

Monodromy Preserving Deformation
のソリトン理論への応用

京大・数理解析 上野喜三雄

§0 文献 [1], [2], において, モノドロミー保存変形の一
般論, 及び, そのソリトン理論への応用の端初が切り開かれ,
最近では, 京大の三輪氏, 神保氏らの精力的研究により, そ
れらの一般論 (完成された意味での!!) が構築されるに至っ
た。(cf. [4].) この小論においては, 個別的具體例を通し
て, モノドロミー保存変形がソリトン理論 (又は, *isospectral*
deformation と言ってもよい) に, 如何に係るかを解説したい
と思う。

§1. 我々が, 対象とする非線型方程式は, 次の二つのもの
である。

(Pohlmeyer-Lund-Regge system, 略して PLR)

$$(1.1) \quad u_{3\eta} - \frac{U_{\xi} U_{\eta} \sin(\frac{u}{2})}{2 \cos^3(\frac{u}{2})} + \sin u = 0,$$

/

$$V_{\xi\eta} + \frac{u_{\xi}V_{\eta} + u_{\eta}V_{\xi}}{\sin u} = 0$$

(non-linear Schrödinger 方程式 略して NLS)

$$(1.2) \quad u_{\eta} - iu_{\xi\xi} - 2iu^2|u| = 0$$

我々の一つの目標は, PLR, NLS の *multi-soliton* 解が, モーロミー保存変形により統制され得ることを示すことにある。そして, オニの目標は, それらの特殊解の持つハミルトニアン構造を明らかにすることである。この終では, オーの問題について論じることとする。

PLR, NLS は, 次の線型微分方程式の積分可能条件として得られることが知られている。([], [], [])

(PLR の場合)

$$(1.3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - i \begin{bmatrix} -a^* & \\ -a & \end{bmatrix} - \frac{i\chi}{2} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \right) Y = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{i\chi^{-1}}{2} \begin{bmatrix} \cos u & \exp(-i\omega) \sin u \\ \exp(i\omega) \sin u & -\cos u \end{bmatrix} \right) Y = 0,$$

ただし, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, $\chi \in \mathbb{C}$, $a = i(\exp(i\omega) \sin u) / 2 \cos u$

(NLS の場合)

$$(1.4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - i\chi \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & -u \\ u^* & \end{bmatrix} \right) Y = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} - x^2 \begin{bmatrix} -2i & \\ & 2i \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} -2\alpha^* & \\ & 2\alpha^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i|u|^2 & -iu_3 \\ -iu_3^* & -i|u|^2 \end{bmatrix}\right) Y = 0$$

ただし, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{C}$ である。

(1.3), (1.4)において, $*$ は複素共役を示す。次に, 伊達氏によるN-リットル解の直接構成法 ([5], [6]) を, PLRとNLSの場合について, 解説してみよう。

まず, 我々は, 線型方程式 (1.3), (1.4)の解を次の手続きで, 構成する。

(i) 2×2 行列 $Y(x, \xi, \eta)$ は, 次の型をしているとする。

$$(1.5) \quad Y(x, \xi, \eta) = \hat{Y}(x, \xi, \eta) x^N \begin{bmatrix} e^\theta & \\ & e^{-\theta} \end{bmatrix}$$

$$\text{where } \hat{Y}(x, \xi, \eta) = I + \sum_{j=1}^N Y_j(\xi, \eta) x^{-j}$$

$$Y_j(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} y_{1,N-j}(\xi, \eta) & y_{2,N-j}^*(\xi, \eta) \\ -y_{2,N-j}(\xi, \eta) & y_{1,N-j}^*(\xi, \eta) \end{bmatrix}$$

(1.3)の場合, $\theta = \frac{1}{2}(\xi x + \eta x^{-1})$, (1.4)の場合, $\theta = -i(2\eta x^2 + \xi x)$

(ii)さらに, $Y(x, \xi, \eta)$ は, 次の退化条件を満たしているとせよ。

$$(1.6) \quad Y(\alpha_j, \xi, \eta) \begin{bmatrix} 1 \\ -c_j \end{bmatrix} = 0, \quad Y(\alpha_j^*, \xi, \eta) \begin{bmatrix} c_j^* \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad j=1, \dots, N$$

ただし, α_j ($j=1, \dots, N$)は, 複素定数で, $\alpha_j + \alpha_k$ for $j \neq k$, $\alpha_j^* \neq \alpha_k$ for any j, k であるとする。又, c_j ($j=1, \dots, N$)は, 0でない複素定数とする。(1.6)は, 次の一次方程式と同値であることは, 容易に確認される。

$$(1.7) \quad W Y = -a_N, \quad W Y' = -a'_N$$

ただし,

$$(1.8) \quad W = (a_0, \dots, a_{N-1}, a'_0, \dots, a'_{N-1})$$

$$a_\ell = {}^t(\alpha_1^\ell e(\alpha_1), \dots, \alpha_N^\ell e(\alpha_N), C_N^* \alpha_1^{*\ell} e(\alpha_1^*), \dots, C_N^* \alpha_N^{*\ell} e(\alpha_N^*))$$

$$a'_\ell = {}^t(-C_1 \alpha_1^\ell e(\alpha_1)^{-1}, \dots, -C_N \alpha_N^\ell e(\alpha_N)^{-1}, \alpha_1^{*\ell} e(\alpha_1^*)^{-1}, \dots, \alpha_N^{*\ell} e(\alpha_N^*)^{-1})$$

(1.3)の場合, $e(\alpha) = \exp(\frac{1}{2}(3\alpha + \eta\alpha^{-1}))$, (1.4)の場合, $e(\alpha) = \exp(-2i\eta\alpha^2 - i3\alpha)$

$$Y = {}^t(y_{1,0}, \dots, y_{1,N-1}, y_{2,0}^*, \dots, y_{2,N-1}^*)$$

$$Y' = {}^t(y_{2,0}, \dots, y_{2,N-1}, y_{1,0}^*, \dots, y_{1,N-1}^*)$$

従って, $\det W$ が恒等的に 0 でなければ, (i) と (ii) の条件によって, $Y(\alpha, \xi, \eta)$ が一意的に定まることは, 明らかであろう。そして, 我々は, 次の命題を得る。

命題. (伊達 [6]) (1.3) の場合) $Y(\alpha, \xi, \eta)$ は, 次の微分方程式を満たす。

$$(1.9) \quad dY = \Omega Y$$

ただし, d は, ξ と η に関する外微分であり, (この終においては, d は, ξ と η に関する外微分とする。) Ω は, 次の 1-form とする。

$$(1.10) \quad \Omega = \left(\frac{i\xi}{2} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} & -y_{2,N-1}^* \\ -y_{2,N-1} & \end{bmatrix} \right) d\xi$$

$$+ \frac{i\bar{x}}{2} (|y_{1,0}|^2 + |y_{2,0}|^2)^{-1} \begin{bmatrix} |y_{1,0}|^2 - |y_{2,0}|^2 & -2y_{1,0}y_{2,0}^* \\ -2y_{1,0}^*y_{2,0} & |y_{2,0}|^2 - |y_{1,0}|^2 \end{bmatrix} d\eta$$

それ故, $a = y_{2,N-1}$, $\cos u = (|y_{1,0}|^2 - |y_{2,0}|^2)(|y_{1,0}|^2 + |y_{2,0}|^2)^{-1}$,

$\exp(iw) \sin u = -2y_{1,0}^*y_{2,0}(|y_{1,0}|^2 + |y_{2,0}|^2)^{-1}$ という同一視を行え

ば, $Y(x, \bar{z}, \eta)$ は, (1.3) の解である。そして, このとき, $u =$

$\arccos \{ (|y_{1,0}|^2 - |y_{2,0}|^2)(|y_{1,0}|^2 + |y_{2,0}|^2)^{-1} \}$, $v = -i \log(y_{2,0}y_{2,0}^*) + v_0$,

($v_0 \in \mathbb{R}$) という函数の組は, PLR の N -ソリトン解である。

(1.4) の場合) $Y(x, \bar{z}, \eta)$ は, 次の微分方程式を満す。

$$(1.11) \quad dY = \Omega Y$$

$$(1.12) \quad \Omega = \left(i\chi \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2iy_{2,N-1}^* & \\ & 2iy_{2,N-1} \end{bmatrix} \right) d\bar{z} \\ + \left(\chi^2 \begin{bmatrix} -2i & \\ & 2i \end{bmatrix} + \chi \begin{bmatrix} 4iy_{2,N-1}^* & \\ & 4iy_{2,N-1} \end{bmatrix} \right) d\eta \\ + \begin{bmatrix} 4iy_{2,N-1}^2 & 4iy_{2,N-1}^* - 4iy_{1,N-1}^*y_{2,N-1}^* \\ 4iy_{2,N-1} - 4iy_{1,N-1}y_{2,N-1} & 4iy_{2,N-1}^2 \end{bmatrix} d\eta$$

従つて, $u = -2iy_{2,N-1}^*$, $u_{\bar{z}} = -4y_{2,N-1}^* + 4y_{1,N-1}^*y_{2,N-1}^*$ という同一視

のもとに, $Y(x, \bar{z}, \eta)$ は (1.4) の解であり, $u = -2iy_{2,N-1}^*$ は,

NLS の N -ソリトン解である。

PLR と NLS の N -ソリトン解をモ) ドロミー保存変形と関連付ける為には, 上記の $Y(x, \bar{z}, \eta)$ の満すべき, x -方程式を求めよ

う。 $Y(x, \xi, \eta)$ の型から, (1.3) の場合, $x = \infty, 0$ が 1 級の不確定特異点, (1.4) の場合, $x = \infty$ が 2 級の不確定特異点となることは明らかであるが, $\det Y(x, \xi, \eta) = \prod_{j=1}^N (x - \alpha_j)(x - \alpha_j^*)$ であるから $x = \alpha_j, \alpha_j^* (j = 1, \dots, N)$ も方程式の特異点として現われる。

実際, $Y(x, \xi, \eta)$ の満す方程式を計算すると次の様になる。

(1.3) の場合

$$(1.13) \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \left\{ x^2 E + x F + G + \sum_{j=1}^N \left(\frac{H(\alpha_j)}{x - \alpha_j} + \frac{H(\alpha_j^*)}{x - \alpha_j^*} \right) \right\} Y$$

$$\text{ただし, } G = \frac{i\xi}{2} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$$

$$E = \frac{-i\eta}{2} (|y_{1,0}|^2 + |y_{2,0}|^2)^{-1} \begin{bmatrix} |y_{1,0}|^2 - |y_{2,0}|^2 & -2y_{1,0}y_{2,0}^* \\ -2y_{1,0}^*y_{2,0} & |y_{2,0}|^2 - |y_{1,0}|^2 \end{bmatrix}$$

$$E = K \tilde{E} K^{-1}$$

$$\tilde{E} = \frac{-i\eta}{2} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} y_{1,0} & y_{2,0}^* \\ -y_{2,0} & y_{1,0}^* \end{bmatrix}$$

$$F + \sum_{j=1}^N (H(\alpha_j) + H(\alpha_j^*)) = \begin{bmatrix} N & -i\xi y_{2,N-1} \\ -i\xi y_{2,N-1} & N \end{bmatrix}$$

(1.4) の場合

$$(1.14) \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \left\{ xG + F + \sum_{j=1}^N \left(\frac{H(\alpha_j)}{x - \alpha_j} + \frac{H(\alpha_j^*)}{x - \alpha_j^*} \right) \right\} Y$$

$$\text{ただし, } G = \begin{bmatrix} -4i\eta & \\ & 4i\eta \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -i\xi & \delta i\eta \\ \delta i\eta y_{2,N-1} & i\xi \end{bmatrix},$$

$$\sum_{j=1}^N (H_{(\alpha_j)} + H_{(\alpha_j^*)}) = (R_{\mu\nu})$$

$$R_{11} = N + 8i\eta |y_{2,N-1}|^2, \quad R_{22} = R_{11}^*$$

$$R_{21} = 8i\eta y_{2,N-1} - 8i\eta y_{1,N-1} y_{2,N-1} + 2i\zeta y_{2,N-1}, \quad R_{12} = -R_{21}^*$$

(1.13), (1.14)の両方の場合について, $H_{(\alpha)}$ ($\alpha = \alpha_j, \alpha_j^*, j=1, \dots, N$)の固有値は, 0と1である。

次に, (1.13), (1.14)の解の大域的接続構造を調べよう。(1.14)の場合についてのみ述べるが, (1.13)の接続構造も以下と同様に調べられる。

まず, $x = \infty$ における Stokes係数と形式モドロミーについてであるが, これらは, とともに trivial である。又, $T_{(\alpha)}$, $Q_{(\alpha)}$ を次の様にして定める。(ともに invertible である。)

$$(1.15) \quad H_{(\alpha)} = T_{(\alpha)} \text{diag}(0, 1) T_{(\alpha)}^{-1},$$

$$Y(x, \zeta, \eta) = T_{(\alpha)} Y_{(\alpha)}(x, \zeta, \eta) Q_{(\alpha)} \quad (\alpha = \alpha_j, \alpha_j^*, j=1, \dots, N)$$

ここで, $Y_{(\alpha)}$ は, (1.13)の $x = \alpha$ における正規化された行列解であり,

$$(1.16) \quad Y_{(\alpha)}(x, \zeta, \eta) = (x - \alpha)^J \Phi_{(\alpha)}(x) (x - \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ l_{(\alpha)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$J = \text{diag}(0, 1)$$

又, $\Phi_{(\alpha)}(x)$ は, $x = \alpha$ の近傍で正則かつ $\Phi_{(\alpha)}(\alpha) = I$

という型をしている。ただし, 今の場合では, $Y(x, \zeta, \eta)$ に logarithmic term がないから, $l_{(\alpha)} = 0$ である。簡単な計

算により, $T_{(\alpha)}$ を上手に選ぶと,

$$(1.17) \quad Q_{(\alpha)} = \begin{bmatrix} 1 & C \\ & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = C_j \text{ for } \alpha = \alpha_j, \quad C = -C_j^{*-1} \text{ for } \alpha = \alpha_j^*$$

となることが確認される。それ故, $Y(x, z, \eta)$ は, 次の方程式を満足しなければならない。(cf [2], [3])

$$(1.18) \quad dY = \tilde{\Omega} Y.$$

ここで, $\tilde{\Omega}$ は, (1.13), (1.14) の係数を用いて, 各々の場合に次の様に表わされる。

(1.13) の場合

$$(1.19) \quad \tilde{\Omega} = z dG + \{dG, F + \sum_{j=1}^N (H_{(\alpha_j)} + H_{(\alpha_j^*)})\}_G - z' K dE K^{-1}$$

(1.14) の場合

$$(1.20) \quad \tilde{\Omega} = z^2 \Phi + z \Psi + \Theta$$

$$\text{ただし, } \Phi = \frac{1}{2} dG, \quad \Psi = dF^{(2)} + \{\Phi, F\}_G$$

$$\Theta = \left\{ \Phi, \sum_{j=1}^N (H_{(\alpha_j)} + H_{(\alpha_j^*)}) \right\}_G + \{\Psi, F\}_G \\ + \frac{1}{2} \text{diag} (f_{12} f_{21} d(\frac{1}{g_1 - g_2}), f_{21} f_{12} d(\frac{1}{g_2 - g_1}))$$

$$G = \text{diag} (g_1, g_2), \quad F = (f_{\mu\nu}), \quad F^{(2)} = \text{diag} (f_1, f_2)$$

($A = (a_{\mu\nu})$ が与えられたとき, $\{A\}_G$ を

$$\{A\}_{G, \mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu = \nu \\ \frac{a_{\mu\nu}}{g_\mu - g_\nu} & \mu \neq \nu \end{cases}$$

で定義し, $\{A, B\}_G = \{[A, B]\}_G$ とおく。))

(1.18) という方程式は, $Y(\alpha, \gamma)$ の (α に関する) 大域的接続構造が, γ と η に依存しないという事実 (モノドロミー保存変形!!) から従うものであり, $\tilde{\Omega}$ は, (1.10), (1.12) の Ω と一致することも容易に確かめられる。(1.9) と (1.13) (resp. (1.11) と (1.14)) の積分可能条件を求めることにより, 次の定理を得る。

定理 1 ([3]) (PLR の場合) $K, F, H_{(\omega)}$ は, 次の完全積分可能な全微分方程式系をみたす。

$$(1.21) \quad \begin{aligned} dK &= K \{ \alpha d\hat{E}, K^{-1} F K \}_{\hat{E}} + \{ dG, F + \sum_{\alpha} H_{(\omega)} \}_{G} K \\ dF &= [\Phi, E] + [\Psi, F] + [\Theta, G] - \sum_{\alpha} \alpha^{-1} [\Theta, H_{(\omega)}] \\ dH_{(\omega)} &= [\Omega|_{x=\alpha}, H_{(\omega)}] \quad \alpha = \alpha_j, \alpha_j^*, \quad j=1, \dots, N \end{aligned}$$

ただし, $\Omega = \Phi x + \Psi + \Theta x^{-1}$,

$$\Phi = dG, \quad \Psi = \{ dG, F + \sum_{\alpha} H_{(\omega)} \}_{G}, \quad \Theta = -K d\hat{E} K^{-1}$$

(1.21) は, PLR の N -ソリトン解を特徴付ける。

(NLS の場合) $F, H_{(\omega)}$ は, 次の完全積分可能な全微分方程式系を満たす。

$$(1.22) \quad \begin{aligned} dF &= \Psi + [\Theta, F] + \sum_{\alpha} \alpha [\Phi, H_{(\omega)}] + \sum_{\alpha} [\Psi, H_{(\omega)}] \\ dH_{(\omega)} &= [\Omega|_{x=\alpha}, H_{(\omega)}], \quad \alpha = \alpha_j, \alpha_j^*, \quad j=1, \dots, N \end{aligned}$$

($\Omega, \Phi, \Psi, \Theta$ は, (1.20) 式で定義されている。)

(1.22) は, NLS の N -ソリトン解を特徴付ける。

又、この終では、先に述べたポアの目標について考察する。
 (1.21), (1.22)は、変形の方程式と呼ばれるものであるが、我々は、この方程式が、各々、ハミルトン系として表現されることを述べたい。そこで、一般的に論じる為に、新たに対象となるべき方程式を書く。(E, K, F, G, H_jは2x2行列とする。)

$$(2.1) \quad \begin{aligned} dK &= K\{d\hat{E}, K'FK\}_{\hat{E}} + \{dG, F + \sum_{j=1}^N H_j\}_G K \\ dF &= [\Phi, E] + [\Psi, F] + [\Theta, G] - \sum_{j=1}^N a_j^{-1} [\Theta, H_j] \\ dH_j &= [a_j \Phi + \Psi + a_j^{-1} \Theta, H_j], \quad j=1, \dots, N \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } \Phi = dG, \quad \Psi = \{dG, F + \sum_{j=1}^N H_j\}_G,$$

$$\Theta = -Kd\hat{E}K', \quad E = K\hat{E}K',$$

$$G = \text{diag}(g_1, g_2) \quad (g_1 \neq g_2), \quad \hat{E} = \text{diag}(e_1, e_2) \quad (e_1 \neq e_2)$$

dは、 g_1, g_2, e_1, e_2 に関する外微分。

a_j は互いに異なる定数

$$(2.2) \quad \begin{aligned} dF &= \Psi + [\Theta, F] + \sum_{j=1}^N a_j [\Phi, H_j] + \sum_{j=1}^N [\Psi, H_j] \\ dH_j &= [\Phi a_j^2 + \Psi a_j + \Theta, H_j], \quad j=1, \dots, N \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } \Phi = \frac{1}{2}dG, \quad \Psi = dF^{(4)} + \{\Phi, F\}_G$$

$$\Theta = \{\Phi, \sum_{j=1}^N H_j\}_G + \{\Psi, F\}_G + \frac{1}{2} \text{diag}(F_2 F_{21} d(\frac{1}{g_1 - g_2}),$$

$$F_2 F_{12} d(\frac{1}{g_2 - g_1}))$$

$$G = \text{diag}(g_1, g_2), \quad F = \begin{bmatrix} f_1 & F_{12} \\ F_{21} & f_2 \end{bmatrix}, \quad (g_1 \neq g_2), \quad F^{(4)} = \text{diag}(f_1, f_2)$$

d は, g_1, g_2, f_1, f_2 に関する外微分

(2.1), (2.2) は, 各々, 次の微分方程式に対する変形の方程式である。(cf. [2])

$$(2.3) \quad \frac{dY}{dx} = \left\{ G + Fx' + Ex'' + \sum_{j=1}^N \frac{H_j}{x-a_j} \right\} Y$$

$$(2.4) \quad \frac{dY}{dx} = \left\{ Gx + F + \sum_{j=1}^N \frac{H_j}{x-a_j} \right\} Y$$

$Y(x), Z(x)$ を (2.3) の $x=\infty, 0$ で正規化された形式解とする。

$$(2.5) \quad Y(x) = \hat{Y}(x) x^{D^{(\infty)}} \exp(xG) \quad (x=\infty \text{ で正規化された形式解})$$

$$\hat{Y}(x) = I + \sum_{\ell=1}^{\infty} Y_{\ell} x^{-\ell}$$

$$(2.6) \quad Z(x) = \hat{Z}(x) x^{D^{(0)}} \exp(-x^{-1}E) \quad (x=0 \text{ で正規化された形式解})$$

$$\hat{Z}(x) = I + \sum_{\ell=1}^{\infty} Z_{\ell} x^{\ell}$$

同様に, $Y(x)$ を (2.4) の, $x=\infty$ で正規化された形式解とする。

$$(2.7) \quad Y(x) = \hat{Y}(x) x^D \exp\left(\frac{1}{2}x^2G + xF^{(*)}\right)$$

$$\hat{Y}(x) = I + \sum_{\ell=1}^{\infty} Y_{\ell} x^{-\ell}$$

以上の準備のもとに, 我々は, 次の定理を得る。

定理 2. ([3]) 1-form ω を次の式によって定義する。

$$\text{case (2.1)} \quad \omega = \text{trace}(Z_1 d\hat{E} - Y_1 dG).$$

$$\text{case (2.2)} \quad \omega = -\text{trace}(Y_1 dF^{(*)} + Y_2 dG - \frac{1}{2} Y_1^2 dG)$$

ここで, Y_1, Z_1 及び Y_1, Y_2 は各々 (2.5), (2.6), (2.7) の形式解の

展開が1項, 及び, 2項である。さて, F, K, H_j の間の Poisson bracket を次によって導入する。

$$\text{case (2.1)} \quad \{(FK)_{\mu\nu}, (K^{-1})_{\mu'\nu'}\} = \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu'\nu'}$$

$$\{H_{j,\mu\nu}, H_{k,\mu'\nu'}\} = \delta_{jk} (\delta_{\mu\nu} H_{j,\mu'\nu'} - \delta_{\mu'\nu'} H_{k,\mu\nu})$$

他の組み合わせは, すべて $= 0$ 。

$$\text{case (2.2)} \quad \{\hat{F}_{12}, \hat{F}_{21}\} = 1,$$

$$\{H_{j,\mu\nu}, H_{k,\mu'\nu'}\} = \delta_{jk} (\delta_{\mu\nu} H_{j,\mu'\nu'} - \delta_{\mu'\nu'} H_{k,\mu\nu})$$

他の組み合わせは, すべて $= 0$ 。

ただし, $\hat{F}_{\mu\nu} = (g_1 - g_2)^{\frac{1}{2}} F_{\mu\nu}$ ($\mu \neq \nu$) である。このとき, (2.1), (2.2) は, 各々, ω をハミルトニオン 1-form におつハミルトニオン系として表現される。

$$\text{case (2.1), } dK = \{K, \omega\}, dF = \{F, \omega\}, dH_j = \{H_j, \omega\}, 1 \leq j \leq N,$$

$$\text{case (2.2) } d\hat{F} = \{\hat{F}, \omega\}, \hat{F} = (\hat{F}_{21}, \hat{F}_{12}), dH_j = \{H_j, \omega\}, 1 \leq j \leq N.$$

ハミルトニオン 1-form ω は (2.1), (2.2) の解に対して, closed にたることが確認され, 従つて,

$$(2.8) \quad \omega = d \log \tau$$

とたる函数が存在する。我々は, この函数を " τ -function" と呼ぶ。それでは, (1.21), (1.22) の場合に, この τ -函数を計算しておると次のようにたる。

$$(2.9) \quad (\text{PLR}) \quad \tau(\mathfrak{S}, \eta) = \text{const } e^{\frac{\xi \eta}{2}} \det W$$

$$(NLS) \quad \tau(\xi, \eta) = \text{const} \det W$$

ただし, W は, 各々の場合に, (1.8) で定義される $2N \times 2N$ 行列である。さらに, $N \times N$ 行列 $C = (C_{\mu\nu})$ を

$$(2.10) \quad C_{\mu\nu} = \frac{C_{\mu}}{\alpha_{\mu} - \alpha_{\nu}^*} \frac{g(\alpha_{\mu})}{g(\alpha_{\nu}^*)} e(\alpha_{\mu})^{-1} e(\alpha_{\nu}^*)$$

$$\text{ただし, } g(x) = \prod_{k=1}^N (x - \alpha_k^*), \quad \dot{g} = \frac{dg}{dx}$$

によって定義すると, この場合の τ -関数の最終的表示を得る。

$$(2.11) \quad (PLR) \quad \tau(\xi, \eta) = \text{const} e^{\frac{\xi\eta}{2}} \prod_{j=1}^N e(\alpha_j) e(\alpha_j^*)^{-1} \det(I + C^*C)$$

$$(NLS) \quad \tau(\xi, \eta) = \text{const} \prod_{j=1}^N e(\alpha_j) e(\alpha_j^*)^{-1} \det(I + C^*C)$$

ここで, C^* は, C の複素共役である。ここで, $\det(I + C^*C)$ は, 各々, PLR, NLS を linearization する Gelfand-Levitan-Marchenko 方程式の Fredholm 行列式と一致する。(cf [4])
 又, PLR の場合において $C^* = -C$ であるならば, それは, sine-Gordon 方程式の N -ソリトン解に対する τ -function に帰着する。

参考文献

- [1] K. Ueno : RIMS preprint 301 (1979)
- [2] K. Ueno : RIMS preprint 302 (1979)
- [3] K. Ueno : (to appear)
- [4] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno : (to appear)
- [5] E. Date : Proc. Japan. Acad., 55A 29-30 (1979)
- [6] E. Date : On a construction of multi-soliton solution of Pohlmeyer-Lund-Regge system and the classical massive Thirring model (preprint)
- [7] F. Lund and T. Regge : Phys Rev. D. 14, 1524-1535 (1976)
- [8] K. Pohlmeyer : Comm. Math. Phys., 46, 207-221 (1976)
- [9] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur ; Stud. Appl. Math., 53, 249-315 (1974)
- [10] K. Okamoto : Les Hamiltonian polynômiaux associés aux Equations de Painlevé (preprint)
- [11] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Mori and M. Sato : Density matrix of impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent. RIMS preprint 303 (1979)