数理解析研究所講究録
第 376 巻 1980 年 60-70

二重特性根を持つ一階双曲型方程式系の解の特異性の伝播について

阪大 理学部 一ノ瀬 弥

§0. 序. 本稿では, 次の双曲型作用素系についての初期値問題を考察する.

$$(0.1)\qquad \mathbb{L} = D_t + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}(t,x,D_x) + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}(t,x,D_x)$$

$$\text{on } [0,T]\times R^n \qquad \left(D_t = -\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

ここで, 実数値関数 $\lambda_j(t,x,\xi)$ $(j=1,2)$ は通常の擬微分作用素のクラス $\mathcal{B}^\infty([0,T];S^1)$ に属し, 特に

$$(0.2)\qquad \lambda_j(t,x,\delta\xi) = \delta\,\lambda_j(t,x,\xi)\quad (|\xi|\geq M,\ \delta\geq 1)$$

なるものとする. $b_{jk}(t,x,\xi)$ は $\mathcal{B}^\infty([0,T];S^0)$ に属す.
$G(x) = {}^t(g_1(x), g_2(x))$ $(g_j(x)\in H_{-\infty} = \bigcup_s H_s)$ に対して, 初期値問題

$$(0.3)\quad \begin{cases} \mathbb{L}\, U(t,x) = 0 & \text{on } [0,T], \\ U(0,x) = G(x) \end{cases}$$

を考える．但し，$U(t,x) = {}^t(u_1(t,x), u_2(t,x))$ ．

本稿の目的は，特性根 $-\lambda_j(t,x,\xi)$ $(j=1,2)$ に関する条件

$$(*)\qquad \{\tau+\lambda_i, \{\tau+\lambda_j, \tau+\lambda_k\}\}(t,x,\xi) \equiv 0$$
$$\text{on } [0,T]\times R^{2n}_{x,\xi} \qquad (i,j,k = 1,2)$$

のもとで，解の特異性の伝播の様子を解析することである．なお，C^1 級関数 $f(t,x;\tau,\xi)$，$g(t,x;\tau,\xi)$ に対して，$\{f,g\}(t,x;\tau,\xi)$ はポアソンブラケットをあらわす．

最近，熊ヶ郷－谷口－戸崎 [4]，熊ヶ郷－谷口 [5] は，一般の主部対角形の双曲型作用素系について，解の特異性の伝播を調べた（[5] の定理 3.4）．このとき，解の特異性の伝播は無限個の“位相関数の多重積”を用いてあらわされる．本稿では，条件 (*) のもとでは特異性の伝播は 5 種類の位相関数 ϕ_1，ϕ_2，$\phi_1 \# \phi_2$，$\phi_2 \# \phi_1$，$\phi_1 \# \phi_2 \# \phi_1$ を用いてあらわされることを示す．特性根が包合的，すなわち，

$$(0.4)\quad \{\tau+\lambda_1, \tau+\lambda_2\} = 0$$
$$\text{on } \Sigma = \{(t,x,\xi)\,;\, \lambda_1 = \lambda_2\}$$

の場合 [1], [2], [6], [7], [8], [9], [10] 等の結果があるが，我々の扱うものは一般には包合的ではないことに注意する．例えば，$\lambda_1 = t\xi$，$\lambda_2 = -t\xi$ は条件 (*) をみたすが

，(0.4)は満たさない．

§1．準備． §0の $\lambda_j(t,x,\xi)$ $(j=1,2)$ に対し，$\phi_j(t,s;x,\xi)$ をアイコナール方程式

(1.1) $\partial_t\phi_j+\lambda_j(t,x,\nabla_x\phi_j)=0,\quad \phi_j|_{t=s}=x\cdot\xi$

の解とする．その時，"位相関数の多重積" $\Phi=\Phi_{j_1,\cdots j_{\nu+1}}(t_0,\cdots,t_{\nu+1};x,\xi)=\phi_{j_1}(t_0,t_1)\#\cdots\#\phi_{j_{\nu+1}}(t_\nu,t_{\nu+1})$ $(j_k=1,2,\ 0\leqq t_{\nu+1}\leqq\cdots\leqq t_0\leqq T_0$，"$T_0>0$ は，ν に独立な定数")を[4]に従って次で定義する．

(1.2) $$\Phi(t_0,\cdots t_{\nu+1};x^0,\xi^{\nu+1})=\sum_{k=1}^{\nu}\{\phi_{j_k}(t_{k-1},t_k;X_\nu^{k-1},\Xi_\nu^k)-X_\nu^k\cdot\Xi_\nu^k\}+\phi_{j_{\nu+1}}(t_\nu,t_{\nu+1};X_\nu^\nu,\xi^{\nu+1}),$$

但し，$X_\nu^0=x^0$ で，$\{X_\nu^k,\Xi_\nu^k\}_{k=1}^{\nu}(t_0,\cdots t_{\nu+1};x^0,\xi^{\nu+1})$ は

(1.3) $$\begin{cases} x^k=\nabla_\xi\phi_{j_k}(t_{k-1},t_k;x^{k-1},\xi^k),\\ \xi^k=\nabla_x\phi_{j_{k+1}}(t_k,t_{k+1};x^k,\xi^{k+1}),\quad k=1,\cdots,\nu \end{cases}$$

の解とする(詳しくは，[4]の定理1.8をみよ)．特に断りのない限り，上述の正定数 T_0 を以下用いる．次に，$J=(j_1,\cdots,j_{\nu+1})$ $(j_k=1,2)$，(y,η) と点列 $\{t_0,\cdots,t_{\nu+1}\}$ $(T_0\geqq t_0\geqq\cdots\geqq t_{\nu+1}\geqq0)$ に対して，$(Q_J,P_J)(\sigma)=(Q_J,P_J)(\sigma;t_0,\cdots,t_{\nu+1};y,\eta)$ $(t_{\nu+1}\leqq\sigma\leqq t_0)$ は，初期条件 $(Q_J,P_J)(t_{\nu+1})=(y,\eta)$ をみたし，$t_k<\sigma<t_{k-1}$ $(k=1,\cdots,\nu+1)$ なる σ について，方程式

$$(1.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dQ_J}{d\sigma}(\sigma) = \nabla_\xi \lambda_{j_k}(\sigma, Q_J, P_J), \\ \dfrac{dP_J}{d\sigma}(\sigma) = -\nabla_x \lambda_{j_k}(\sigma, Q_J, P_J) \end{cases}$$

をみたす σ の連続関数として定義される．この $(Q_J, P_J)(\sigma)$ と (1.2) の Φ について，次の命題を得る．

命題 1.1. (y, η) を R^{2n} の任意の点とし，x を

$$(1.5)\qquad y = \nabla_\xi \Phi_{j_1, \ldots, j_{\nu+1}}(t_0, \ldots, t_{\nu+1}; x, \eta)$$

をみたす点とする．そのとき，(1.4) の $(Q_J, P_J)(\sigma; t_0, \cdots t_{\nu+1}; y, \eta)$ $(J = (j_1, \cdots, j_{\nu+1}))$ と (1.3) の解 $\{X_\nu^k, \Xi_\nu^k\}_{k=1}^{\nu}$ について，

$$\begin{aligned} &(Q_J, P_J)(t_l; t_0, \cdots, t_{\nu+1}; y, \eta) \\ &= (X_\nu^l, \Xi_\nu^l)(t_0, \cdots, t_{\nu+1}; x, \eta) \quad (l = 0, \cdots, \nu+1) \end{aligned}$$

$$(X_\nu^0 = x,\ \Xi_\nu^0 = \nabla_x \Phi_{j_1, \cdots, j_{\nu+1}}(t_0, \cdots, t_{\nu+1}; x, \eta),\quad X_\nu^{\nu+1} = y,\ \Xi_\nu^{\nu+1} = \eta)$$

が成立する．

証明は，略す．

§2．位相関数の多重積の縮約．先づ，本稿で基本となる補題を述べる．

補題2．1．§1で定義された $(Q_J, P_J)(\sigma; t_0, \cdots, t_{\nu+1}; y, \eta)$ $(J=(j_1, \cdots, j_{\nu+1}),\ j_k = 1, 2,\ T_0 \geqq t_0 \geqq \cdots \geqq t_{\nu+1} \geqq 0)$ に対して，$v(\sigma)$ を

$$v(\sigma) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\sigma, Q_J(\sigma), P_J(\sigma))$$

で定義する．このとき，λ_1 と λ_2 が §0で述べた条件(＊)を満足するならば，$v(\sigma)$ は σ についての一次関数となる．

証明．$\sigma \in (t_k, t_{k-1})$ なる σ について

$$\frac{dv}{d\sigma}(\sigma) = -\{\tau + \lambda_2, \tau + \lambda_{j_k}\}(\sigma, Q_J(\sigma), P_J(\sigma)) + \{\tau + \lambda_1, \tau + \lambda_{j_k}\}(\sigma, Q_J(\sigma), P_J(\sigma))$$

が成立する．よって，$j_k = 1$ でも $j_k = 2$ でも

$$\frac{dv}{d\sigma}(\sigma) = \{\tau + \lambda_1, \tau + \lambda_2\}(\sigma, Q_J(\sigma), P_J(\sigma)).$$

$v(\sigma)$ は $C^1([t_{\nu+1}, t_0])$ に属する．次に，条件(＊)より

$$\frac{d^2v}{d\sigma^2}(\sigma) = -\{\{\tau + \lambda_1, \tau + \lambda_2\}, \tau + \lambda_{j_k}\} = 0 \qquad (t_k < \sigma < t_{k-1})$$

が成立する．よって補題を得る．証明終り．

<u>定理2.2.</u>　条件(*)を仮定する．そのとき，$\{t, t_1, t_2, s\}$ $(T_0 \geq t > t_1 > t_2 > s \geq 0)$ に対して，

$$(2.1)\quad \begin{cases} \psi_1 = t - \dfrac{(t_1 - t_2)(t_2 - s)}{t - t_1 + t_2 - s}, \\ \psi_2 = t_1 - t_2 + s - \dfrac{(t_1 - t_2)(t_2 - s)}{t - t_1 + t_2 - s} \end{cases}$$

とおけば，

$$(2.2)\quad \Phi_{1,2,1}(t, \psi_1, \psi_2, s; x, \xi) = \Phi_{2,1,2}(t, t_1, t_2, s; x, \xi)$$

が成立する．

<u>証明の方針</u>．　(2.1)の関数 ψ_j $(j = 1, 2)$ を，(2.2)をみたす関数として決定する．今，(2.2)をみたす ψ_j が存在したとする．但し，この ψ_j は x と ξ には独立と仮定しておく．　[4]の定理2.3より，

$$\begin{cases} \partial_t \Phi_{2,1,2}(t, t_1, t_2, s) + \lambda_2(t, x, \nabla_x \Phi_{2,1,2}) = 0, \\ \Phi_{2,1,2}|_{t=t_1} = \Phi_{1,2}(t_1, t_2, s). \end{cases}$$

よって，$\Delta = (t, \psi_1, \psi_2, s; x, \xi)$ とおけば，(2.2)より $\Phi_{1,2,1}(\Delta)$ は

$$(2.3)\quad \begin{cases} \partial_t (\Phi_{1,2,1}(\Delta)) + \lambda_2(t, x, \nabla_x \Phi_{1,2,1}(\Delta)) = 0, \\ \Phi_{1,2,1}(\Delta)|_{t=t_1} = \Phi_{1,2}(t_1, t_2, s) \end{cases}$$

をみたす．　(2.3)式を[4]の定理2.3及び本稿の補題2.1を用いて書き換えることにより，ψ_j が

$$(2.4)\quad \begin{cases} \psi_1 - \psi_2 = t - t_1 + t_2 - s, \\ \psi_1^2 - \psi_2^2 = t^2 - t_1^2 + t_2^2 - s^2 \end{cases}$$

を満足するならば，(2.3) よって (2.2) が成立することがわかる．これを ψ_j について解いて (2.1) を得る．

<u>注意</u>．$R^3_x \times R^3_\xi$ 上の関数 $\lambda_1 = \xi_1$, $\lambda_2 = x_1\xi_2 + \xi_3$ は，条件(＊)を満足する．このとき位相関数の多重積を実際に計算すると，

$$\Phi_{1,2,1}(t, t_1', t_2', s; x, \xi) = \{x_1 - (t - t_1' + t_2' - s)\}\xi_1 + \{x_2 - (t_1' - t_2')x_1 + (t - t_1')(t_1' - t_2')\}\xi_2 + \{x_3 - (t_1' - t_2')\}\xi_3,$$

$$\Phi_{2,1,2}(t, t_1, t_2, s; x, \xi) = \{x_1 - (t_1 - t_2)\}\xi_1 + \{x_2 - (t - t_1 + t_2 - s)x_1 + (t_1 - t_2)(t_2 - s)\}\xi_2 + \{x_3 - (t - t_1 + t_2 - s)\}\xi_3.$$

上の $\Phi_{1,2,1}$, $\Phi_{2,1,2}$ について，特に $\xi_2 = \xi_3 = 0$ 更に $x_1 = \xi_1 = \xi_3 = 0$ とおけば，任意の x と ξ ($\xi \neq 0$) について (2.2) を満足する関数 ψ_j は，(2.1) の関数に限ることがわかる．

<u>系 2.3.</u> 条件(＊)を仮定する．このとき，任意の ν (≥ 2), $J = (j_1, \cdots, j_{\nu+1})$ ($j_k = 1, 2$, $j_k \neq j_{k+1}$) と

$\{t_0, \cdots, t_{\nu+1}\}$ $(T_0 \geq t_0 > \cdots > t_{\nu+1} \geq 0)$ に対して，x と ξ に独立な数 t_1', t_2' $(t_0 > t_1' > t_2' > t_{\nu+1})$ が存在して，

$$\Phi_{j_1,\cdots,j_{\nu+1}}(t_0, \cdots, t_{\nu+1}; x, \xi) = \Phi_{1,2,1}(t_0, t_1', t_2', t_{\nu+1}; x, \xi) \tag{2.5}$$

が成立し，又 任意の点 (y, η) に対して

$$(Q_{j_1,\cdots,j_{\nu+1}}, P_{j_1,\cdots,j_{\nu+1}})(t_0; t_0, \cdots, t_{\nu+1}; y, \eta) = (Q_{1,2,1}, P_{1,2,1})(t_0; t_0, t_1', t_2', t_{\nu+1}; y, \eta) \tag{2.6}$$

が成りたつ．

証明． 定理 2.2 と [4] の定理 2.3 から，帰納的に (2.5) を得る．次に (2.5) 式と命題 1.1 より，(2.6) を得る．

証明終り．

§3．結果． [5] に従って概念 'ε - station set' を導入する． $J = (j_1, \cdots, j_{\nu+1})$，点 (y, η) と ε $(0 \leq \varepsilon \leq 1)$ に対して，点列 $\{t_1, \cdots, t_\nu\}$ $(T_0 \geq t \geq t_1 \geq \cdots \geq t_\nu \geq 0)$ が ε - station set $\Lambda_{\varepsilon,J}(t; y, \eta)$ に属するとは，$(x^k, \xi^k) = (Q_J, P_J)(t_k; t, t_1, \cdots, t_\nu, 0; y, \eta)$ とおくとき

$$|\lambda_{j_k}(t_k, x^k, \xi^k) - \lambda_{j_{k+1}}(t_k, x^k, \xi^k)| \leq \varepsilon \langle \xi^k \rangle \tag{3.1}$$

$$(k = 1, \cdots, \nu)$$

が成立するときに言い，これを用いて

(3.2) $\Lambda_{\varepsilon}^{J}(t;y,\eta) = \{(Q_J, P_J)(t;t,t_1,\cdots,t_\nu,0;y,\eta);$
$\{t_1,\cdots,t_\nu\} \in \Lambda_{\varepsilon,J}(t;y,\eta)\}$

とおく．方程式 (0.3) の初期値 $g_j(x)$ $(j=1,2)$ の波面集合 WF(G) に対して

(3.3) $\tilde{\Gamma}_t = \{\delta\Lambda_0^J(t;y,\eta);\ (y,\eta)\in WF(G),\ \delta>0,$
$|\eta|\geq M_0,\ J=(1),(2),(1,2),(2,1),(1,2,1)\}$

とおく（M_0 は，(0.2) の M より定まる十分大きな数）．このとき，次の主要結果を得る．

定理 3.1. 条件 (*) を仮定するならば，(0.3) の解 $U(t,x)$ の時刻 t での波面集合 WF(U(t)) について，

(3.4) $WF(U(t)) \subset \tilde{\Gamma}_t \qquad (0\leq t\leq T_0)$

が十分小さい $T_0>0$ に対して成立する．

証明の方針． 集合 $\Gamma_{t,\varepsilon}$ を (3.3) 式中の M_0 を用いて

(3.5) $\Gamma_{t,\varepsilon} = \{\delta\Lambda_{\varepsilon}^{J}(t;y,\eta);\ (y,\eta)\in WF_{\varepsilon}(G),\ J=(j_1,\cdots,j_{\nu+1}),\ j_k=1,2,\ \nu=0,1,\cdots,\ \delta>0,\ |\eta|\geq M_0\}$

$(WF_{\varepsilon}(G) = \{(y,\eta);\ \mathrm{dis}\{(y,|\eta|^{-1}\eta), WF(G)\}<\varepsilon\})$

とおく．熊ヶ郷－谷口 [5] の定理 3.4 は，

(3.6) $\qquad WF(U(t)) \subset \bigcap_{0<\varepsilon\leqq 1} \Gamma_{t,\varepsilon} \qquad (0\leqq t\leqq T_0)$

を示している．このことから，定理3.1を証明するには，

(3.7) $\qquad \bigcap_{0<\varepsilon\leqq 1} \Gamma_{t,\varepsilon} = \tilde{\Gamma}_t$

なることを示せばよい．$\bigcap_{0<\varepsilon\leqq 1} \Gamma_{t,\varepsilon} \supset \tilde{\Gamma}_t$ なることは両辺の集合の定義より明らかであるから，$\bigcap_{0<\varepsilon\leqq 1} \Gamma_{t,\varepsilon} \subset \tilde{\Gamma}_t$ を示せばよい．以後の証明中，補題2.1を本質的に用いることを注意して，後は省略する．

例．条件(*)を満足する $n=3$ のときの例を以下にあげる．

1. $\lambda_k = t\sum_{j=1}^{3} a_j^k \xi_j \qquad (k=1,2,\ a_j^k$ は実定数).
2. $\lambda_1 = \xi_1, \quad \lambda_2 = x_1\xi_2 + \xi_3$.
3. $\lambda_1 = x_2\xi_1 + \xi_3, \quad \lambda_2 = -x_3\xi_1 + \xi_2$.
4. $\lambda_1 = x_1\xi_1, \quad \lambda_2 = t\xi_2$.

文献（本稿中引用したもののみ）．

[1] S. Alinhac : Comm. Partial Differential

Equations, 3(10) (1978), 877-905.

[2] M. Hata : 大阪大学修士論文 (1977).

[3] W. Ichinose : to appear.

[4] H. Kumano-go, K. Taniguchi and Y. Tozaki : Comm. Partial Differential Equations, 3(4) (1978), 349-380.

[5] H. Kumano-go and K. Taniguchi : Funkcial. Ekvac., 22 (1979).

[6] D. Ludwig and B. Granoff : J. Math. Anal. Appl., 21 (1968), 556-574.

[7] Y. Morimoto : Comm. Partial Differential Equations, 4 (6) (1979), 609-643.

[8] J. C. Nosmas : C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 288 (1979), 129-132.

[9] K. Taniguchi : to appear.

[10] G. A. Uhlmann : Comm. Partial Differential Equations, 2 (7) (1977), 713-779.