数理解析研究所講究録
第 375 巻 1980 年 74-86

Painlevé V 型方程式の解について

琉球大 理　　毛織 泰子

1. Painlevé V 型方程式は、確定特異点 2 個、1 級不確定特異点 1 個をもつ線型常微分方程式 (1.1) の、monodromy を保存する変形の方程式として得られる。

(1.1) $$\frac{dY}{dx} = \left(\frac{B_1}{x-a_1} + \frac{B_2}{x-a_2} + C\right)Y \quad ; B_1, B_2, C = \begin{pmatrix} c_1 & \\ & c_2 \end{pmatrix} : 2\times 2 \text{ 定数行列}.$$

$A = \begin{pmatrix} a_1 & \\ & a_2 \end{pmatrix}$, $K = \mathrm{diag}\,(B_1 + B_2)$ とおく。

(1.1) の $x=\infty$ での形式解を次の形に書く。

(1.2) $$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n (x-A)^{K-n} e^{Cx}, \quad Y_0 = 1,$$

$$= \left\{ 1 + \frac{1}{x}\left(Y_1 - \binom{K}{1}A\right) + \frac{1}{x^2}\left(Y_2 - Y_1\binom{K-1}{1}A + \binom{K}{2}A^2\right) + \cdots \right\} x^K e^{Cx}.$$

解の係数 $Y_1, Y_2, \cdots$ は方程式の係数 B_1, B_2, C から順に決まる。例えば、

(1.3) $$B_1 + B_2 = K + [Y_1, C],$$

$$a_1 B_1 + a_2 B_2 = -(Y_1 - KA) + [Y_1, K] + [Y_2 + Y_1 A, C] - [Y_1, C]Y_1 .$$

monodromy を保存する (1.1) の変形を考えよう。即ち、a_1, a_2, c_1, c_2 を変形の parameters として、monodromy 保存の条件のもとで、B_1, B_2 の

parametersに関するdependenceを定めるのが変形方程式である。この場合、本質的なdeformation parameterは $t=(a_1-a_2)(c_1-c_2)$ である。B_1, B_2 の固有値 $\lambda_{11}, \lambda_{12}$; $\lambda_{21}, \lambda_{22}$ 及び $K=\begin{pmatrix}\kappa_1 & \\ & \kappa_2\end{pmatrix}$ はtに依らない定数である。Fuchsの関係式は $\kappa_1+\kappa_2=\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{21}+\lambda_{22}$ で与えられる。

(1.4) ν_0 : 任意, $\nu_1-\nu_0=\kappa_1-\lambda_{11}-\lambda_{22}=-\kappa_2+\lambda_{12}+\lambda_{21}$, $\nu_2-\nu_0=\lambda_{12}-\lambda_{11}$,

$$\nu_3-\nu_0=\kappa_1-\lambda_{11}-\lambda_{21}=-\kappa_2+\lambda_{12}+\lambda_{22}$$

とする。B_1, B_2 は次のようにおける。

(1.5)
$$B_1=\begin{pmatrix} z-\nu_0+\lambda_{11} & -u(z-\nu_2) \\ u^{-1}(z-\nu_0) & -(z-\nu_2-\lambda_{11}) \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} -(z-\nu_3-\lambda_{21}) & v(z-\nu_1) \\ -v^{-1}(z-\nu_3) & z-\nu_1+\lambda_{21} \end{pmatrix}.$$

(1.3)から $Y_1=\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{pmatrix}$ は次のように決まる。

(1.6)
$$y_1=-(a_1-a_2)(z-\nu_3-\lambda_{21})+(c_1-c_2)y_2y_3,$$
$$y_2=\frac{1}{c_1-c_2}\left(u(z-\nu_2)-v(z-\nu_1)\right),\qquad y_3=\frac{1}{c_1-c_2}\left(u^{-1}(z-\nu_0)-v^{-1}(z-\nu_3)\right),$$
$$y_4=(a_1-a_2)(z-\nu_2-\lambda_{11})-(c_1-c_2)y_2y_3.$$

$y=u^{-1}v$ とおくとき、B_1, B_2 の満たすべき変形方程式から

(1.7)
$$t\frac{dy}{dt}=-ty-2z(y-1)^2+(y-1)\left((\nu_0+\nu_1)y-(\nu_2+\nu_3)\right),$$
$$t\frac{dz}{dt}=y(z-\nu_0)(z-\nu_1)-y^{-1}(z-\nu_2)(z-\nu_3)$$

を得る。或いは、

(1.8)
$$z=\frac{1}{2(y-1)^2}\left\{-t\frac{dy}{dt}-ty+(y-1)\left((\nu_0+\nu_1)y-(\nu_2+\nu_3)\right)\right\}$$

を用いてzを消去すれば、yの満たすべき方程式として、次のPainlevé V型方程式を得る。

(1.9) $$\frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+\frac{(y-1)^2}{t^2}\left(\alpha y+\frac{\beta}{y}\right)+\frac{\gamma}{t}y+\delta\frac{y(y+1)}{y-1}.$$

$$\alpha=\frac{1}{2}(\nu_0-\nu_1)^2,\quad \beta=-\frac{1}{2}(\nu_2-\nu_3)^2,\quad \gamma=\nu_0+\nu_1-\nu_2-\nu_3-1,\quad \delta=-\frac{1}{2}.$$

Hamiltonian を

(1.10) $$H(t,y,z)=z-\nu_0+\frac{1}{t}\left(y(z-\nu_1)-(z-\nu_2)\right)\left((z-\nu_0)-y^{-1}(z-\nu_3)\right)$$

と取り. Poisson bracket $\{\ ,\ \}$ を

(1.11) $$\{z,\ y\}=y$$

と定義すれば. (1.7) は

(1.12) $$\frac{dy}{dt}=\{y,\ H(t,y,z)\},\qquad \frac{dz}{dt}=\{z,\ H(t,y,z)\}$$

で回復される。この解 $(y(t),\ z(t))$ を使って

(1.13) $$\sigma(t)=t\,H(t,\ y(t),\ z(t))+\nu_0 t+\nu_0\nu_2+\nu_1\nu_3$$

と定義すれば.

(1.14) $$\begin{aligned}\sigma&=-2z^2+(t+\nu_0+\nu_1+\nu_2+\nu_3)z+y(z-\nu_0)(z-\nu_1)+y^{-1}(z-\nu_2)(z-\nu_3)\\&=\frac{1}{4y(y-1)^2}\left\{\left(t\frac{dy}{dt}\right)^2-\left(ty-(y-1)\left((\nu_0+\nu_1)y-(\nu_2+\nu_3)\right)\right)^2\right\}+\nu_0\nu_1 y+\nu_2\nu_3 y^{-1},\end{aligned}$$

(1.15) $$\frac{d\sigma}{dt}=z,\qquad t\frac{d^2\sigma}{dt^2}=y(z-\nu_0)(z-\nu_1)-y^{-1}(z-\nu_2)(z-\nu_3)$$

となる。即ち.

(1.9) $$\frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+\frac{(y-1)^2}{2t^2}\left((\nu_0-\nu_1)^2y-(\nu_2-\nu_3)^2y^{-1}\right)+\frac{\nu_0+\nu_1-\nu_2-\nu_3-1}{t}y-\frac{y(y+1)}{2(y-1)}$$

の解 $y(t;\nu_0,\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ に対して.

(1.14) $$\sigma=\frac{1}{4y(y-1)^2}\left\{\left(t\frac{dy}{dt}\right)^2-\left(ty-(y-1)\left((\nu_0+\nu_1)y-(\nu_2+\nu_3)\right)\right)^2\right\}+\nu_0\nu_1 y+\nu_2\nu_3 y^{-1}$$

とおけば σ は

(1.16) $$\left(t\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right)^2=\left(2\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2-(t+\nu_0+\nu_1+\nu_2+\nu_3)\frac{d\sigma}{dt}+\sigma\right)^2-4\left(\frac{d\sigma}{dt}-\nu_0\right)\left(\frac{d\sigma}{dt}-\nu_1\right)\left(\frac{d\sigma}{dt}-\nu_2\right)\left(\frac{d\sigma}{dt}-\nu_3\right)$$

を満たす。逆に. (1.16) の解 $\sigma(t;\nu_0,\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ に対して.

(1.17) $$y = \frac{t\frac{d^2\sigma}{dt^2} + 2\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 - (t+\nu_0+\nu_1+\nu_2+\nu_3)\frac{d\sigma}{dt} + \sigma}{2\left(\frac{d\sigma}{dt}-\nu_0\right)\left(\frac{d\sigma}{dt}-\nu_1\right)}$$

とおけば，y は (1.9) を満たす。更にこのとき，

(1.18) $$y^{-1} = \frac{-t\frac{d^2\sigma}{dt^2} + 2\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 - (t+\nu_0+\nu_1+\nu_2+\nu_3)\frac{d\sigma}{dt} + \sigma}{2\left(\frac{d\sigma}{dt}-\nu_2\right)\left(\frac{d\sigma}{dt}-\nu_3\right)}$$

である。故に，y と σ とは同等であるが，y は $\{\nu_0,\nu_1\}$ と $\{\nu_2,\nu_3\}$ に関して対称であり，σ は $\{\nu_0,\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$ に関して対称であることに注意する。

(1.19) $$\frac{d}{dt}\log\tau(t) = H(t, y(t), z(t)) = \frac{1}{t}(\sigma - \nu_0\nu_2 - \nu_1\nu_3) - \nu_0$$

となる正則函数 $\tau(t)$ が存在する。この τ を Painlevé V 型方程式 ((1.7) or (1.9) or (1.12) or (1.16)) の τ-函数と呼ぶ。

$\sigma = \sigma(t;\nu_0,\nu_1,\nu_2,\nu_3)$，$y = y(t;\nu_0,\nu_1,\nu_2,\nu_3) = y(-t;-\nu_1,-\nu_0,-1-\nu_3,-1-\nu_2)$

と略記すれば，(1.17), (1.18) から

(1.20) $$1-y = \frac{2\left(t\frac{d\sigma}{dt} - \sigma + \nu_0\nu_1 + \nu_2\nu_3\right)}{t\frac{d^2\sigma}{dt^2} + (t-\nu_0-\nu_1+\nu_2+\nu_3)\frac{d\sigma}{dt} - \sigma + 2\nu_0\nu_1}$$

とも表わせる。又，(1.17), (1.18) から，

(1.21) $$\begin{aligned}\det(B_1+B_2) &= (1-y)(z-\nu_0)(z-\nu_1) + (1-y^{-1})(z-\nu_2)(z-\nu_3) + (\lambda_{11}+\lambda_{21})(\lambda_{12}+\lambda_{22}) \\ &= t\frac{d\sigma}{dt} - \sigma + \nu_0\nu_1 + \nu_2\nu_3 + (\lambda_{11}+\lambda_{21})(\lambda_{12}+\lambda_{22})\end{aligned}$$

を得る。他方，(1.19) から $\sigma = t\frac{d}{dt}\log\tau + \nu_0\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_0 t$ だから，

(1.22) $$t\frac{d\sigma}{dt} - \sigma + \nu_0\nu_1 + \nu_2\nu_3 = \frac{t^2}{\tau^2}\begin{vmatrix}\tau & \frac{d\tau}{dt} \\ \frac{d\tau}{dt} & \frac{d^2\tau}{dt^2}\end{vmatrix} + (k_1-\lambda_{11}-\lambda_{21})(k_2-\lambda_{11}-\lambda_{21})$$

である。故に，特に $\lambda_{11}=0, \lambda_{21}=0$ のとき (1.20), (1.21) より

$$\sigma(t;\nu_0,\nu_1,\nu_2+1,\nu_3+1)=\sigma(-t;-\nu_1,-\nu_0,-1-\nu_3,-1-\nu_2)=\sigma+\nu_0+\nu_1+\frac{t}{1-y} \tag{1.23}$$

$$=\sigma+\nu_0+\nu_1+\frac{t}{2}\left(1+\frac{d}{dt}\log\det(B_1+B_2)+\frac{(-\nu_0-\nu_1+\nu_2+\nu_3)\frac{d\sigma}{dt}+\nu_0\nu_1-\nu_2\nu_3}{\det(B_1+B_2)}\right)$$

を得る。特に, $\sigma^{(n)}=\sigma(t;0,0,n,n)$ に対して. σ の変換公式:

$$\sigma^{(n+1)}=\sigma^{(n)}+\frac{t}{2}\left(1+\frac{d}{dt}\log\det(B_1^{(n)}+B_2^{(n)})+\frac{2n\frac{d\sigma^{(n)}}{dt}-n^2}{\det(B_1^{(n)}+B_2^{(n)})}\right), \tag{1.24}$$

$$\det(B_1^{(n)}+B_2^{(n)})=t\frac{d\sigma^{(n)}}{dt}-\sigma^{(n)}+n^2=\frac{t^2}{(\tau^{(n)})^2}\begin{vmatrix}\tau^{(n)} & \frac{d\tau^{(n)}}{dt}\\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d^2\tau^{(n)}}{dt^2}\end{vmatrix}+n^2$$

が得られる。

2. Lukashevich によれば. Painlevé V 型方程式 (1.9) は

(2.1) $\quad 1\pm'(\nu_2-\nu_3)\mp(\nu_0-\nu_1)=\pm''(\nu_0+\nu_1-\nu_2-\nu_3-1)$

即ち. $(2.1)_0$ $\quad \nu_0=\nu_2$ or $\nu_0=\nu_3$ or $\nu_1=\nu_2$ or $\nu_1=\nu_3$ 又は

$(2.1)_1$ $\quad \nu_0-\nu_2=1$ or $\nu_0-\nu_3=1$ or $\nu_1-\nu_2=1$ or $\nu_1-\nu_3=1$ のとき.

Riccati 方程式の解を特殊解にもつ。y の $\{\nu_0,\nu_1\}$, $\{\nu_2,\nu_3\}$ に関する対称性により. $(2.1)_0$ $\nu_0-\nu_2=0$, $(2.1)_1$ $\nu_0-\nu_2=1$ の2通りの場合を考えればよい。

$(2.1)_0$ $\quad \nu_0=\nu_2$ のとき. Riccati 方程式は

$(2.2)_0$ $\quad t\frac{dy}{dt}=-ty+(y-1)\left((\nu_1-\nu_0)y-(\nu_3-\nu_2)\right)$

であり. この特殊解 y に対応する (1.14) の σ, (1.19) の τ は.

$(2.3)_0$ $\quad \sigma=\nu_0(t+\nu_1+\nu_3)$,

$(2.4)_0$ $\quad \tau=\text{const.}\ t^{(\nu_1-\nu_0)(\nu_2-\nu_3)}$

で与えられる。

$(2.1)_1$ $\nu_0-\nu_2=1$ のとき．Riccati 方程式は

$(2.2)_1$ $$t\frac{dy}{dt}=ty+(y-1)((\nu_0-\nu_1)y-(\nu_2-\nu_3))$$

であり．この特殊解 y に対応する (1.14) の σ は

$(2.3)_1$ $$t\frac{d\sigma}{dt}=-(\sigma-\nu_0(t+\nu_1+\nu_3))(\sigma-\nu_2(t+\nu_1+\nu_3))-\nu_1\nu_3$$

の解．(1.19) の τ は合流超幾何函数

$(2.4)_1$ $$\tau=\quad C\cdot t^{(\nu_3-\nu_2)(\nu_0-\nu_1)}F(\nu_3-\nu_2,\ 1+\nu_3-\nu_1\ ;\ t)+C'\cdot t^{-(\nu_2-\nu_1)(\nu_0-\nu_3)}F(-(\nu_2-\nu_1),\ 1+\nu_1-\nu_3\ ;\ t)$$

で与えられる。

例．IPB (impenetrable bose gas) の 1 粒子密度行列 $\rho(x)$ は．parameters の値が $(\nu_0=0, \nu_1=1, \nu_2=0, \nu_3=1)$ 又は $(\alpha=\frac{1}{2}, \beta=\frac{-1}{2}, \gamma=-2i, \delta=2)$ であるような Painlevé Ⅴ 型超越函数 $y(x)$ $(t=2ix)$ により．

(2.5) $$\rho(x)=\frac{1}{\pi}\exp\int_0^x dx'\left(\frac{x'}{4y(y-1)^2}\left(\left(\frac{dy}{dx'}\right)^2+4y^2\right)-\frac{(y+1)^2}{4x'y}\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(1+\frac{-1}{3!}x^2+\frac{2C}{3^2}x^3+\frac{1}{5!}x^4+\frac{-11C}{3^3\cdot5^2}x^5+\frac{-1}{7!}x^6+\frac{61C}{2^2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7^2}x^7+\cdots\right)\quad\left(C=\frac{1}{2\pi}\right)$$

で与えられ．$\rho(x)=e^{-ix}\tau(x)$ である。このとき．特殊解は

(i) $\nu_0=\nu_2$，(ii) $\nu_1=\nu_3$，(iii) $\nu_1-\nu_2=1$ に応じて次で与えられる。

(i) $\nu_0=\nu_2$ のとき， $$x\left(\frac{dy}{dx}+2iy\right)=(y-1)^2\ ;$$

(2.6) $$z=0,\quad y=\frac{1}{1+2ix}-\frac{\dfrac{e^{-2ix}}{(1+2ix)^2}}{\displaystyle\int\frac{e^{-2ix}}{(1+2ix)^2}\frac{dx}{x}+\text{const.}},\quad \sigma=0,\quad \rho=\text{const.}\frac{e^{-ix}}{x}.$$

(ii) $\nu_1=\nu_3$ のとき， $$x\left(\frac{dy}{dx}+2iy\right)=-(y-1)^2\ ;$$

(2.7) $$z=1,\quad y=1-2ix+\frac{e^{2ix}}{\displaystyle\int e^{2ix}\frac{dx}{x}+\text{const.}},\quad \sigma=2ix,\quad \rho=\text{const.}\frac{e^{ix}}{x}.$$

(iii) $\nu_1-\nu_2=1$ のとき.　　$x\left(\frac{dy}{dx}-2iy\right)=y^2-1$;

(2.8)　$z=\frac{1}{2i}(\cot x - x\,\mathrm{cosec}^2 x)+\frac{1}{2}$,　$y=\frac{x\cot x-1+ix}{x\cot x-1-ix}$,

$\sigma = x\cot x + ix = \sigma_0+1+ix \quad (\sigma_0 = x\cot x - 1 = x\frac{d}{dx}\log\rho)$,

$\rho = \mathrm{const.}\ \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}$.

この y は(2.5)のようにして FF(free fermion) の1粒子密度行列

$$\rho(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{\pi}\left(1+\frac{-1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4+\frac{-1}{7!}x^6+\cdots\right) \quad (c=0)$$

を与える。

3. Painlevé V 型方程式の一般解を作ることを目標としている。連立1階方程式(1.7)の右辺を

(3.1)　$f(t,y,z) = -ty-2z(y-1)^2+(y-1)((\nu_0+\nu_1)y-(\nu_2+\nu_3))$

$g(t,y,z) = y(z-\nu_0)(z-\nu_1)-y^{-1}(z-\nu_2)(z-\nu_3)$

とおく。　$f(0,y_0,z_0)=0,\ g(0,y_0,z_0)=0$　となる点 (y_0,z_0) は次の3点である。

(3.2)　(ii) $\left(\frac{\nu_2-\nu_3}{-\nu_0+\nu_1},\frac{-\nu_0\nu_2+\nu_1\nu_3}{-\nu_0+\nu_1-\nu_2+\nu_3}\right)$,　(iii) $\left(\frac{-\nu_2+\nu_3}{-\nu_0+\nu_1},\frac{-\nu_0\nu_3+\nu_1\nu_2}{-\nu_0+\nu_1+\nu_2-\nu_3}\right)$,　(i) $\left(1,\frac{-\nu_0\nu_1+\nu_2\nu_3}{-\nu_0-\nu_1+\nu_2+\nu_3}\right)$.

(ii) の点 (y_0,z_0) に対して (IPB : $(y_0,z_0)=(-1,\frac{1}{2})$)

(3.3)$_2$　$$\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\end{pmatrix}\right|_{(t,y,z)=(0,y_0,z_0)} = \begin{pmatrix} -\nu_0-\nu_1+\nu_2+\nu_3 & \frac{-2(-\nu_0+\nu_1-\nu_2+\nu_3)^2}{(-\nu_0+\nu_1)^2} \\ \frac{-2(\nu_1-\nu_0)^2(\nu_3-\nu_0)(\nu_1-\nu_2)}{(-\nu_0+\nu_1-\nu_2+\nu_3)^2} & \nu_0+\nu_1-\nu_2-\nu_3\end{pmatrix}$$

だから.固有値は $\pm(-\nu_0+\nu_1-\nu_2+\nu_3)$ である。(iii), (i) の点に対しても.固有値は各々 $\pm(-\nu_0+\nu_1+\nu_2-\nu_3)$, $\pm(-\nu_0-\nu_1+\nu_2+\nu_3)$ となっている。parameters を特殊化すれば実際の model (IPB) を与えるという意味で (ii) の場合をやる((iii) は(ii)で ν_2 と ν_3 とを取りかえたもの)と.

$\nu = -\nu_0 + \nu_1 - \nu_2 + \nu_3$　（IPB : $\nu = 2$）　に対して 1-parameter 含む解

$$(3.4)_2 \qquad y(t) = y_0 (1 + y_{10} t + y_{01} u + y_{20} t^2 + y_{11} t u + y_{02} u^2 + \cdots) \quad \left(y_0 = \frac{\nu_2 - \nu_3}{-\nu_0 + \nu_1} \right)$$

$$z(t) = z_0 (1 + z_{10} t + z_{01} u + z_{20} t^2 + z_{11} t u + z_{02} u^2 + \cdots) \quad \left(z_0 = \frac{-\nu_0 \nu_2 + \nu_1 \nu_3}{\nu} \right)$$

$$u = C t^{\nu} \quad (C : \text{積分定数})$$

が存在する。実際 y_{01} は任意定数で $y_{01} = (\nu_3 - \nu_0)\nu$ と取れば

$z_{01} = (\nu_1 - \nu_2)(\nu_3 - \nu_2)$　となり.

$$(3.5)_2 \qquad y(t) = \frac{\nu_2 - \nu_3}{-\nu_0 + \nu_1} \left(1 + \frac{1 - \nu_0 - \nu_1 + \nu_2 + \nu_3}{(\nu+1)(\nu-1)} t + (\nu_3 - \nu_0)\nu\, u + \cdots \right)$$

$$z(t) - \nu_0 = \frac{(\nu_1 - \nu_0)(\nu_3 - \nu_0)}{\nu} \left(1 + \frac{2(\nu_1 - \nu_2)(\nu_3 - \nu_2)}{\nu(\nu+1)(\nu-1)} t + (\nu_1 - \nu_2)(\nu_3 - \nu_2)\, u + \cdots \right)$$

という展開をもつ。ν が整数のとき この展開の形から一般には $\log t$ の項があるが、例えば IPB ($\nu=2$) のときのように parameters の特別な値に対しては log terms が消えている。$(3.5)_2$ の y, z を (1.14) に代入して

$$(3.6)_2 \qquad \sigma(t) = (\nu_1 - \nu_0)(\nu_3 - \nu_0) \left(1 + \frac{1}{\nu} t + \frac{(\nu_1 - \nu_2)(\nu_3 - \nu_2)}{\nu^2 (\nu+1)(\nu-1)} t^2 + \cdots \right)$$

を得る。定数項以外は (1.15) から z を積分するのが最も簡単である。（IPB のとき $\sigma_0(x) = \sigma(x) - 1 - ix = \frac{-1}{3} x^2 + \cdots$, $t = 2ix$ ）

parameters の値が（$\nu_0 = 0, \nu_1 = 1, \nu_2 = 0, \nu_3 = 1$）である Painlevé Ⅴ 型方程式の一般解については 次の結果がある。

(I)　$|x_0| \ll |x|$ で $\zeta(x, x_0, C)$, $\xi(x, x_0, C)$ を求めること.

y, z から

$$(3.7) \qquad i\zeta = \frac{1+y}{1-y} \; , \quad i\xi = -2\left(z - \frac{1}{2}\right)$$

と変換すると (1.7) は次の方程式となる。$t = 2ix$ としている。

(3.8) $$x\frac{d\zeta}{dx} = 2\xi + x(1+\zeta^2),$$
$$(1+\zeta^2)\,x\frac{d\xi}{dx} = 2\zeta(1+\xi^2).$$

既に得られているζ, ξ の 1-parameter C を含む正則な解 $\zeta(x, x_0=0, C)$, $\xi(x, x_0=0, C)$ を利用する。

$$\zeta = \zeta^{(0)} + x_0\zeta^{(1)} + x_0^2\zeta^{(2)} + \cdots, \quad \xi = \xi^{(0)} + x_0\xi^{(1)} + x_0^2\xi^{(2)} + \cdots$$

とおけば、(3.8) は次と同値である。

(3.8-0) $$x\frac{d\zeta^{(0)}}{dx} = 2\xi^{(0)} + x(1+(\zeta^{(0)})^2), \quad (1+(\zeta^{(0)})^2)\,x\frac{d\xi^{(0)}}{dx} = 2\zeta^{(0)}(1+(\xi^{(0)})^2),$$

(3.8-1) $$x\frac{d\zeta^{(1)}}{dx} = 2\xi^{(1)} + x\cdot 2\zeta^{(0)}\zeta^{(1)},$$
$$2\zeta^{(0)}\zeta^{(1)}\cdot x\frac{d\xi^{(0)}}{dx} + (1+(\zeta^{(0)})^2)\cdot x\frac{d\xi^{(1)}}{dx} = 2\zeta^{(1)}(1+(\xi^{(0)})^2) + 2\zeta^{(0)}\cdot 2\xi^{(0)}\xi^{(1)},$$

(3.8-2) $$x\frac{d\zeta^{(2)}}{dx} = 2\xi^{(2)} + x(2\zeta^{(0)}\zeta^{(2)} + (\zeta^{(1)})^2),$$
$$(2\zeta^{(0)}\zeta^{(2)} + (\zeta^{(1)})^2)\cdot x\frac{d\xi^{(0)}}{dx} + 2\zeta^{(0)}\zeta^{(1)}\cdot x\frac{d\xi^{(1)}}{dx} + (1+(\zeta^{(0)})^2)\cdot x\frac{d\xi^{(2)}}{dx}$$
$$= 2\zeta^{(2)}(1+(\xi^{(0)})^2) + 2\zeta^{(1)}\cdot 2\xi^{(0)}\xi^{(1)} + 2\zeta^{(0)}(2\xi^{(0)}\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2),$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\ \cdots \qquad \cdots\cdots$$

各 order でこれらの方程式を満たすように $\xi^{(n)}$, $\zeta^{(n)}$ ($n=0$ (既知), 1, 2 $\cdots$) の展開の係数を決めて

(3.9) $$\zeta(x, x_0, C) = \frac{-1}{3}x + 2Cx^2 + \frac{-1}{3^2\cdot 5}x^3 + \frac{-2C}{3^3}x^4 + \cdots + x_0\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{-76C}{3^2}x + \cdots\right) + x_0^2\left(\frac{1}{x^3} + \cdots\right) + \cdots,$$
$$\xi(x, x_0, C) = \frac{-2}{3}x + 2Cx^2 + \frac{-4}{3^2\cdot 5}x^3 + \frac{14C}{3^3}x^4 + \cdots + x_0\left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{-56C}{3^2}x + \cdots\right) + x_0^2\left(\frac{-2}{x^3} + \cdots\right) + \cdots$$

($|x_0| \ll |x|$, C は任意、特に $C=0$: FF, $C=\frac{1}{2\pi}$: IPB)

を得る。

ここで、$\zeta(x, x_0, C=0)$, $\xi(x, x_0, C=0)$ を得るには、FF のときの

$\sigma_0 = x\cot(x-x_0) - 1$ を利用する。

$\gamma^{(0)} = \cot(x - x_0)$ とおくと $\frac{d\gamma^{(0)}}{dx} = -(1+(\gamma^{(0)})^2) = \frac{-1}{\sin^2(x-x_0)}$ であり、

$\xi = \frac{d\sigma_0}{dx}$ 及び (3.8) から

(3.10) $\quad \xi = \gamma^{(0)} - x(1+(\gamma^{(0)})^2)\ , \quad \zeta = \gamma^{(0)} - \frac{1}{x}$

となる。 $\cot x = \frac{1}{x} + \frac{-1}{3}x + \frac{-1}{45}x^3 + \cdots$ より

$$\gamma^{(0)} = \cot x - x_0 \frac{d}{dx}\cot x + \frac{1}{2}x_0^2 \frac{d^2}{dx^2}\cot x - \cdots$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{-1}{3}x + \frac{-1}{45}x^3 + \cdots + x_0\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + \cdots\right) + x_0^2\left(\frac{1}{x^3} + \frac{-1}{15}x + \cdots\right) + \cdots \quad (|x_0| \ll |x|),$$

従って (3.10) から

$(3.9)_{C=0}$ $\quad \zeta(x, x_0) = \frac{-1}{3}x + \frac{-1}{3^2\cdot 5}x^3 + \cdots + x_0\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 5}x^2 + \cdots\right) + x_0^2\left(\frac{1}{x^3} + \frac{-1}{3\cdot 5}x + \cdots\right) + \cdots ,$

$\qquad \xi(x, x_0) = \frac{-2}{3}x + \frac{-4}{3^2\cdot 5}x^3 + \cdots + x_0\left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}x^2 + \cdots\right) + x_0^2\left(\frac{-2}{x^3} + \frac{-2}{3\cdot 5}x + \cdots\right) + \cdots$

($|x_0| \ll |x|$) が得られる。

(II) $|C| \ll |x| \ll |x_0|$ で $\sigma_0(x, x_0, C)$, $\xi(x, x_0, C)$, $\rho(x, x_0, C)$ を求めること。

(1.16) で ($\nu_0=0, \nu_1=1, \nu_2=0, \nu_3=1$) とし、更に、$x = \frac{1}{2i}t$ と $\sigma_0 = \sigma - 1 - ix$ について方程式を書き直せば

(3.11) $\quad \left(x\frac{d^2\sigma_0}{dx^2}\right)^2 = -4\left(\left(\frac{d\sigma_0}{dx}\right)^2 + x\frac{d\sigma_0}{dx} - \sigma_0\right)\left(x\frac{d\sigma_0}{dx} - \sigma_0 - 1\right)$

となる。 $\sigma_0 = x\gamma - 1$ とおき

(3.12) $\quad \sigma_0 = \sigma^{(0)} + \lambda\sigma^{(1)} + \lambda^2\sigma^{(2)} + \cdots\ , \quad \gamma = \gamma^{(0)} + \lambda\gamma^{(1)} + \lambda^2\gamma^{(2)} + \cdots\ , \quad \gamma^{(0)} = \cot(x - x_0)$

と展開する。このとき $\sigma^{(0)} = x\gamma^{(0)} - 1$, $\sigma^{(n)} = x\gamma^{(n)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ である。

(3.12) の σ_0 を (3.11) に代入して次を得る。

(3.11-0) $\quad x^2\left(\frac{d^2\sigma^{(0)}}{dx^2}\right)^2 = 4\left(1 + \sigma^{(0)} - x\frac{d\sigma^{(0)}}{dx}\right)\left(\left(\frac{d\sigma^{(0)}}{dx}\right)^2 + x\frac{d\sigma^{(0)}}{dx} - \sigma^{(0)}\right),$

(3.11-1) $\quad 2x^2\frac{d^2\sigma^{(0)}}{dx^2}\frac{d^2\sigma^{(1)}}{dx^2} = 4\Big\{\left(1 + \sigma^{(0)} - x\frac{d\sigma^{(0)}}{dx}\right)\left(2\frac{d\sigma^{(0)}}{dx}\frac{d\sigma^{(1)}}{dx} + x\frac{d\sigma^{(1)}}{dx} - \sigma^{(1)}\right)$

$\qquad\qquad + \left(\sigma^{(1)} - x\frac{d\sigma^{(1)}}{dx}\right)\left(\left(\frac{d\sigma^{(0)}}{dx}\right)^2 + x\frac{d\sigma^{(0)}}{dx} - \sigma^{(0)}\right)\Big\},$

$$(3.11\text{-}2)\qquad x^2\left(2\frac{d^2\sigma^{(0)}}{dx^2}\frac{d^2\sigma^{(2)}}{dx^2}+\left(\frac{d^2\sigma^{(1)}}{dx^2}\right)^2\right)$$
$$=4\left\{\left(1+\sigma^{(0)}-x\frac{d\sigma^{(0)}}{dx}\right)\left(2\frac{d\sigma^{(0)}}{dx}\frac{d\sigma^{(2)}}{dx}+\left(\frac{d\sigma^{(1)}}{dx}\right)^2+x\frac{d\sigma^{(2)}}{dx}-\sigma^{(2)}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\sigma^{(1)}-x\frac{d\sigma^{(1)}}{dx}\right)\left(2\frac{d\sigma^{(0)}}{dx}\frac{d\sigma^{(1)}}{dx}+x\frac{d\sigma^{(1)}}{dx}-\sigma^{(1)}\right)+\left(\sigma^{(2)}-x\frac{d\sigma^{(2)}}{dx}\right)\left(\left(\frac{d\sigma^{(0)}}{dx}\right)^2+x\frac{d\sigma^{(0)}}{dx}-\sigma^{(0)}\right)\right\},$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots.$$

$\sigma^{(0)}=x\gamma^{(0)}-1$ は(3.11-0)の一つの特殊解である。$\sigma^{(1)}=x(1+(\gamma^{(0)})^2)$ が(3.11-1)の特殊解であることは、$\gamma^{(1)}=1+(\gamma^{(0)})^2$ が

$$x(x\gamma^{(0)}-1)\frac{d^2\gamma^{(1)}}{dx^2}+\left((1+3(\gamma^{(0)})^2)x^2-2x\gamma^{(0)}-1\right)\frac{d\gamma^{(1)}}{dx}+2\left((1+(\gamma^{(0)})^2)x-\gamma^{(0)}\right)\gamma^{(1)}=0$$

の特殊解であることと同値である。後者から

$\gamma^{(1)}=k_1(1+(\gamma^{(0)})^2)\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1-(\gamma^{(0)})^2}{1+(\gamma^{(0)})^2}-\int\frac{1}{1+(\gamma^{(0)})^2}\frac{dx}{x}\right)+k_2$ を得る。故に、積分定数を取り直し、又、$\lambda k_1=-8C$ として、

$$\sigma_0=x\gamma^{(0)}-1-4Cx\left(1-(1+(\gamma^{(0)})^2)\int\frac{2}{1+(\gamma^{(0)})^2}\frac{dx}{x}\right)+O(C^2)$$

となる。$\int\frac{2}{1+(\gamma^{(0)})^2}\frac{dx}{x}\Big|_{x_0=0}=\int(1-\cos 2x)\frac{dx}{x}=\int\left(2x-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{45}x^5-\cdots\right)dx$ より

$$\sigma_0\Big|_{x_0=0}=\frac{-1}{3}x^2+\frac{-1}{3^2\cdot 5}x^4+\cdots+C\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{14}{3^3\cdot 5}x^5+\cdots\right)+O(C^2)$$

となる。これは、既に得られている $x_0=0$ のときの 1-parameter C を含む正則な解と一致する。以上から、

$$(3.13)\qquad \sigma_0(x,x_0,C)=x\cot(x-x_0)-1-4Cx\left(1-\frac{1}{\sin^2(x-x_0)}\int_{x_0}^{x}(1-\cos 2(x-x_0))\frac{dx}{x}\right)+O(C^2)$$

を得る。

この結果を利用して、σ_0 と ξ の $|C|\ll|x|\ll|x_0|$ での展開を求めてみよう。$\xi=\frac{d\sigma_0}{dx}$ より $\sigma_0=\sigma^{(0)}+4C\sigma^{(1)}+\cdots$ のとき $\xi=\xi^{(0)}+4C\xi^{(1)}+\cdots$ と展開される。上の議論から

$$(3.14\text{-}0)\qquad \sigma^{(0)}=x\gamma^{(0)}-1,\quad \xi^{(0)}=\gamma^{(0)}-x(1+(\gamma^{(0)})^2),\quad \frac{d\xi^{(0)}}{dx}=2(1+(\gamma^{(0)})^2)\sigma^{(0)}$$

は (3.11-0) $\left(\dfrac{d\sigma^{(0)}}{dx}=\xi^{(0)}\right)$ を満たし.

(3.14-1) $\sigma^{(1)} = -x+2x\left(1+(\gamma^{(0)})^2\right)\displaystyle\int\frac{1}{1+(\gamma^{(0)})^2}\frac{dx}{x}$, $\xi^{(1)} = 1+2\left(1-2x\gamma^{(0)}\right)\left(1+(\gamma^{(0)})^2\right)\displaystyle\int\frac{1}{1+(\gamma^{(0)})^2}\frac{dx}{x}$,

$$\frac{d\xi^{(1)}}{dx} = \frac{2}{x}\left(1-2x\gamma^{(0)}\right)+4\left(x\left(1+3(\gamma^{(0)})^2\right)-2\gamma^{(0)}\right)\left(1+(\gamma^{(0)})^2\right)\int\frac{1}{1+(\gamma^{(0)})^2}\frac{dx}{x}$$

は (3.11-1) $\left(\dfrac{d\sigma^{(1)}}{dx}=\xi^{(1)}\right)$ を満たす。

$$\gamma^{(0)} = \cot(x-x_0) = i\,\frac{\varepsilon^{-1}e^{ix}+\varepsilon e^{-ix}}{\varepsilon^{-1}e^{ix}-\varepsilon e^{-ix}} \quad (\varepsilon=e^{ix_0})$$

$$= -a-(1+a^2)x-a(1+a^2)x^2-\frac{1}{3}(1+3a^2)(1+a^2)x^3-\frac{1}{3}a(2+3a^2)(1+a^2)x^4-\cdots \quad (a=\cot x_0,\ |x|\ll|x_0|)$$

と (3.14-0), (3.14-1) を使って.

(3.15) $$\sigma_0(x,x_0,C) = -1-(a+4C)x-(1+a^2+16aC)x^2-\left(a(1+a^2)+4C(1+7a^2)\right)x^3-\cdots$$
$$+8Cx\left(1+2ax+(1+3a^2)x^2+\cdots\right)\log x+O(C^2)\ ,$$
$$\xi(x,x_0,C) = -a+4C-2(1+a^2+8aC)x-\left(3a(1+a^2)+4C(1+15a^2)\right)x^2-\cdots$$
$$+8C\left(1+4ax+3(1+3a^2)x^2+\cdots\right)\log x+O(C^2)\ ,\quad (|C|\ll|x|\ll|x_0|)$$

を得る。

又 (3.13) と $\rho=\dfrac{1}{\pi}\exp\displaystyle\int\frac{\sigma_0}{x}dx$ より.

(3.16) $$\pi\rho(x,x_0,C) = \frac{\sin(x-x_0)}{x}-4C\left(\sin(x-x_0)+\frac{\cos(x-x_0)}{x}\int_{x_0}^{x}\left(1-\cos 2(x-x_0)\right)\frac{dx}{x}\right.$$
$$\left.-\frac{\sin(x-x_0)}{x}\int_{x_0}^{x}\sin 2(x-x_0)\frac{dx}{x}\right)+O(C^2)$$

を得る。IPB の1粒子密度行列 $\pi\rho(x,\ x_0=0,\ C=\frac{1}{2\pi})$ は Schlutz; Lenard により 核 $K(t,t')=\dfrac{\sin(t-t')}{t-t'}$ に属する Fredholm 1次小行列式: $\dfrac{1}{(-\lambda)}\Delta_{[0,x]}\left({0\atop x};\lambda\right)\Big|_{\lambda=\frac{2}{\pi}}$ で計算されるが, 他方, 摂動計算で得られた (3.16) で $x_0=0$ とおいたものは, 丁度, この Fredholm 小行列式の展開式:

$$\frac{\Delta_{[0,x]}\binom{0}{x};\lambda)}{(-\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\int_0^x\cdots\int_0^x \det\begin{pmatrix} K(0,x) & K(0,t_1) & \cdots & K(0,t_n) \\ K(t_1,x) & K(t_1,t_1) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ K(t_n,x) & \cdots & \cdots & K(t_n,t_n)\end{pmatrix} dt_1\cdots dt_n \tag{3.17}$$

$$= \frac{\sin x}{x} - \lambda\left(\sin x - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\frac{\sin(x-t)}{x-t}\,dt\right) + \cdots$$

(但し, $\lambda = 4C = \frac{2}{\pi}$)

になっていることに注意する。

参考文献

[1] K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear differential equations with irregular singular points, preprint, RIMS 301, Kyoto Univ. (1979).

[2] K. Okamoto, Polynomial Hamiltonians associated to the Painlevé equations, preprint, Tokyo Univ. (1979).

[3] N. A. Lukaschevich, Solutions of the fifth equation of Painlevé, Differentsial'nye Uravneniya, 4, 1413-1420 (1968) (Differential Equations, 4, 732-735 (1968)).

[4] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri, M. Sato, Density matrix of impenetrable bose gas and the fifth Painlevé transcendent, preprint, RIMS 303, Kyoto Univ. (1979).