数理解析研究所講究録
第375巻 1980年 165-169

代数関数の反復不定積分の値域について

九大 理　吉田正章

§1.　代数関数の不定積分で定義される関数の自然な値域は何か，又逆関数は何かという問題は古典的に重要であった。代数関数の定積分（サイクル上の積分）で定義される関数の値域を考察し，逆関数を研究することも古くからなされている。それらは特別なパラメタをもつ一変数および多変数の超幾何微分方程式の解のオイラー積分表示であった。

筆者は[2]において，フックス型微分方程式で解が，だ円反復積分で表され，解を用いて自然に定義される写像の値域が定り，逆関数が存在するものに遭遇した。そこで一般に以下の問題が考えられる。

問題 A.　代数関数の反復積分の自然な値域は何か。

問題 B　代数関数の反復積分の逆関数は考えられるか。

ここで"自然な値域"とは，積分で定義された写像が一対一になることと解釈する。種数gのコンパクトリーマン面上の第一種微分については，gケの線型独立な第一種微分をすべて並べて，$\mathbb{C}^g$ への写像を作り，そのモノドロミー群 M で割った空間 $\mathbb{C}^g/M$ が自然な値域となっている。反復積分の場合は，どんな積分を並べるかがまず問題であり，モノドロミー群M（今度はもはや可換群ではない）がいつ discrete になるかが次の問題である。このノートでは二回反復積分について二、三の例を考察する。

§2.

R: Rー面

w^1, w^2 : R 上の微分

γ : $P_0 \in R$ から $P \in R$ に至る道

α : P から P に至る道

記号 $$\int_\gamma w^1 w^2 := \int_\gamma \left(\int_{P_0}^{x} w^1 \right) w^2$$

Lemma

$$\begin{bmatrix} \int_{\gamma\alpha} w^1 w^2 \\ \int_{\gamma\alpha} w^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \int_\alpha w^1 & \int_{\gamma\alpha\gamma^{-1}} w^1 w^2 \\ & 1 & \int_\alpha w^2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_\gamma w^1 w^2 \\ \int_\gamma w^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

注 $\int_{\gamma\alpha\gamma^{-1}} w^1 w^2$ は, P_0 と $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ のホモトピー類にのみよる定数.

Cor. $\int_{\gamma\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}} w^1 w^2 = \int_\gamma w^1 w^2 + \int_\alpha w^1 \int_\beta w^2 - \int_\beta w^1 \int_\alpha w^2$

注 コンパクトリーマン面上の第一種微分の周期に関するリーマンの関係式は, この Cor. の直接の帰結である.

§ 3. R面上の第一種微分の任意回数の反復積分をすべて考える立場に [1] がある. そこでも問題は, いつモノドロミー群が discrete になるかということであった。以下2回の反復においても一般には discrete にならぬことを示す.

R : 種数 2 の R面　　$P_0 \in R$.

w^1, w^2 : R上の一次独立な第一種微分.

このとき, 写像

$$R \ni P \longmapsto \left(\int_{P_0}^P w^1 w^2,\ \int_{P_0}^P w^1,\ \int_{P_0}^P w^2 \right) \in \mathbb{C}^3$$

を考える。M をそのモノドロミー群, 即, $\pi_1(R, P_0)$ のひきおこす $\mathbb{C}^3$ のアファイン変換群とする。

Prop　M : discrete

⇒ Rの周期行列のすべての2×2小行列式で $\mathbb{Z}$ 上生成される群は $\mathbb{C}$ 内で discrete.

§4. 種数1のR面上の第一種微分 w と第二種微分 v の反復積分 $\int vw$ については 写像

$$P \longmapsto \left(\int^P vw,\ \int^P w \right) \in \mathbb{C}^2$$

を考える. v の pole はすべて2位で係数を A_j とする.

<u>Prop</u> $\sum A_i \mathbb{Z}$ が $\mathbb{C}$ 内で discrete なら, モノドロミー群 M は discrete になり, 値域 $\mathbb{C}^2/M$ は R上の $\mathbb{C}^*$ あるいは torus バンドルになる.

§5. $\mathbb{P}^1$ 上の第三種微分の反復積分として, アーベルの関数

$$\psi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots = \int_0^x \frac{dx}{1-x}\frac{dx}{x}$$

を考える.

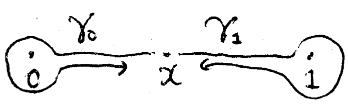
$$\psi_2(x) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\psi(x),$$
$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\log x$$

として 写像 F

$$x \longmapsto (\psi_2(x), \psi_1(x)) \in \mathbb{C}^2$$

を取る.

γ_0, γ_1 を $x=0,1$ を廻ってくる下の様な道とする.



モノドロミー群 M は以下の様に計算される.

$$\begin{bmatrix} \psi_2(x) \\ \psi_1(x) \\ 1 \end{bmatrix}_{\gamma_j} = M_j \begin{bmatrix} \psi_2(x) \\ \psi_1(x) \\ 1 \end{bmatrix} \qquad j = 0, 1$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \langle M_0, M_1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ & 1 & \mathbb{Z} \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

ここで,

$$Z := \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \}$$

とおくと, M は $\mathbb{C}^2 - Z$ に discontinuous に働いている.
$\mathbb{C}^2 - Z / M$ は, $z_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 上に, $\mathbb{C} / \langle 1, z_1 \rangle$ がファイバーとしてのっている空間である.

Abelの関数 ψ (あるいは写像 F) の自然な値域は $\mathbb{C}^2 - Z / M$ と考えられる.

References

[1] Parsin : A generalization of Jacobian variety. (1968)

[2] Yoshida : Local theory of Fuchsian systems ⋯ . F.E. (1978)