数理解析研究所講究録
第 377 巻 1980 年 76-90

Joint spectrum と joint numerical range について

弘前大 理 長 宗雄
高口 真

1.序. 1955年, Arens and Calderon は多変数関数論の研究に joint spectrum を導入した。その後. Taylor は新しい joint spectrum の定義を与え研究を進めた。これに対し、作用素論でも Bunce, Dekker, Dash, Żelazko. etc. らによって joint spectrum の研究が進められている。一方 Halmos は numerical range の一つの拡張として. joint numerical range を考え. それが凸性をもつかという問題を1967年の著書で提起している。1969年に、それぞれの学位論文で Dash と Dekker は joint numerical range についてのいくつかの結果を発表した. それ以来いく人かの人達によって joint numerical range の研究が進められている。ここでは. joint numerical range と joint spectrum との関連について. また. joint numerical range の boundary についてのいくつかの結果を報告する。先ず. 有限個の作用素族に対して.

joint operator norm, joint numerical radius, joint spectral radius を定義し，single operatorのときと同様に joint operator norm と joint numerical radius の等しい作用素族として joint normaloid を定義する。可換な正規作用素族、Toeplitz 作用素族，可換な正規拡大をもつ subnormal 作用素族は joint normaloid の例である。joint normaloid に属する作用素族の joint numerical range の closue の extreme point は joint approximate eigenvalue であり，さらに，それが joint numerical range の bare point であるならば joint eigenvalue である。また，特別な型のテンソル積で与えられた作用素族の場合には，Dash, Dash and Schechter は，その joint spectrum および joint numerical range が非常に simple なものになることを示したが，joint operator norm も同様に simple なものであり，joint normaloid, joint convex になるための条件も simple に述べることができる。

最後に single operator の場合と同様にして，有限個の作用素族についても joint essential numerical range を定義し，Lancaster の定理が作用素族の場合にも一般化できることを示す。

2. 定義と既知の結果.

H を複素ヒルベルト空間とし、その上の有界線形写象全体を $B(H)$ とする。n 個の対 $A=(A_1,\cdots,A_n)\subset B(H)$ に対して A の joint numerical range $W(A)$ とは

$$W(A)=\{((A_1x,x),\cdots,(A_nx,x))\ ;\ x\in H,\ \|x\|=1\}$$

なる $\mathbb{C}^n$ の subset である. これは一般には convex にはならない.

また、$\mathbb{C}^n$ の点 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ が A の joint approximate point spectrum $\sigma_\pi(A)$ に属するとは、次を満すときである.

$$\exists\{x_k\};\ \text{unit vectors}\ \Big|\ \|(A_i-z_i)x_k\|\longrightarrow 0,\quad i=1,\cdots,n.$$

$\mathbb{C}^n$ の点 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ が A の joint point spectrum $\sigma_p(A)$ に属すとは、次を満すときである.

$$\exists\, x\neq 0\ \Big|\ (A_i-z_i)x=0,\qquad i=1,\cdots,n.$$

$\mathbb{C}^n$ の点 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ が A の joint approximate compression spectrum $\sigma_\delta(A)$ に属するとは、次を満すときである.

$$\exists\{x_k\};\ \text{unit vectors}\ \Big|\ \|(A_i-z_i)^*x_k\|\longrightarrow 0,\quad i=1,\cdots,n.$$

$\mathbb{C}^n$の点 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ が A の joint residual spectrum $\sigma_r(A)$ に属するとは、次を満すときである.

$$\exists x \neq 0 \;\Big|\; (A_i - z_i)^* x = 0, \qquad i=1,\cdots,n.$$

次に n個の対 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ が互いに可換な場合に A の joint spectrum $\sigma(A)$ を次のように定義する。

subset $\{A_1,\cdots,A_n\}$ の $B(H)$ での second commutant を A'' とする、このとき

$$\sigma(A)=\left\{(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} B_i(A_i-z_i) \neq I,\ \forall B_1,\cdots,B_n \in A''\right\}$$

であり、Iは identity operator である。

joint spectrum と joint numerical range について次の関係が成立する.

(Theorem 1) (Dekker[5], Th.2.5.4).

$A=(A_1,\cdots,A_n)\subset B(H)$ を可換な作用素族とする、このとき

$$\sigma(A)\subset \mathrm{co}\,\overline{W(A)}$$

が成り立つ、ここで $\mathrm{co}\,\overline{W(A)}$ は $\overline{W(A)}$ の convex hull である.

joint numerical range が convex となる例は次の場合が知られている。

(*Theorem* 2). (Dash, [1]. Prop. 2.4).

$\dim H = 2$ かつ $A = (A_1, \cdots, A_n) \subset B(H)$: 可換な作用素族ならば $W(A)$ は convex.

2以外の有限次元の場合でも convex になるかどうか現在のところ不明。

(*Theorem* 3). (Dash, [1], Th. 2.5 と Th. 2.8)

$A = (A_1, \cdots, A_n) \subset B(H)$; 可換な正規作用素族

ならば $W(A)$ は convex

かつ $\mathrm{co}\,\sigma(A) = \overline{W(A)}$.

さらにこのときは $\sigma(A) = \sigma_\pi(A)$ である.

(*Theorem* 4). (Dash, [1], Th. 2.6 と Th. 2.10)

$T_\varphi = (T_{\varphi_1}, \cdots, T_{\varphi_n})$: Toeplitz 作用素族

ならば $W(T_\varphi)$ は convex

かつ $\mathrm{co}\,\sigma_\pi(T_\varphi) = \overline{W(T_\varphi)}$.

(Corollary 1) (Dash.[1], Lemma 2.9)

$T_\varphi = (T_{\varphi_1}, \cdots, T_{\varphi_n})$ が analytic Toeplitz 作用素族

ならば

$$W(T_\varphi) \text{ は convex}$$

かつ

$$\mathrm{co}\,\sigma(T_\varphi) = \overline{W(T_\varphi)}.$$

さらに このときは $\sigma(T_\varphi) = \overline{\sigma_r(T_\varphi)}$ である.

3. Joint normaloid 作用素族.

[Def.]. $A = (A_1, \cdots, A_n) \subset B(H)$ に対して,次の非負数

$$\|A\| = \sup\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \|A_i x\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \,\middle|\, x \in H, \|x\| = 1 \right\}$$

$$w(A) = \sup\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} |(A_i x, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \,\middle|\, x \in H, \|x\| = 1 \right\}$$

$$r(A) = \sup\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \,\middle|\, (z_1, \cdots, z_n) \in \sigma(A) \right\}$$

$$r_\pi(A) = \sup\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \,\middle|\, (z_1, \cdots, z_n) \in \sigma_\pi(A) \right\}$$

をそれぞれ A の joint operator norm, joint numerical radius, joint spectral radius, joint approximate spectral radius という。

[Def.]. $A = (A_1, \cdots, A_n) \subset B(H)$ に対して.

$$A : \text{joint normaloid} \iff \|A\| = w(A).$$

ここで $\phi_1, \cdots, \phi_n \in L^\infty(X;\mu)$ に対して $A_i f = \phi_i f$, $(f \in L^2(X;\mu))$ となる作用素族 $A = (A_1, \cdots, A_n)$ を考える.

このとき次の lemma が成立する.

(Lemma 1) (Dash. [2]. Th. 5.2)

上の $A = (A_1, \cdots, A_n)$ に対して

$$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \sigma(A) \rightleftarrows \forall \varepsilon > 0;\ \mu\left(\left\{t \in X \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} |\phi_i(t) - z_i| < \varepsilon\right\}\right) > 0.$$

右の条件を満す点全体を A の joint essential range という。

(Theorem 5) $A = (A_1, \cdots, A_n)$; 可換な正規作用素族とする.

このとき

$$\|A\| = w(A) = r(A)$$

が成り立つ. 即ち A は joint normaloid である.

(証明)

$$\|A\|^2 = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} \int |\phi_i(t)|^2 |f(t)|^2 d\mu(t) \,\middle|\, \|f\| = 1 \right\}$$

$$r(A)^2 = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \,\middle|\, \mu\left(\left\{t \in X;\ \sum_{i=1}^{n} |\phi_i(t) - z_i| < \varepsilon\right\}\right) > 0,\ \forall \varepsilon > 0 \right\}$$

となるから

$$\mu\left(\left\{t \in X \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} |\phi_i(t)|^2 > r(A)^2\right\}\right) = 0.$$

従って

$$\sum_{i=1}^{n} \int |\phi_i(t)|^2 |f(t)|^2 d\mu(t) \le r(A)^2 \int |f(t)|^2 d\mu(t) = r(A)^2 \|f\|^2$$

となることより $\|A\| = w(A) = r(A)$ をうる。

次に、Toeplitz 作用素族が joint normaloid であることを示すために、$T_\phi = (T_{\phi_1}, \cdots, T_{\phi_n})$ を Toeplitz 作用素族とする。このとき

$$T_{\phi_i} f = P L_{\phi_i} f \quad , \qquad f \in H^2,$$

ここで P は L^2 から H^2 への projection であり L_{ϕ_i} は Laurent 作用素である。

このとき次の lemma が成立する。

(Lemma 2) (Dash [2], Th. 6.1)

$T_\phi = (T_{\phi_1}, \cdots, T_{\phi_n})$ を Toeplitz 作用素族とし、それによる Laurent 作用素族 $L_\phi = (L_{\phi_1}, \cdots, L_{\phi_n})$ に対して

$$\sigma(L_\phi) \subset \sigma_\pi(T_\phi)$$

が成り立つ。

(Theorem 6) $T_\phi = (T_{\phi_1}, \cdots, T_{\phi_n})$ を Toeplitz 作用素族とする。このとき $\|T_\phi\| = w(T_\phi) = r_\pi(T_\phi)$ であり、さらに T_ϕ が analytic Toeplitz 作用素族ならば、

$$\|T_\phi\| = w(T_\phi) = r(T_\phi).$$

従って, joint normaloid である。

証明は lemma2 により簡単に示されるので省略する。

joint normaloid となる例として可換な正規拡大をもつ subnormal 作用素族がある.

次に特別な型のテンソル積で与えられた作用素族について考える.

$H_1, \cdots, H_n$ を複素ヒルベルト空間とする. I_j を H_j 上の identity 作用素. A_j を $B(H_j)$ の任意の元とする。

$H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$ 上の作用素 T_j を次のように定義する.

$$(*) \qquad T_j = I_1 \otimes \cdots \otimes I_{j-1} \otimes A_j \otimes I_{j+1} \otimes \cdots \otimes I_n$$

このとき joint spectrum については次の定理が成立する。

(Theorem 7) (Dash and Schechter, [4])

$T = (T_1, \cdots, T_n)$ を (*) で与えられた作用素族とする.

このとき
$$\sigma(T) = \prod_{j=1}^{n} \sigma(T_j) = \prod_{j=1}^{n} \sigma(A_j)$$

が成立する.

次に joint numerical range については次の定理が成立する。

(Theorem 8) (Dash, [3])

$T=(T_1,\cdots,T_n)$ を(＊)で与えられた作用素族とする.

このとき
$$W(T)=\prod_{j=1}^{n} W(T_j)=\prod_{j=1}^{n} W(A_j)$$

が成立する。

(Theorem 9) $T=(T_1,\cdots,T_n)$ を(＊)で与えられた作用素族とする. 各 A_j が normaloid であるならば

$$\|T\|=w(T)=r(T)$$

が成立する。従って joint normaloid である。

さらに $\|T\|=\left(\|T_1\|^2+\cdots+\|T_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ が成立する。

証明は theorem 7 と theorem 8 と $\|T_j\|=\|A_j\|$ であることにより簡単に得られるので省略する。

4. Joint normaloid 作用素族の bare point と extreme point

K を $\mathbb{C}^n$ における compact connected set とする.

K の bare point 全体を $Ba(K)$, K の extreme point 全体を $Ex(K)$ で記す.

このとき $B_a(K) \subset E_x(K)$ かつ $E_x(K) \subset \overline{B_a(K)}$ が成立する。

(Theorem 10) $A=(A_1,\cdots,A_n)$ に対して，任意の $z=(z_1,\cdots,z_n)$ において $A-z=(A_1-z_1,\cdots,A_n-z_n)$ が joint normaloid であるとする。このとき，

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in E_x(\overline{W(A)}) \text{ ならば } \alpha\in\sigma_\pi(A).$$

さらに

$$\alpha\in B_a(\overline{W(A)})\cap W(A) \text{ ならば } \alpha\in\sigma_p(A).$$

(証明) $\sigma_\pi(A)$ は closed set であることから，
$\alpha\in B_a(\overline{W(A)})$ ならば $\alpha\in\sigma_\pi(A)$ を示せばよい。
$\alpha\in B_a(W(A))$ より $z=(z_1,\cdots,z_n)$ を中心とする spherical surface S が存在して，

$$\|A-z\|=w(A-z)=\Big(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k-z_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

でありさらに unit vector の sequence $\{x_i\}$ が存在して，

$$\big((A_k-z_k)x_i,\ x_i\big)\longrightarrow \alpha_k-z_k,\quad k=1,\cdots,n.$$

以上のことから

$$\sum_{k=1}^{n}\|(A_k-z_k)x_i\|^2\longrightarrow 0.$$

により $\alpha \in \sigma_\pi(A)$ をうる。定理の後半部は明らかであるので省略する。

以上のことから、Th.3, Th.4, Cor.1 の後半部は corollary として得られる。

また single の場合と同様に joint でも、

$$\|A\| = w(A) \rightleftarrows \|A\| = r_\pi(A)$$

が成立する。

また次の結果も知られている。

(Theorem 11) (Dekker, [5]. Cor.1.3.6 と Juneja [7])

$A=(A_1,\cdots,A_n)$ を互いに可換な正規作用素族とする。このとき、

$$E_x(\overline{W(A)}) \cap W(A) \subset \sigma_p(A) .$$

5. Joint essential numerical range.

ここでは H は separable infinite dimensional であるとする。

[Def.] $A=(A_1,\cdots,A_n)$ に対して、A の joint essential numerical range $W_e(A)$ とは、

$$W_e(A) = \bigcap \left\{ \overline{W(A_1+K_1, \cdots, A_n+K_n)} \,\middle|\, K_1, \cdots, K_n ; compact \right\}$$

である。

(Lemma 3) $A=(A_1, \cdots, A_n)$ と $z=(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して. unit vector の sequence $\{x_i\}$ で. $x_i \longrightarrow 0$ かつ. $(A_k x_i, x_i) \to z_k$, $k=1, \cdots, n$, なるものが存在するならば. $z \in W_e(A)$ である.

この lemma より. Lancaster の定理を joint の場合に拡張する. 証明は. Garske [6] による。

(Theorem 12) $A=(A_1, \cdots, A_n)$ に対して.

$$E_x(\overline{W(A)}) \subset W_e(A) \cup W(A)$$

(証明) $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in E_x(\overline{W(A)})$ とする. unit vector の sequence $\{x_i\}$ で. $(A_k x_i, x_i) \longrightarrow \lambda_k$ なるものが存在する. $x_i \longrightarrow x$ と仮定してよい. $y_i = x_i - x$ とおくと $y_i \longrightarrow 0$, さらに $\|y_i\| \to \varepsilon$ としてよい. 従って

$$1 = \|x_i\|^2 = \|y_i\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(y_i, x) + \|x\|^2 \longrightarrow \varepsilon^2 + \|x\|^2.$$

より.

$$\varepsilon^2 + \|x\|^2 = 1 .$$

$$(T_k x_i, x_i) = (T_k(y_i+x), (y_i+x)) = (T_k y_i, y_i) + (T_k y_i, x)$$
$$+ (T_k x, y_i) + (T_k x, x)$$

$\therefore\ (T_k y_i, y_i) + (T_k x, x) \longrightarrow \lambda_k \qquad \therefore\ (T_k y_i, y_i) \longrightarrow \lambda_k - (T_i x, x).$

①. $\varepsilon = 0$ なら. $\lambda \in W(A)$.

②. $\varepsilon \neq 0$ なら

㋑. $x = 0$ なら上のlemmaより $\lambda \in W_e(A)$.

㋺. $x \neq 0$ なら. $\alpha_k = \left(\dfrac{A_k x}{\|x\|}, \dfrac{x}{\|x\|}\right)$, $z_k^i = \left(\dfrac{A_k y_i}{\|y_i\|}, \dfrac{y_i}{\|y_i\|}\right)$

とおく. このとき

$$(z_1^i, \cdots, z_n^i) \longrightarrow z = (z_1, \cdots, z_n)$$

としてよい. 従って.

$$\|y_i\|^2 \left(\frac{A_k y_i}{\|y_i\|}, \frac{y_i}{\|y_i\|}\right) + \|x\|^2 \left(\frac{A_k x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right) \longrightarrow \lambda_k$$

により.

$\varepsilon^2 z + \|x\|^2 \alpha = \lambda$, ここで $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ である.

λ が extreme point であることより $\lambda = \alpha$ or z.

(i). $\lambda = \alpha$ なら $\lambda \in W(A)$.

(ii). $\lambda = z$ なら $\lambda = \alpha$ をうるので $\lambda \in W(A)$.

以上により定理は証明された.

Refferences

1. A. T. Dash, Joint numerical range, Glasnik Mat., 7 (1972), 75 ~ 81.

2. ———, Joint spectra, Studia Math., 45 (1973), 225 ~ 237.

3. ———, Tensor products and joint numerical range, Proc. Amer. Math. Soc., 40 (1973), 521 ~ 526.

4. —— and M. Schechter, Tensor products and joint spectra, Israel J. Math., 8 (1970), 191 ~ 193.

5. N. P. Dekker, Joint numerical range and joint spectr m of Hilbert space operators, Ph. D. thesis, Amsterdam, 1969.

6. G. Garske, The boundary of the numerical range of an operator, J. Math. Anal. Appl., 68 (1979), 605 ~ 607

7. P. Juneja, On extreme points of the joint numerical range of commuting normal operators, Pacific J. Math., 67 (1976), 473 ~ 476.

8. J. S. Lancaster, The boundary of the numerical range, Proc. Amer. Math. Soc., 49 (1975), 393 ~ 398.

9. M. Takaguchi and M. Chō, Boundary points of joint numerical range, preprint.

10. P. R. Halmos, A Hilbert space problem book, 1967.