数理解析研究所講究録
第 375 巻 1980 年 136-153

水の表面波

阪大 理　鹿野忠良
京大 理　西田孝明

1. はじめに

水の表面波の厳密解を求めることは，流体力学の最古典的問題の一つである。Scott Russel が，運河の水面に数マイルにわたってほゞ形を保った孤立波を観察したのは1834年である。様々の実験をくりかえした後1844年に彼が提出した報告[18]は，水の表面波の研究に大きな影響を与えた。表面波を表す未知函数 — 自由境界 — が充す方程式を解く事が簡単でないために問題は容易に解決されなかったが，その過程で孤立波の"近似方程式"として提出されたBoussinesq方程式(1871)とK-dV方程式(1895)が，略一世紀を距てて全く別の数理物理的世界を垣間みさせることとなったのは，周知のことである。

表面波に関しては，定常波としての孤立波の存在の数学的に厳密な証明: Levi-Civita(1925)[9], Struik(1926)[20], Lavrentiev(1946)[8] 及 Friedrichs-Hyers(1954)[2] の

後，1969 年 Nalimov[11] によって初めて非定常問題の厳密解が得られた（尚 Shinbrot[19], Nalimov[12], Rogers[16, 17]もある）。1971 年 Ovsjannikov[15] は，解析的周期的初期値に対し，一種の scaling に於る極限として所謂浅水波方程式の数学的正当化を与えた。我々は先に，この理論を任意の解析的初期値に対して一般化し[3]，更に，浅水波が，問題の無次元化にあらわれるパラメータに関する解の Taylor 展開の第一項に他ならぬ事を示した[4]。本稿の目指すところは，特定の物理的条件下で上の解は，K-dV 方程式の解或は Boussinesq 方程式の解によって極めて良い近似が与えられる表面波を含んでいる事を示すにあり，この意味で，K-dV 及 Boussinesq 方程式に対する一つの数学的正当化を与える事にある[5][6]。

2. 水を完全流体として扱い，非圧縮性非粘性流体の二次元渦なし流に於る表面波の厳密解を論ずる。自由表面が $y-\Gamma(t,x)=0$ であたえられるとする時，次の方程式と初期値を充す速度ポテンシャル $\Phi(t,x,y)$ と $\Gamma(t,x)$ を求める：

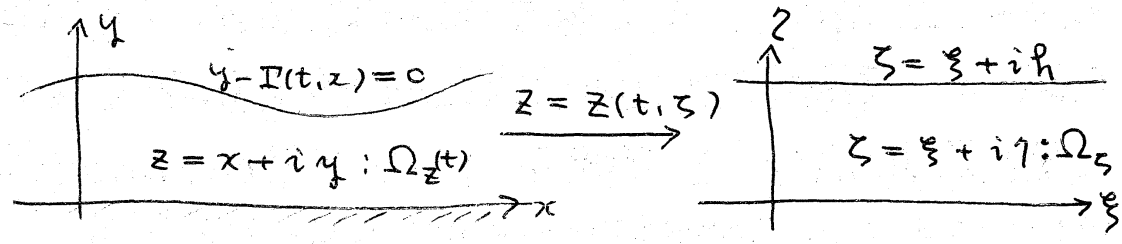
(2.1) $\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=0,\ x\in\mathbb{R},\ 0<y<\Gamma(t,x),\ t\geqq 0$

(2.2) $\Phi_y(t,x,0)=0,\ x\in\mathbb{R},\ t\geqq 0$

$$\left.\begin{aligned}&(2.3)\quad \Phi_t+\frac{1}{2}(\Phi_x^2+\Phi_y^2)+gy=0\\ &(2.4)\quad \Gamma_t+\Gamma_x\Phi_x-\Phi_y=0\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&x\in\mathbb{R},\ t\geqq 0\\ &y=\Gamma(t,x)\end{aligned}$$

(2.5) $\Gamma(0,x)=\Gamma_0(x)>0,\ \Phi(0,x,y)=\Phi_0(x,y)$：既知．

Φの共軛調和函数である stream fn. Ψ を用いて，$\Omega_z(t) = \{z = x+iy\ ;\ x\in\mathbb{R},\ 0<y<I(t,x),\ t\geqq 0\}$ に於る解析函数である複素速度ポテンシャル $F = \Phi + i\Psi$ を考える。Riemann の写像定理に言う $\Omega_{z(t)}$ から $\Omega_\zeta = \{\zeta = \xi + i\eta : \xi\in\mathbb{R},\ 0<\eta<h\}$, h は平均水深 ，への等角写像 $z = z(t,\zeta) = x(t,\zeta) + iy(t,\zeta)$ を考え，問題 (2.1)−(2.5) を，これ等の方程式が課する条件によってこの等角写像を特定する問題に帰着しよう。



$y = I(t,x)$ は $\eta = h$ に写され，$y = 0$ は $\eta = 0$ に，$F(t,z)$ は $f(t,\zeta)$ に写るとする：

$$F(t, z(t,\zeta)) \equiv f(t,\zeta) = \varphi(t,\zeta) + i\psi(t,\zeta).$$

問題 (2.1)−(2.5) は事実上，$\Omega_z(t)$ の調和函数の $y = I(t,x)$, $x\in\mathbb{R}$ に於る値を決定することに他ならないから，(2.4) (2.3) を Ω_ζ へ写して解くこととしよう。即，$\zeta = \xi + ih$ 上

$$(2.6)\qquad \mathrm{Im}\,\frac{z_t}{z_\zeta} = -\frac{\mathrm{Im}\, f_\zeta}{|z_\zeta|^2} \qquad (\leftarrow (2.4))$$

$$(2.7)\qquad \mathrm{Re}\left(f_t - \frac{f_\zeta}{z_\zeta}\, z_t\right) = -\frac{1}{2}\left|\frac{f_\zeta}{z_\zeta}\right|^2 - gy \qquad (\leftarrow (2.3))$$

を解こう。そうすれば，(2.2) 及 $\eta=0$ で $y=0$ であることから定る境界条件

(2.8) $\quad I_m(z_t/z_\zeta)=\frac{\partial}{\partial\eta}Re\left(f_t-(f_\zeta/z_\zeta)z_t\right)=0,\ \eta=0$

と合せて，Ω_ζ の解析函数 z_t/z_ζ 及 $f_t-(f_\zeta/z_\zeta)z_t$ が定り，従って $z(t,\zeta)$ 及 $f(t,\zeta)$ が，結局その逆像の虚部，実部として (2.1)－(2.5) の解 $\Gamma(t,x)$, $\Phi(t,x,y)$ が得られるであろう。

3. 初期値問題。 Ω_ζ の解析函数 $G=P+iQ$ に対し，P の境界値と Q の境界値を対応させる作用素 A_h, B_h は次の通りである。

$$Q(\xi+ih)=A_hP(\xi+ih)=$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{cosech}\frac{\pi}{2h}(\tau-\xi)P(\tau+ih)\,d\tau$$

$$P(\xi+ih)-P(-\infty+ih)=B_hQ(\xi+ih)=$$

$$=-A_hQ(\xi+ih)+C_hQ(\xi+ih)$$

$$C_hQ(\xi+ih)=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\tanh\frac{\pi}{4h}(\tau-\xi)\right)Q(\tau+ih)\,d\tau.$$

これ等の作用素の積分は Cauchy の主値の意味である。この作用素を用いて (2.6)－(2.7) をかきなおせば，$\eta=h$ 上，

$$(3.1)\quad \begin{cases} z_t/z_\xi = -B_h(\psi_\xi/|z_\xi|^2) - i(\psi_\xi/|z_\xi|^2) \\ f_t - (f_\xi/z_\xi)z_t = -\frac{1}{2}|f_\xi/z_\xi|^2 - gy - iA_h\left(\frac{1}{2}|f_\xi/z_\xi|^2 + gy\right). \end{cases}$$

更に, $\psi_\xi = A_h\varphi_\xi$, $f_\xi = \varphi_\xi + iA_h\varphi_\xi$, $z_\xi = x_\xi + iA_h x_\xi$, $y = A_h x$, $\eta = h$, を用いて, (3.1) を解くことは, 即 (3.1) を充す Ω_ζ の解析函数 f, z を求めることは, 夫々の実部 φ, x についての, (3.1) から得られる連立方程式

$$(3.2)\quad \begin{cases} x_t = \dfrac{A_h x_\xi \cdot A_h\varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_h x_\xi)^2} - x_\xi \cdot B_h\left(\dfrac{A_h\varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_h x_\xi)^2}\right) \\ \varphi_t = -gA_h x + \dfrac{1}{2}\dfrac{(A_h\varphi_\xi)^2 - \varphi_\xi^2}{x_\xi^2 + (A_h x_\xi)^2} - \varphi_\xi \cdot B_h\left(\dfrac{A_h\varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_h\varphi_\xi)^2}\right) \end{cases}$$

を解くことに他ならぬことがわかる。 こうして我々の問題は, 初期値問題

$$(3.3)\quad \begin{cases} (3.2) \\ x(0,\xi) \equiv x(0,\xi+ih) = x_0(\xi) \\ \varphi(0,\xi) \equiv \varphi(0,\xi+ih) = \varphi_0(\xi) \end{cases}$$

に帰着された。 ただし, 初期値は (2.5) と等角写像 $z = z(t.\zeta)$ から定るものである。

実際に我々が解くのは次節の無次元問題である。

4. 平均波長を λ，平均水深を h，$c=\sqrt{gh}$，g は重力の加速度，とする時，変換：$x \longrightarrow \lambda x$，$y \longrightarrow hy$，$t \longrightarrow \frac{\lambda}{c}t$，$\Phi_x = U \longrightarrow cU$ i.e. $\Phi \longrightarrow c\lambda\Phi$（$\Phi_0 \longrightarrow c\lambda\Phi_0$），$\Gamma \longrightarrow h\Gamma$；$\xi \longrightarrow \lambda\xi$，$\eta \longrightarrow h\eta$，によって，(2.1)−(2.5) は次の無次元の方程式に変換される，ただし，$\delta = h/\lambda$ である：

$$\delta^2\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0,\quad x\in\mathbb{R},\ 0<y<\Gamma \tag{4.1}$$

$$\Phi_y(t,x,0) = 0,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{4.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta^2\left(\Phi_t + \tfrac{1}{2}\Phi_x^2 + \Gamma\right) + \tfrac{1}{2}\Phi_y^2 = 0 &(4.3)\\ &\delta^2\left(\Gamma_t + \Gamma_x\Phi_x\right) - \Phi_y = 0 &(4.4)\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&x\in\mathbb{R}\\ &y=\Gamma\end{aligned}$$

$$\Gamma(0,x) = \Gamma_0(x) > 0,\quad \Phi(0,x,y) = \Phi_0(x,y) \tag{4.5}$$

これに対応して (3.3) は

$$(4.6)\ \begin{cases} x_t = \dfrac{A_\delta x_\xi A_\delta \varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2} - x_\xi B_\delta\left(\dfrac{A_\delta\varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2}\right) \\[2ex] \varphi_t = -\dfrac{A_\delta}{\delta}x + \dfrac{1}{2}\dfrac{(A_\delta\varphi_\xi)^2 - \varphi_\xi^2}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2} - \varphi_\xi B_\delta\left(\dfrac{A_\delta\varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2}\right) \\[2ex] x(0,\xi) = x_0(\xi),\quad \varphi(0,\xi) = \varphi_0(\xi) \end{cases}$$

に移る。また

$$y = \frac{A_\delta}{\delta}x,\qquad \psi = A_\delta\varphi$$

である。これから (4.6) の解によって $f = \varphi + i\psi$，$z = x + i\delta y$ を再現するのである。

5. 存在定理（定理 5.1，[3] の 360 頁）。 実解析函数が，一様な巾 2ρ をもつ実軸のまわりの帯状領域に於る解析函数に拡張されるとし，それ等から函数空間 $\mathcal{B}^\sigma_\rho$，L^σ_ρ を次の様に定義する： $\Omega_\rho = \{\zeta = \xi + i\eta,\ \xi \in \mathbb{R},\ |\eta| < \rho\}$.

$$\mathcal{B}^\sigma_\rho = \Big\{ \text{fn. holomorphe ds } \Omega_\rho;\ |u|_{\sigma,\rho} = \sup_{\Omega_\rho} |u| + \sup_{|\eta|<\rho}\ \sup_{d>0} \frac{1}{d^\sigma} |u(\xi+d+i\eta) - u(\xi+i\eta)| < +\infty \Big\}$$

$$L^\sigma_\rho = \Big\{ \text{〃} \quad \text{〃};\ |v|_{L^\sigma_\rho} = \sup_{|\eta|<\rho} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi+i\eta)|\, d\xi + \sup_{|\eta|<\rho}\ \sup_{d>0} \frac{1}{d^\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi+d+i\eta) - u(\xi+i\eta)|\, d\xi < +\infty \Big\}$$

この時

$$X_\rho = \{ u \in \mathcal{B}^\sigma_\rho,\ u_\xi \in L^\sigma_\rho \}$$

は，ノルム $\|u\|_\rho = \max\{ |u|_{\sigma,\rho},\ |u_\xi|_{L^\sigma_\rho} \}$ によって Banach space をなす。

(4.6) を ξ に関して微分して，初期値問題

$$(5.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial \xi}\Big\{ wA_\delta v A_\delta u + vA_\delta(wA_\delta u) - vC_\delta(wA_\delta u) \Big\} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{A_\delta}{\delta} v - \dfrac{\partial}{\partial \xi}\Big\{ \dfrac{w}{2}\big(u^2 - (A_\delta u)^2\big) - uA_\delta(wA_\delta u) + uC_\delta(wA_\delta u) \Big\} \\[2ex] v(0,\xi) = v_0(\xi) > 0,\ u(0,\xi) = u_0(\xi) \end{cases}$$

に対する存在定理は次の通り。但，$x_\xi = v$，$\varphi_\xi = u$，$w = (v^2 + (A_\delta v)^2)^{-1}$。

<u>定理</u>　$v_0(-\infty) = v_- > 0$，$u_0(-\infty) = u_-$ とする。$v_0(\xi), u_0(\xi) \in X_{\rho_0}$，$\|v_0(\xi) - v_-\|_{\rho_0}$，$\|u_0(\xi) - u_-\|_{\rho_0} < E_0$ とすると，正数 a が存在して，任意の $\delta \in (0, \delta_0]$ に対し (5.1) の解 $(v, u)(t, \xi) \in X_\rho$，$0 \le {}^\forall \rho < \rho_0$，が一意的に存在して，$|t| < a(\rho_0 - \rho)$ に於て，t に関して解析的であり，$\| v(t) - v_- \|_\rho \le 2E_0$，$\| u(t) - u_- \|_\rho \le 2E_0$ を充す。

この定理は，M.Nagumo [10]，Ovsjannikov [15]，Nirenberg [13] 及 Nishida [14] による，一般化された Cauchy-Kowalevski の定理を用いて示される。その時，逐次近似の列が $\{X_\rho\}_{0 \le \rho < \rho_0}$ の中で δ に関して一様収束することと A_δ，C_δ の性質を用いて，次の系を得る。

系．上に得た (5.1) の解 $(v, u)(t, \xi)$ は，値を $\{X_\rho\}_{0 \le \rho < \rho_0}$ にとる，δ に関して無限回微分可能な函数である。

実際，(5.1) を δ に関して微分して得られる $(v_n, u_n) =$

$=(\partial^n v/\partial\delta^n,\ \partial^n u/\partial\delta^n)$, $n=1,2,3,\cdots$ に関する方程式に定理を適用するのである。この系によって，所謂 Friedrichs 展開が漸近展開（δ^2 に関する）として意味をもつことが示される[4]のであるが，証明を本稿では割愛し，ただ，$\delta\downarrow 0$ の極限に於て v, u 従って x, φ が次の方程式を充すことを注意しておこう："$\circ$" は $\delta=0$ に対応する事を示す。

$$
(5.2)\quad \begin{cases} y^\circ = x^\circ_\xi = v^\circ, \quad \varphi^\circ_\xi = u^\circ. \\ x^\circ_t = -x^\circ_\xi \cdot \displaystyle\int_{-\infty}^{\xi} \frac{\varphi^\circ_{\xi\xi}}{(x^\circ_\xi)^2}\, d\xi \\ \varphi^\circ_t = -x^\circ_\xi - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\varphi^\circ_\xi}{x^\circ_\xi}\right)^2 - \varphi^\circ_\xi \displaystyle\int_{-\infty}^{\xi} \frac{\varphi^\circ_{\xi\xi}}{(x^\circ_\xi)^2}\, d\xi \end{cases}
$$

6. もとの問題(4.1)－(4.5)の解。 $x_\xi = v(t, \xi + i\delta) \geqq \beta > 0$ の事実（前節定理）と最大値原理から $x_\xi(t, \xi + i\delta\eta) \geqq \beta$, $0 \leqq \eta \leqq 1$，が成立，更に，$\bar{a} > 0$ が存在して $\delta < \delta_0$, $\bar{a}\sqrt{\delta_0} \leqq 1$，に対して

$$
x_\xi(\eta) = x_\xi(t, \xi, \delta\eta : \delta^2) \geqq \frac{\beta}{2}, \quad 0 \leqq \eta \leqq 1 + \bar{a}\rho, \quad \xi \in R
$$

が示される。 $x_\xi(\eta) = y_\eta(\eta) \geqq \dfrac{\beta}{2}$ も同様である。

この事から

$$
(6.1)\quad \begin{cases} x = x(t, \xi, \delta\eta : \delta^2) \\ y = y(t, \xi, \delta\eta : \delta^2) \end{cases}
$$

が　$\Omega_{1+\bar{a}\rho} = \{(\xi,\eta)\,;\ \xi\in\mathbb{R}\ ,\ 0\le\eta\le 1+\bar{a}\rho\}$
と

$$\Omega_{1+\bar{a}\rho}(t) = \left\{\begin{array}{l}(x,y)\,.\ x\in\mathbb{R}\,,\ 0\le y\le \Gamma_{1+\bar{a}\rho}(t,x\,;\delta^2)\\ \quad 0\le t\le a\,(\rho_0-\rho)\end{array}\right\}$$

とを global に 1－1対応づけることがわかる。実際，$x+i\delta y$，$(x,y)\in\Omega_{1+\bar{a}\rho}(t)$ は $\xi+i\delta\eta$，$(\xi,\eta)\in\Omega_{1+\bar{a}\rho}$，の解析函数である。ここで $\xi_\alpha(t,x\,;\delta^2)$ を $x = x(t,\xi,\delta\alpha\,;\delta^2)$，$0\le\alpha\le 1+\bar{a}\rho$，の定義する陰函数とする時，$\Gamma_\alpha(t,x\,;\delta^2)$ は次の様に定義される：

$$\Gamma_\alpha(t,x\,;\delta^2) = y(t,\xi_\alpha(t,x\,;\delta^2),\delta\alpha\ ;\ \delta^2)$$
$$0\le\alpha\le 1+\bar{a}\rho\,.$$

求める自由表面　$y-\Gamma(t,x)=0$　を与えるものは実は $\Gamma_1(t,x\,;\delta^2)$ に他ならないが，既に述べた事によってこれは，x の解析函数に値をとる，δ に関する無限回微分可能函数である。

次に (6,1) の逆函数

$$\xi=\xi(t,x,\delta y\,;\delta^2)\,,\ \delta\eta=\delta\eta(t,x,\delta y\,;\delta^2)$$

によって，Φ を次の様に定義すれば，この Φ と上の Γ は (4,1)－(4,5) の解に他ならない：

$$\Phi(t,x,\delta y;\delta^2)=\varphi(t,\xi(t,x,\delta y;\delta^2),\delta\eta(t,x,\delta y;\delta^2);\delta^2)\,.$$

注意　$\delta \downarrow 0$　に対応する(6.1)による(5.2)の逆像は上の Γ, Φ の $\delta \downarrow 0$ に於る極限がみたす方程式

$$(6.2)\quad \begin{cases} \Phi^0_t + \frac{1}{2}(\Phi^0_x)^2 + \Gamma^0 = 0 \\ \Gamma^0_t + (\Gamma^0 \Phi^0_x)_x = 0 \end{cases}$$

に他ならない。これは所謂，浅水波の方程式である。

7. Boussinesq 方程式　自由表面と平均水深の差の大きさ $|y-h|$ を振幅と呼び κ と表す時，$y-h=\kappa y^1$ によって無次元の振幅 $|y^1|$ を導入しよう。$\kappa/h \equiv \varepsilon$ とおく。これ迄の考察においては振幅を問題にしなかったから $\delta = h/\lambda$ の大きさに関らず，$\varepsilon \sim 1$ である波も考察の対象に含れていた。以下では，例えば $\lambda \gg h$ 或は $h \gg \kappa$ とした時 $\varepsilon \sim \delta^2$，簡単のために $\varepsilon = \delta^2$ である物理的に特定の条件下における表面波を考察する。そのような表面波が実に，K-dV あるいは Boussinesq 方程式の解と深い関係をもつのである。

さて，$y = h + \kappa y^1 = h(1 + \kappa/h \cdot y^1) = h(1+\varepsilon y^1)$ に注目して，4. とは別に，$y \to \eta + \varepsilon y^1$，$x \to \xi + \varepsilon x^1$，$\varphi \to -t + \varepsilon \varphi^1$ なる変換を考えれば，(4.6)に対応する無次元の方程式を，下のように，得る：

$$
(7.1)\quad \begin{cases}
x^1_t = \varepsilon w^{-1} A_\delta x^1_\xi A_\delta \varphi^1_\xi - B_\delta(w^{-1} A_\delta \varphi^1_\xi) - \varepsilon x^1_\xi B_\delta(w^{-1} A_\delta \varphi^1_\xi) \\
\varphi^1_t = -\dfrac{A_\delta}{\delta} x^1 + \dfrac{\varepsilon}{2} w^{-1}\left((A_\delta \varphi^1_\xi)^2 - (\varphi^1_\xi)^2\right) - \varepsilon \varphi^1_\xi B_\delta(w^{-1} A_\delta \varphi^1_\xi) \\
y^1 = \dfrac{A_\delta}{\delta} x^1,\ \psi^1 = A_\delta \varphi^1,\ w^{-1} = \left((1+\varepsilon x^1_\xi)^2 + \varepsilon^2 (A_\delta x^1_\xi)^2\right)^{-1},
\end{cases}
$$

$$\xi \in \mathbb{R},\ \eta = 1,\quad t \geqq 0.$$

前節迄の考察と全く同様にして得られた y^1, φ^1 によって $\gamma(t, x : \varepsilon)$, $\phi(t, x, \delta y : \varepsilon)$ を次のように定義する：

$$\gamma(t, x ; \varepsilon) = y^1(t, \xi(t, x ; \varepsilon), \delta ; \varepsilon)$$

$$\phi(t, x, \delta y ; \varepsilon) = \varphi^1(t, \xi(t, x, \delta y ; \varepsilon), \delta\eta(t, x, \delta y ; \varepsilon) ; \varepsilon)$$

この γ, ϕ は，先に得られた Γ, Φ によって

$$\Gamma = 1 + \varepsilon\gamma, \quad \Phi = -t + \varepsilon\phi$$

と定義されたものに実は，他ならない。その事から

$$
(7.2)\quad
\begin{aligned}
&\gamma_t = y^1_t - \frac{\varepsilon y^1_\xi}{1+\varepsilon x^1_\xi} x^1_t, \quad \gamma_x = \frac{y^1_\xi}{1+\varepsilon x^1_\xi} \\
&\phi_x = \frac{\varphi^1_\xi}{1+\varepsilon x^1_\xi}, \quad \phi_t = \varphi^1_t - \frac{\varepsilon \varphi^1_\xi}{1+\varepsilon x^1_\xi} x^1_t
\end{aligned}
$$

即，

$$(7.3)\quad \gamma_t = y^1_t - \varepsilon \gamma_x x^1_t, \quad \phi_t = \varphi^1_t - \varepsilon \phi_x x^1_t$$

がわかる。今 u を滑かな函数とすると

$$A_\delta u(\xi) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2\delta}{\pi}\right)^{2m+1} (2^{2m+2} - 1)\, \zeta(2m+2) \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial \xi^{2m+1}}(\xi)$$

である，但 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ はRiemannのツェータ函数。

（と C_ξ の同様の性質）

これを用いれば (7.1) は，次の様に書ける，但 $O(\varepsilon^2)$ の項は X_ρ に含まれる：

$$x^1_t = -\varphi^1_\xi - \varepsilon\left(x^1_\xi \varphi^1_\xi - 2\int_{-\infty}^{\xi} x^1_\xi \varphi^1_{\xi\xi}\, d\xi\right) + O(\varepsilon^2)$$

(7.4)
$$\varphi^1_t = -x^1_\xi - \varepsilon\left(\frac{1}{3} x^1_{\xi\xi\xi} + \frac{3}{2}(\varphi^1_\xi)^2\right) + O(\varepsilon^2)$$

$$\gamma = y^1 = \frac{A_\delta}{\delta} x^1 = x^1_\xi + \frac{\varepsilon}{3} x^1_{\xi\xi\xi} + O(\varepsilon^2)$$

等々．

今 (7.2) と (7.4) から，例えば

$$\varphi^1_\xi = \phi_x(1 + \varepsilon x^1_\xi) = \phi_x + \varepsilon\gamma\phi_x + O(\varepsilon^2)$$

と表せる事等々に注意すれば，(7.3)－(7.4) から

$$(7.5)\quad \begin{cases} \gamma_t + \phi_{xx} + \varepsilon(\gamma\phi_x)_x + \dfrac{\varepsilon}{3}\phi_{xxxx} = O(\varepsilon^2) \\ \phi_t + \gamma + \dfrac{\varepsilon}{2}\phi_x^2 = O(\varepsilon^2) \end{cases}$$

を得る。この展開は (6.2) と異り，ε に関する Taylor 展開のはじめの二項をとりだしたのとは全く別のものが左辺に現れているのだということに注意しなければならない。

今もし，Boussinesq にならって $\partial/\partial t = \partial/\partial x + O(\varepsilon)$，$\phi_x = -\gamma + O(\varepsilon)$ を仮定すれば，(7.5) から

(7.6) $$\phi_{tt} = \phi_{xx} + \frac{3}{2}\varepsilon(\phi_x^2)_x + \frac{\varepsilon}{3}\phi_{xxxx}$$

あるいは

(7.7) $$\gamma_{tt} = \gamma_{xx} + \frac{3}{2}\varepsilon(\gamma^2)_{xx} + \frac{\varepsilon}{3}\gamma_{xxxx}$$

を得るが，これ等の方程式の分散関係が良くないために，(7.6) もしくは (7.7) の解が (7.5) の解の良い近似を与えるか否かを判定する手だてを，我々はもてないのである。

ここで，先に得た $\Phi(t,x,\delta y:\varepsilon)$ は，$0\le y<\Gamma_{1+a_0\rho}(t,x;\varepsilon)$ で次の様な巾級数展開をもつことに注意しよう：

$$
(7.8)\quad
\begin{aligned}
&\Phi(t,x,\delta y:\varepsilon)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\varepsilon y^2)^m}{(2m)!}\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\Phi^0(t,x:\varepsilon)\\
&\Phi^0(t,x:\varepsilon)=\Phi(t,x,0:\varepsilon).
\end{aligned}
$$

従って $\Phi^0=-t+\varepsilon\phi^0$，$\phi^0(t,x;\varepsilon)=\phi(t,x,0:\varepsilon)$ を用いれば，$|t|<a_0(\rho_0-\rho)$ に対して，(7.5),(7.8) より，

$$
(7.9)\quad
\begin{cases}
\gamma_t+\phi^0_{xx}+\varepsilon(\gamma\phi^0_x)_x-\dfrac{\varepsilon}{6}\phi^0_{xxxx}=O(\varepsilon^2)\\
\phi^0_t+\gamma+\dfrac{\varepsilon}{2}(\phi^0_x)^2-\dfrac{\varepsilon}{2}\phi^0_{txx}=O(\varepsilon^2)
\end{cases}
$$

を得る。

第5節に述べた一般化されたCauchy-Kowalevskiの定理は，(7.9)の解が，ノルム $M^1[w]=\sup\limits_{0\le\rho<\rho_1,\,0\le t<a_0(\rho_1-\rho)}\|w(t)\|_\rho\times\left(1-\dfrac{t}{a_0(\rho_1-\rho)}\right)$ に関して，右辺及初期値に連続的に依存することを示すから，(7.9)の右辺を 0 とおいた斉次方程式の解を $\bar\gamma$, $\bar\phi^0$ とする時，次の定理が成立：

<u>定理</u>　$\|\gamma-\bar{\gamma}\|_\rho = O(\varepsilon^2)$, $\|\phi^0_x-\bar{\Phi}^0_x\|_\rho = O(\varepsilon^2)$, $|t|<a_0(\rho_0-\rho)$.

<u>注意</u>、(7.9)に於て γ を消去すれば

$$\phi^0_{tt}-\phi^0_{xx}-\frac{\varepsilon}{2}\phi^0_{ttxx}+\frac{\varepsilon}{6}\phi^0_{xxxx}+\varepsilon(2\phi^0_{tx}\phi^0_x)+\varepsilon\phi^0_t\phi^0_{xx}=$$
$= O(\varepsilon^2)$ を得る。右辺を 0 とした斉次方程式の解 $\bar{\Phi}^0$ が $\|\phi^0-\bar{\Phi}^0\|_\rho = O(\varepsilon^2)$ をみたすことが同じく示される，但 $|t|<a_0(\rho_0-\rho)$, $\rho<\rho_0$, $\phi^0(0)$, $\bar{\Phi}^0(0)\in X_{\rho_0}$ である。この斉次方程式が特解としてソリトン解をもつこと，また適当なSobolev空間で，時間に関する大域解をもつ事等が示される[5]。

8. Korteweg-de Vries 方程式

前節の(7.5)第2式を x で微分すれば，

$$(8.1)\quad \begin{cases} \gamma_t+u_x+\frac{\varepsilon}{3}u_{xxx}+\varepsilon(\gamma u)_x = O(\varepsilon^2) \\ u_t+\gamma_x+\varepsilon uu_x = O(\varepsilon^2) \end{cases}$$

但 $u=\phi_x\in X_\rho$, $0\leq\rho<\rho_0$ である。

今，(7.1)に対する初期値問題を

$$\gamma(0,x)-\phi_x(0,x)=O(1),\ \gamma(0,x)+\phi_x(0,x)=O(\varepsilon)$$

に対応する初期値 $\in X_{\rho_0}$ に対して解いたものとする。

$$\gamma-u=\gamma-\phi_x=2g,\quad \gamma+u=\gamma+\phi_x=2f$$

によって (8.1) を対角化すれば, g, f は夫々次の方程式を充す:

$$g_t - g_x - \frac{\varepsilon}{6} g_{xxx} - \frac{3}{2}\varepsilon g g_x = O(\varepsilon^2) \tag{8.2}$$

$$f_t + f_x + \frac{\varepsilon}{6} f_{xxx} + \frac{3}{2}\varepsilon f f_x = O(\varepsilon). \tag{8.3}$$

一方, 一般化された Cauchy-Kowalevski の定理によれば, K-dV 方程式

$$G_t - G_x - \frac{\varepsilon}{6} G_{xxx} - \frac{3}{2}\varepsilon G G_x = 0$$

は, $G(0,x) \in B_{\rho_0}$ に対して, B_ρ, $\forall \rho < \rho_0$, に属する一意的な解を持つ, 但 B_ρ は

$$B_\rho \equiv \left\{ \begin{array}{l} \Omega_\rho = \{ z = x + iy,\ x \in \mathbb{R},\ |y| < \rho \} \text{の解析函数} \\ \| (1+|k|) e^{\rho|k|} \hat{u}(k) \|_{L^2} < +\infty,\ \hat{u} = \mathfrak{F}[u] \end{array} \right\}$$

で定義される Banach 空間である。

$$F_t + F_x + \frac{\varepsilon}{6} F_{xxx} + \frac{3}{2}\varepsilon F F_x = 0$$

も同様であり, $\| G - g \|_{B_\rho} = O(\varepsilon^2)$, $\| F - f \|_{B_\rho} = O(\varepsilon)$ が従う。結局

<u>定理</u> $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$, $0 \leqq \rho < \rho_0$, $|t| < a_0(\rho_0 - \rho)$ に対し (8.1) の解 γ, ϕ_x は次の評価をもつ:

$$\| \gamma - (G+F) \|_{B_\rho} = O(\varepsilon), \quad \| \phi_x - (G-F) \|_{B_\rho} = O(\varepsilon)$$

この定理は, K-dV 方程式の, 一つの数学的正当化を与えるものと考えてよい。同様にして (7.9) の解 γ, ϕ^0_x

に対し次の定理が成立する：

<u>定理</u>　$\varepsilon \leqq \varepsilon_0$，$0 \leqq \rho < \rho_0$，$|t| < a_0(\rho_0 - \rho)$ に対し $\|\gamma - (M+N)\|_{B_\rho} = O(\varepsilon)$，$\|\Phi^\circ_x - (M-N)\|_{B_\rho} = O(\varepsilon)$.
ただし M，N は夫々，次の方程式の解である：

(8.4) $M_t - M_x + \frac{\varepsilon}{12} M_{xxx} - \frac{\varepsilon}{4} M_{txx} - \frac{3}{2}\varepsilon M M_x = 0$

(8.5) $N_t + N_x - \frac{\varepsilon}{12} N_{xxx} - \frac{\varepsilon}{4} N_{txx} + \frac{3}{2}\varepsilon N N_x = 0$.

<u>注意</u>　(8.4)，(8.5) に対する Cauchy 問題は $\{X_\rho\}_{0\leq\rho<\rho_0}$ でも解をもつこと；(8.4)，(8.5) 共にソリトン解を特解としてもつこと；Sobolev 空間 H^s，$s \geqq 3$，において時間的な大域解をもつこと，等が示される [6]。

(8.12.1979)

Bibliographie

1. J.Boussinesq, J.Math.Pure.Appl.,2^{e}série,t.17(1872),p.55
2. K.O.Friedrichs-D.H.Hyers,Comm.Pure Appl.Math.,7(1954),p.517
3. T.Kano-T.Nishida, J.Math.Kyoto Univ., 19(1979),p.335
4. ——————,Une justification mathématique du développement de Friedrichs pour les ondes de surface de l'eau,preprint
5. —————— Sur l'équation de Boussinesq pour les ondes de surface de l'eau, preprint 1979.
6. ——————, Sur l'équation de Korteweg - de Vries. Une théorie mathématique, preprint 1979.
7. D.J.Korteweg-G.de Vries,Philo.Magaz.,39(1895),p.422
8. M.Lavrentiev,Zb.Proc.Inst.Math.,Akad.Nauk.Ukrain.RSR,8(1946),p.13
9. T.Levi-Civita, Math.Ann. 93(1925),p.264
10. M.Nagumo, Japan.J.Math.,18(1942),p.41

11. V.I.Nalimov, Dokl.Akad.Nauk SSSR,189(1969),p.45

12. ———————, Inst.Hydrodyn.Sect.Siber.URSS Akad.Nauk 18(1974), p. 104

13. L.Nirenberg, J.Diff. Geo., 6(1972) p.561

14. T.Nishida, ibid. 12(1977), p.629

15. L.V.Ovsjannikov, Dokl.Akad.Nauk SSSR,200(1971), p.789

16. J.C.W.Rogers, Rep.Naval Ord.Labo.,NSWC/WOL/TR 75-43,1975

17. ———————, Manuscript Illinois Univ., 1977

18. J.Scott Russel, Report of the 14 th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1845 ,London

19. M.Shinbrot, Indiana Univ.Math.J.,25(1976),p.281; p.1049; J.Math.Anal.Appl.,67(1979), p.340

20. D.J.Struik, Math.Ann. 95(1926), p.595