

## 放物型方程式の或る逆問題について

東大 理 鈴木 貴

東大 理 村山 令二

### §1. Introduction

我々がここで扱うのは、Neumann条件付きの、放物型方程式の初期値と係数を、解の境界値から決定するという問題である。

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  を、滑らかな境界  $\partial\Omega$  を持つ有界領域、 $p(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ 、 $a(x) \in L^2(\Omega)$  とする。放物型方程式:

$$(E_0) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -A_p u \equiv \Delta u - p(x)u \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0 & (\nu: \text{単位外法線ベクトル}) \\ u \Big|_{t=0} = a(x) \end{cases}$$

の解  $u = u(t, x)$  は、良く知られているように初期値  $a$  と係数  $p$  によって決まるわけであるが、逆に、 $a(x)$ 、 $p(x)$  は、ある時刻までの解  $u$  の境界上の値により決まるであろうか。我々は、空間次元が 1 のとき、初期値  $a$  にある仮定をおいて、上の問題が肯定的であることを証明した。 $a(x)$  について、ある程度の

仮定をおかなければならないことは容易に予想される。例えば、 $a(x) \equiv 0$  ならば、 $(E_g)$  の解は  $u \equiv 0$  であり、 $p(x)$  は一意には決まらない。

Def.  $N(x) - \Delta$  に Neumann 条件を与えたものの、 $L^2(\Omega)$  の実現を  $A_p$ , その固有値、固有関数を、 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\varphi(\cdot, \lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$  とする。初期値  $a \in L^2(\Omega)$  が、 $(a, \varphi(\cdot, \lambda_n)) \neq 0$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) をみたすとき  $a$  を、 $A_p$  に関する generating element であるという。

我々の結果は次のものである。

Theorem  $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}^1$

$p(x), g(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $a(x), b(x) \in L^2(0, 1)$  に対する次の方程式で、(I) においては、 $a$  は  $A_p$  に関する generating element であるとする。

$$(I) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + (p(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2})u(t, x) = 0 & (t > 0, x \in (0, 1)) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, \xi) = 0 & (t > 0, \xi = 0, 1) \\ u(0, x) = a(x) & (x \in [0, 1]) \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + (g(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2})v(t, x) = 0 & (t > 0, x \in (0, 1)) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(t, \xi) = 0 & (t > 0, \xi = 0, 1) \\ v(0, x) = b(x) & (x \in [0, 1]) \end{cases}$$

その時、ある有限時刻  $0 < T_0 < T_1 < +\infty$  があって、 $u(t, \xi) = v(t, \xi)$  ( $T_0 < t < T_1, \xi = 0, 1$ ) ならば、 $p(x) = g(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ),  $a(x) = b(x)$  ( $a, e^{-x} \in [0, 1]$ ) が成立する。

Pierce [6] は、初期値が 0、境界条件が  $\xi = 0$  で、第三

種非齊次 (非齊次項  $\neq 0$ ),  $\xi=1$  で '第三種齊次' の場合に.

$u(t, \xi)$  ( $0 < t < T, \xi=0$ ) の観測によって  $p(x) = q(x)$  を示した。それによると、このような状況のもとで、 $A_p$  のスペクトル関数が観測によって一意に決まり、Gelfand-Levitan の理論 [2] と結びつく。我々の場合にはそうではないけれども、証明のアイデアにおいて、Gelfand-Levitan [2] に負うところがある。(§2 参照)

偏微分方程式の初期値境界値問題では、係数、初期値とも既知のものとするのに対し、上の問題は、その逆問題と言える。既知量として、物理的に直接測定される、境界における解の値を用いている点で、Sabatier [8] の言う 応用的逆問題 (applied inverse problem) である。

放物型方程式の逆問題には、未知量にある条件 (例えば、依存する空間変数が一つ少ないとか、変数分離形になっているとか) をつけた、Prilepko [7], Isakov [3], Iskenderov [4] 等、Optimization として扱った Chavent [1], などがあるが、我々の定理はそれらの扱いとは異なっている。

以下では、§2 で、定理の証明のあらすじを述べる。その際必要な Proposition を §3 で証明する。§4 で、多次元の場合などへの注意を述べる。

## §2. 定理の証明のあらすじ

$q(x) - \frac{d^2}{dx^2} 1 =$  Neumann 条件を課したものの  $A_q$  の固有値、固有

関数を  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\psi(\cdot, \mu_n)\}_{n=1}^{\infty}$  とし,  $\varphi(0, \lambda_n) = \psi(0, \mu_n) = 1$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) により正規化する。  $\rho_n = \int_0^1 \varphi(t, \lambda_n)^2 dt$ ,  $\sigma_n = \int_0^1 \psi(t, \mu_n)^2 dt$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) とおくと, (I), (II) の解は, 次のように固有関数展開される:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \frac{(a, \varphi(\cdot, \lambda_n))}{\rho_n} \varphi(x, \lambda_n)$$

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n t} \frac{(b, \psi(\cdot, \mu_n))}{\sigma_n} \psi(x, \mu_n) \quad (t > 0, x \in [0, 1])$$

仮定より  $u(t, \xi) = v(t, \xi)$  ( $T_0 < t < T_1, \xi = 0, 1$ ) であるが, 両辺は  $t$  について解析的だから, 上式は  $0 < t < +\infty, \xi = 0, 1$  に  $\forall n$  で成り立つ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \frac{(a, \varphi(\cdot, \lambda_n))}{\rho_n} \varphi(\xi, \lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n t} \frac{(b, \psi(\cdot, \mu_n))}{\sigma_n} \psi(\xi, \mu_n).$$

$a$  が generating element であり,  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  が simple  $\neq 0$  である。  $\forall n \exists m(n) \lambda_n = \mu_{m(n)}, \frac{(a, \varphi(\cdot, \lambda_n))}{\rho_n} = \frac{(b, \psi(\cdot, \mu_{m(n)}))}{\sigma_{m(n)}} \neq 0$ 。よってまた,  $\xi = 1$  とし,  $\frac{(a, \varphi(\cdot, \lambda_n))}{\rho_n} \varphi(1, \lambda_n) = \frac{(b, \psi(\cdot, \mu_{m(n)}))}{\sigma_{m(n)}} \psi(1, \mu_{m(n)})$  より,  $\varphi(1, \lambda_n) = \psi(1, \mu_{m(n)})$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )。

ここで次の主張をする。

Prop 1) 次のような,  $0 \leq t \leq x \leq 1$  において二階連続微分可能な関数  $k(x, t)$  が存在する;

$$(E) \begin{cases} k_{xx}(x, t) - k_{tt}(x, t) + p(t)k(x, t) = q(x)k(x, t) \\ k_t(x, 0) = 0, \quad k(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x \{q(\omega) - p(\omega)\} d\omega \end{cases}$$

2) 上の  $k$  に対して,

$$\psi(x, \mu_{m(n)}) = \varphi(x, \lambda_n) + \int_0^x k(x, t) \varphi(t, \lambda_n) dt \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

1) の証明は §3 で行なうことにして, 2) を示す。

等式の右辺を  $\psi(x)$  とおき、 $\lambda_n = \mu_{m(n)} = \lambda$  とおくと

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x, \lambda) + \left[ \frac{d}{dx} k(x, x) \right] \varphi(x, \lambda) + k(x, x) \frac{d}{dx} \varphi(x, \lambda) + k_x(x, x) \varphi(x, \lambda) + \int_0^x k_{xx}(x, t) \varphi(t, \lambda) dt$$

$$\left( p(x) - \frac{d^2}{dx^2} \right) \varphi(x, \lambda) = \lambda \varphi(x, \lambda) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \lambda \psi(x) &= \lambda \varphi(x, \lambda) + \int_0^x k(x, t) \lambda \varphi(t, \lambda) dt \\ &= \lambda \varphi(x, \lambda) + \int_0^x k(x, t) \left\{ p(t) \varphi(t, \lambda) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t, \lambda) \right\} dt \\ &= \lambda \varphi(x, \lambda) + \int_0^x \{ k(x, t) p(t) - k_{tt}(x, t) \} \varphi(t, \lambda) dt \\ &\quad - \left[ k(x, t) \frac{d}{dt} \varphi(t, \lambda) - k_t(x, t) \varphi(t, \lambda) \right]_{t=0}^{t=x} \end{aligned}$$

$\varphi$  に関する境界条件を考慮し、 $(*)$  の  $k$  の条件を考へれば

$$\lambda \psi(x) + \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = q(x) \psi(x),$$

$$\text{一方、} \psi'(0) = \varphi'(0, \lambda) + k(0, 0) \varphi(0, \lambda) = 0, \quad \psi(0) = \varphi(0, \lambda) = 1 \text{ である。}$$

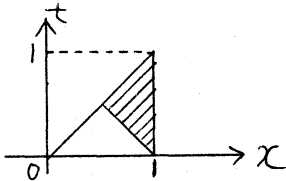
常微分方程式の Cauchy 問題の解の一意性より  $\psi(x) = \varphi(x, \lambda) //$

定理の証明を続ける。Prop によると

$$\begin{cases} \psi(1, \mu_{m(n)}) = \varphi(1, \lambda_n) \quad \text{より} & \int_0^1 k(1, t) \varphi(t, \lambda_n) dt = 0 \\ \psi'(1, \mu_{m(n)}) = 0 & k(1, 1) \varphi(1, \lambda_n) + \int_0^1 k_x(1, t) \varphi(t, \lambda_n) dt = 0 \end{cases}$$

これが  $n=1, 2, 3, \dots$  に  $\rightarrow$  して成立し、 $\{\varphi(\cdot, \lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が  $L^2(0, 1)$  で完全だから、 $k(1, t) = k_x(1, t) = 0 \quad (t \in [0, 1])$ 。  $k$  が (E) の双曲

型方程式の解であることから、依存領域の考察により、左図



の斜線  $k(x, t) \equiv 0$ 。特に、次が成立する:

$$k(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x \{ q(\omega) - p(\omega) \} d\omega = 0 \quad \left( \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right)$$

$$\text{したがって、} \quad q(x) = p(x) \quad \left( \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right).$$

次に  $\hat{q}(x) = q(1-x)$ ,  $\hat{p}(x) = p(1-x)$  とおき、上の論法を繰り返せば、 $\hat{q}(x) = \hat{p}(x)$  ( $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ )  $\therefore q(x) = p(x)$  ( $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ )。

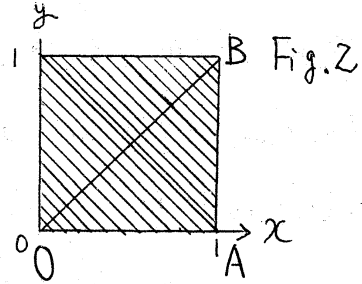
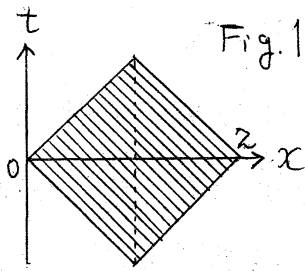
最後に (I), (II) の解を固有関数展開した式において、 $(a, \varphi(\cdot, \lambda_n)) = (b, \varphi(\cdot, \lambda_n))$  ( $n=1, 2, \dots$ ) を得るから、 $a(x) = b(x)$  ( $a.e. x \in (0, 1]$ ) を得る。 //

### §3. 方程式 (E) の解の存在について

$p(t)$  を  $C^1[E, 1]$  に、 $q(x)$  を  $C^1[0, 2]$  にそれぞれ拡張して次の問題 (E)<sub>0</sub> の解  $K(x, t)$  の存在を示す:

$$(E)_0 \begin{cases} K_{xx}(x, t) - K_{tt}(x, t) + p(t)K(x, t) = q(x)K(x, t) \\ K_t(x, 0) = 0 \\ K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x \{q(\omega) - p(\omega)\} d\omega \end{cases}$$

ただし、(E)<sub>0</sub> は下の Fig. 1 の斜線部で考える。



変数変換  $\xi = \frac{1}{2}(x+t)$ ,  $\eta = \frac{1}{2}(x-t)$  により (E)<sub>0</sub> を書き直し、 $\xi, \eta$  を改めて  $x, y$  と書くと、Fig. 2 の斜線部における次の (E)<sub>1</sub> を得る。

$$(E)_1 \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = r(x, y)u(x, y) \\ (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})(x, x) = 0 \\ u(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$\text{こゝに } u(x, y) = k(x+y, x-y), \quad r(x, y) = \frac{1}{2} \{g(x+y) - p(x-y)\}.$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \{g(\alpha) - p(\alpha)\} d\alpha.$$

Lemma 1. 双曲型方程式  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = r(x, y)u(x, y)$  の Riemann 関数を  $R(x, y; \alpha_0, \beta_0)$ ,  $Q(x, \xi)$  を  $(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y})(\xi, \xi; \alpha_0, 0)$  としたとき、

$\psi \in C^2[0, 1]$  を次の積分方程式 (Q) の解とする:

$$(Q) \quad \psi(x) + \int_0^x Q(x, \xi) \psi(\xi) d\xi = 2\psi(x) - \psi(0)$$

そうすれば、方程式:

$$(E)_2 \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = r(x, y)u(x, y) \\ u(x, x) = \psi(x) \\ u(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

は、Fig. 2 の斜線部で、二階連続微分可能な解  $u$  をもち、 $u$  は (E)<sub>1</sub> の解にもなる。

証明 (Q) は、第二種 Volterra 積分方程式だから、 $Q$  が  $C^2([0, 1] \times [0, 1])$  に属し、 $\psi$  が  $C^2[0, 1]$  に属すれば、解  $\psi \in C^2[0, 1]$  を持つ。 $\psi \in C^2[0, 1]$  であることは、 $p, g \in C^1[0, 1]$  による。 $Q \in C^2([0, 1] \times [0, 1])$  は、 $Q$  の定義と、下の Lemma 2 による。次に、方程式 (E)<sub>2</sub> は、特性曲線  $OA$ 、非特性曲線  $OB$  上に値を与えて双曲型方程式を解く問題であるが、Picard [5] が扱っている。主張の後半を述べると、Riemann の公式により、

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} \{u(x, x) + u(0, 0)\} + \frac{1}{2} \int_0^x \left\{ R(\xi, \xi; \alpha_0, 0) \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) (\xi, \xi) \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) (\xi, \xi; \alpha_0, 0) u(\xi, \xi) \right\} d\xi$$

が成立するから、 $\psi(x), \varphi(x)$  の定義により、

$$\int_0^x R(\xi, \xi; \lambda, 0) \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] (\xi, \xi) d\xi = 0.$$

Lemma 2 に示される、 $R(\xi, \xi; \lambda, 0)$  の  $\lambda$  に関する微分可能性 (その導関数は有界である) によつて上式を  $\lambda$  について微分して、

$$R(\lambda, \lambda; \lambda, 0) \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] (\lambda, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial R(\xi, \xi; \lambda, 0)}{\partial \lambda} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] (\xi, \xi) d\xi = 0.$$

Gronwall の不等式を用いて、 $\left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) (\lambda, \lambda) = 0$  //

この Lemma により、 $(E)_1$  の  $n$ -階連続微分可能な解が得られ、従つて、 $(E)_1$  から変数変換により  $(E)_0$  にうつつて、 $(E)$  の解の存在が示された。

Lemma 2  $R = R(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)$  とおくとき、 $R, \frac{\partial R}{\partial \alpha}, \frac{\partial R}{\partial \beta}, \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha \partial \beta}, \frac{\partial^2 R}{\partial \beta^2}, \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha \partial \alpha_0}, \frac{\partial^2 R}{\partial \beta \partial \beta_0}, \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha \partial \alpha_0}, \frac{\partial^2 R}{\partial \beta^2}, \frac{\partial^2 R}{\partial \beta \partial \beta_0}$  は、 $\forall \lambda \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  で連続である。

証明は、 $R$  を逐次近似法により構成する手続きを詳しく検討すれば、得られる。その時、 $r \in C^1([0, 1] \times [0, 1])$  に注意する。 //

#### §4. 多次元の場合などへの注意

多次元の場合に Theorem が成立するかどうか、今のところわかっていないが、次のことは、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  に対して証明できる。

Prop 1.  $p(\alpha) \equiv f(\alpha) \ (x \in \bar{\Omega})$  かつ、 $(a, \varphi(\cdot, \lambda_1)) \neq 0$  ならば、 $u(t, \xi) = v(t, \xi) \ (T_0 < t < T_1 < +\infty, \xi \in \partial\Omega)$  のとき、



$$p(x) = q(x) \quad (x \in \Omega) \quad a(x) = b(x) \quad (a e^{-x} \in \Omega).$$

証明には、最小固有値に属する固有関数  $\psi(\cdot, \lambda)$  の定値性と、 $p(x) \geq q(x)$  の仮定のもとでは、 $A_p, A_q$  のスペクトルが“一斉に同じ方向へずれている”ことを用いる。Theorem の証明とは、全く異なり、 $Q$  が、 $A_p$  に関する generating element であることまでは要求しない。

一次元の場合については、Theorem の次のような variation がある：

1. Theorem において、境界条件は第三種にしてもよい。また、境界条件を Dirichlet にした場合にも、 $u(t, \xi) = v(t, \xi)$  ( $T_0 < t < T_1, \xi = 0, 1$ ) のかわりに、 $\frac{\partial u}{\partial x}(t, \xi) = \frac{\partial v}{\partial x}(t, \xi)$  ( $T_0 < t < T_1, \xi = 0, 1$ ) とすれば、結論が成立する。この事は、上の Prop 1. についても同様である。

2. 最高階の係数が 1 でない場合にも、Liouville 変換を利用すると、Theorem に帰着される場合がある：

Prop 2.  $d(x) > 0$  ( $x \in [0, 1]$ ),  $d(x) \in C^3[0, 1]$  として、Theorem の (I), (II) の方程式がそれぞれ、 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(d(x) \frac{\partial u}{\partial x}) - p(x)u$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(d(x) \frac{\partial v}{\partial x}) - q(x)v$  の時も、結論は成り立つ。

最高階の係数を決める問題については、一次元の場合に、Liouville 変換を利用することにより、Theorem が応用される場合がある：

Prop 3.  $\alpha(x), \beta(x) \in C^3[0,1], \alpha(x), \beta(x) > 0 (x \in [0,1]),$   
 $a(x), b(x) \in L^2(0,1)$  としたとき、次の方程式:

$$(I) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = -A_\alpha u \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) & (t > 0, x \in (0, 1)) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, \xi) = 0 & (t > 0, \xi = 0, 1) \\ u(0, x) = a(x) & (x \in [0, 1]) \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = -A_\beta v \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) & (t > 0, x \in (0, 1)) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(t, \xi) = 0 & (t > 0, \xi = 0, 1) \\ v(0, x) = b(x) & (x \in [0, 1]) \end{cases}$$

において、 $a$  は、 $A_\alpha$  に関する generating element, 更に、

$\frac{\beta(0)}{\alpha(0)} = \frac{\beta(1)}{\alpha(1)} = \left( \frac{\beta'(0)}{\alpha'(0)} \right)^2 = \left( \frac{\beta'(1)}{\alpha'(1)} \right)^2, \int_0^1 \frac{dA}{\sqrt{\alpha(A)}} = \int_0^1 \frac{dA}{\sqrt{\beta(A)}}$  とする。  
 その時、ある有限時刻  $0 < T_0 < T_1 < +\infty$  があって、

$u(t, \xi) = v(t, \xi) (T_0 < t < T_1, \xi = 0, 1)$  ならば、 $\alpha(x) = \beta(x) (x \in [0, 1])$   
 $a(x) = b(x) (a.e. x \in (0, 1))$ 。

Prop 4. Prop 3 において、方程式 (I), (II) の境界条件が、Dirichlet であり、 $\alpha, \beta$  が  $\frac{\beta(0)}{\alpha(0)} = \frac{\beta(1)}{\alpha(1)}, \int_0^1 \frac{dA}{\sqrt{\alpha(A)}} = \int_0^1 \frac{dA}{\sqrt{\beta(A)}}$  であるとするとき、 $a$  が  $A_\alpha$  に関する generating element である時、 $\alpha(\xi) \frac{\partial u}{\partial x}(t, \xi) = \beta(\xi) \frac{\partial v}{\partial x}(t, \xi) (T_0 < t < T_1, \xi = 0, 1)$  であれば、Prop 3 の結論が成立する。

以上の Prop 2 ~ Prop 4 について、drift の項がある場合などについては、検討中である。

## References

- [1] Chavent, G., Analyse fonctionnelle et identification de coefficients répartis dans les équations aux dérivées partielles, These, Paris (1971)
- [2] Gelfand, I. M., Levitan, B. M., On the determination of a differential equation from its spectral function, Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. 15 No. 4 (1951) (Russian)  
= English translation: Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2. Vol 1 253 ~ 304 (1955)
- [3] Isakov, V. M., Uniqueness theorems for inverse problems of heat potentials, Siberian Math. J. vol 17 No. 2 202 ~ 212 (1977)
- [4] Iskenderov, A. D., Multidimensional inverse problems for linear and quasi-linear parabolic equations, Dokl. Akad. Nauk. SSSR Tom 225 No. 5 1564 ~ 1568 (1975)
- [5] Picard, E., 偏微分方程式論. 山口昌哉・田村祐三訳  
現代数学社 (1977)
- [6] Pierce, A., Unique identification of eigenvalues and coefficients in a parabolic problem, SIAM J. Control & Optimization vol 17 No. 4 494 ~ 499 (1979)
- [7] Prilepko, A. I., Inverse problems of potential theory

(elliptic, parabolic, hyperbolic, and transport equations)

Mathematical Notes vol 14 990~996 (1973)

[8] Sabatier, P., C., Introduction to applied inverse problems. Springer Lecture Notes in Physics 85

Applied Inverse Problems 1~26 (1978)