frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\theta_1}{\lambda-1} - \frac{\theta_t}{\lambda-t}},$$

$$\begin{aligned} S = \frac{\mu^3}{4} &+ \left[\frac{3}{4}\left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} + \frac{\theta_t}{\lambda-t}\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4}\frac{1}{\lambda-1} - \frac{3}{4}\frac{1}{\lambda-t}\right]\mu^2 \\ &+ \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} + \frac{\theta_t}{\lambda-t}\right)^2 - \left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} + \frac{\theta_t}{\lambda-t}\right)\frac{1}{\lambda-t}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_0}{\lambda^2} + \frac{\theta_1}{(\lambda-1)^2} + \frac{\theta_t}{(\lambda-t)^2}\right) + \frac{\kappa}{\lambda(\lambda-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(\lambda-t)^2}\right]\mu \\ &- \left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} + \frac{\theta_t}{\lambda-t}\right)\frac{\kappa}{\lambda(\lambda-1)} + \frac{\kappa}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} \end{aligned}$$

$$(\mathrm{V})_2 : \quad H = \frac{\lambda(\lambda-1)^2}{t} \frac{S}{\mu - \frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\eta_1 t}{(\lambda-1)^2} - \frac{\theta_1+1}{\lambda-1}},$$

$$S = \frac{\mu^3}{4} - \left[\frac{3}{4}\left(\frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\eta_1 t}{(\lambda-1)^2} + \frac{\theta_1}{\lambda-1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\theta_1}{\lambda-1}\right)\right]\mu^2$$

$$+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\eta_1 t}{(\lambda-1)^2} + \frac{\theta_1}{\lambda-1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_0}{\lambda^2} - \frac{2\eta_1 t}{(\lambda-1)^3} + \frac{\theta_1}{(\lambda-1)^2}\right)\cdot\right.$$

$$\left. + \frac{\kappa}{\lambda(\lambda-1)} - \frac{2}{(\lambda-1)^2} - \frac{2}{\lambda-1}\right]\mu$$

$$-\left(\frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\eta_1 t}{(\lambda-1)^2} + \frac{\theta_1}{(\lambda-1)}\right)\frac{\kappa}{\lambda(\lambda-1)}.$$

$(\mathrm{IV})_2$: $$H = \frac{2\lambda^2}{t}\,\frac{S}{\mu + \frac{\eta_1 t}{\lambda^2} - \frac{\theta_0+1}{\lambda} - \eta_\infty t}$$

$$S = \frac{\mu^3}{4} - \left[\frac{3}{4}\left(-\frac{\eta_1 t}{\lambda^2} + \frac{\theta_0+1}{\lambda} + \eta_\infty t\right)\right]\mu^2$$

$$+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_0 t}{\lambda^2} - \frac{\theta_0}{\lambda} + \eta_\infty t\right)^2 - \left(\frac{\eta_0 t}{\lambda^2} - \frac{\theta_0}{\lambda} - \eta_\infty t\right)\frac{1}{2\lambda}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{2\eta_0 t}{\lambda^3} - \frac{\theta_0}{\lambda^2}\right) + \frac{2}{\lambda^2}\right]\mu$$

$$+\left(\frac{\eta_0 t}{\lambda^2} - \frac{\theta_0}{\lambda} - \eta_\infty t\right)\frac{\eta_\infty(\theta_\infty+\theta_0)t}{2\lambda}$$

$(\mathrm{III})_2$: $$H = \frac{2\lambda S}{\mu - \frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\lambda}{2} - t}$$

$$S = \frac{\mu^3}{4} - \left[\frac{3}{4}\left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\lambda}{2} + t\right) + \frac{1}{4\lambda}\right]\mu^2$$

$$+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\lambda}{2} + t\right)^2 + \frac{\theta_0}{2\lambda^2} + \frac{\theta_\infty}{2} - \frac{1}{4}\right]\mu$$

$$-\frac{\theta_\infty}{2}\left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\lambda}{2} + t\right) + \frac{\theta_\infty}{2\lambda}$$

$(\mathrm{II})_2$: $$H = \frac{S}{2(\mu - 2\lambda^2 - t)}$$

$$S = \frac{\mu^3}{4} - \frac{3}{4}(2\lambda^2+t)\mu^2 + \left(\frac{1}{2}(2\lambda^2+t)^2 - 2\lambda - 2\alpha - 1\right)\mu$$

$$+(2\alpha+1)(2\lambda^3 + t\lambda - 1)$$

$$(\mathrm{I})_2:\quad H=\frac{\mu^2}{8}-(2\lambda^3+t\lambda)-\frac{6\lambda^2+t}{\mu}.$$

以上のことを検証するためには，まず，線型方程式 $(\mathrm{VI})_2$ 〜 $(\mathrm{I})_2$ を

$$(5.1)\qquad y''=py,$$

$$p=\frac{2}{(x-\lambda)^2}+\cdots\cdots+\frac{\omega}{x-\lambda}$$

の形に変形する．次に B を

$$B=\begin{cases} Jx+K+\dfrac{L}{x-\lambda}+\dfrac{M}{(x-\lambda)^2} & ((\mathrm{VI})_2,(\mathrm{V})_2,(\mathrm{IV})_2\text{ に対し}) \\ K+\dfrac{L}{x-\lambda}+\dfrac{M}{(x-\lambda)^2} & ((\mathrm{III})_2\text{ に対し}) \\ \dfrac{L}{x-\lambda}+\dfrac{M}{(x-\lambda)^2} & ((\mathrm{II})_2,(\mathrm{I})_2\text{ に対し}) \end{cases}$$

とおき，(3.7) に代入する．それを整理して，λ,ω に対する方程式を導く．その方程式系が Hamilton 系であることと λ,μ と λ,ω との間の関係などを使い，$(\mathrm{VI})_2$ 〜 $(\mathrm{I})_2$ を導けばよい．

計算は $(\mathrm{I})_2$ 〜 $(\mathrm{III})_2$ は比較的楽であるが，$(\mathrm{IV})_2$ から $(\mathrm{VI})_2$ へかけてかなり面倒となる．

Painlevé 系 (VI) から順次 (V) 〜 (I) が導かれたように，方程式系 $(\mathrm{VI})_2$ から順次 $(\mathrm{V})_2$ 〜 $(\mathrm{I})_2$ が導かれる．その変換は Painlevé 系のときとまったく同様である．それに対応する変換で線型方程式 $(\mathrm{VI})_2$ から線型方程式 $(\mathrm{V})_2$ 〜 $(\mathrm{I})_2$ が導

かれる.

nが2より大きい場合, 同様なことが成り立つことを計算で確めようとすると大変である. 予想だけを述べておく.

$(\mathrm{VI})_n \sim (\mathrm{I})_n$ を (5.1) と変換し,

$$B = \begin{cases} Jx + K + \sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{(x-\lambda)^k} & ((\mathrm{VI})_n, (\mathrm{V})_n, (\mathrm{IV})_n \text{ に対し}) \\ K + \sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{(x-\lambda)^k} & ((\mathrm{III})_n \text{ に対し}) \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{(x-\lambda)^k} & ((\mathrm{II})_n, (\mathrm{I})_n \text{ に対し}) \end{cases}$$

とおき, (3.7) から λ, ω に対する Hamilton 系が得られる. これから, ~~⇔~~ λ, μ に対する Hamilton 系 $(\mathrm{VI})_n \sim (\mathrm{I})_n$ が導かれる. Hamilton 関数は H で, $n \geqq 3$ ならば, H は, λ, μ の代数関数である.

このことが $(\mathrm{I})_3$ に対し成り立つことを確めるのはそう面倒ではない.

§6. 今後の問題

前節の予想が正しいとすれば, Hamilton 系の6個の無限系列

$$(\mathrm{VI})_n, (\mathrm{V})_n, \cdots, (\mathrm{I})_n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

が得られる. $n=1$ のとき, これらは Painlevé 系で多項式型である. $n=2$ のときは, 有理的である.

もし $(\mathrm{VI})_2$ が動く分岐点をもたなければ—— Painlevé 系 (VI) から類推でそう思いたくなるが,—— $(\mathrm{I})_2$ も動く分岐点を持たないことになる. しかし, $(\mathrm{I})_2$ は動く分岐点を持つ可能性が大きい. もし, 持つとすれば,

(i) $(\mathrm{VI})_n, \sim (\mathrm{I})_n$ はすべて動く分岐点をもたない

という命題は $n=1$ のときにのみ正しく, $n=2$ でだめになる. そのときは, (i) を弱めた命題を考えねばならない. その候補として,

(ii) $(\mathrm{VI})_n \sim (\mathrm{I})_n$ は動く分岐点を持つが, それは代数的でしかも有限個である

(iii) 動く分岐点は代数的で, そのまわりで有限多価である.

(iv) 動く分岐点は代数的である.

等を挙げることができる. さらに, これらの性質が n とどう関係するかなども問題である.

いずれにしても, $(\mathrm{I})_2$ から調べていくしかあるまい.

あとがき.

本稿に書かれた式は筆者の不注意による間違いが多いかも知れないが, 御了承を乞う次第である.

なお, $(\mathrm{V})_n$, に現われるパラメータ θ_0 は, それと θ_1 と $(\mathrm{IV})_n$ に現われる

θ_1-1,
θ_0-1 でおきかえた方がよかったかも知れない、後から気がついたので、そのままにしておいた。