数理解析研究所講究録
第377巻 1980年 91-100

A note on positive definite maps

東工大 理　伊藤 茂

§1. 序. Gを局所compact群, dt: G上の左Haar測度, $L^1(G)$: G上のdtに関する可積分関数(の同値類)全体とする. $L^1(G)$は norm $\|f\| = \int |f(t)|dt$, 積 $(fg)(t) = \int f(s)g(s^{-1}t)ds$, involution $f^*(t) = \Delta(t^{-1})\overline{f(t^{-1})}$ (ΔはG上のmodular関数)によりapproximate unitを持つBanach*-algebra. $C^*(G)$を$L^1(G)$のenveloping C^*-algebraとする. このとき, $C^*(G)$上の正線形汎関数Φ (or $C^*(G)$の$*$-表現π), G上の連続正定値関数φ, Gの(弱)連続unitary表現Uの間には1対1の対応が成り立つことがわかっている(cf. [2]):

(Φとπの対応はGNS表現)

$$\begin{tikzcd}
 & \Phi\ (\text{or } \pi) \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\varphi \arrow[rr, leftrightarrow] & & U
\end{tikzcd}$$

$$\Phi(f) = \int f(t)\varphi(t)dt \qquad \pi(f) = \int f(t)U(t)dt$$

$$\varphi(t) = (U(t)\xi, \xi) \qquad (f \in L^1(G),\ t \in G)$$

φとUの対応で, ξはUの表現されているHilbert空間の元.

この対応はξが cyclic の時同型を除いて一意である.

φとUの関係を一般化したものが, Naimark, Sz.-Nagy 等による作用素値正定値関数の dilation である(cf. [5],[10]). $\mathcal{H}$: Hilbert 空間, $B(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$上の有界線形作用素全体, $\varphi: G \to B(\mathcal{H})$: (弱連続)正定値(簡単のために$\varphi(e) = I$とする)とすると$\varphi$と$\varphi$の dilation の間には次の関係がある($G$は単に位相群でよい):

$\varphi \longleftrightarrow \varphi$の dilation, i.e., $\exists \mathcal{K} \supset \mathcal{H}$: Hilbert 空間,

$\exists U: G \to B(\mathcal{K})$: (弱連続) unitary 表現で,

$P: \mathcal{K} \to \mathcal{H}$: 直交射影とすると, $\forall t \in G, \forall x \in \mathcal{H}$,

$\varphi(t)x = PU(t)x$.

これの典型的な例としては Hilbert 空間上の contraction に付随するものがある: $T \in B(\mathcal{H})$, $\|T\| \leqq 1$ のとき, $\varphi: \mathbb{Z} \to B(\mathcal{H})$ ($\mathbb{Z}$は整数全体)を$\varphi(n) = T^n$ $(n \geqq 0)$, $T^{*(-n)}$ $(n<0)$で定義するとφは正定値.

Naimark による広義スペクトル族のスペクトル族への dilation を含む形に上の結果を拡張するために, Sz.-Nagy は$*$-半群Γを導入した(cf. [5],[10]). このとき, $\varphi: \Gamma \to B(\mathcal{H})$: 正定値$\longleftrightarrow \varphi$の dilation なる対応が群の場合と同様に与えられる. 但しこの時はφは正定値条件の他に有界性条件を満たす必要がある. §2ではこれらの結果をさらに一般化して,

Hilbert moduleの上で議論を展開する.

次に A : C^*-algebra, $Aut(A)$: Aの$*$-automorphism全体, $\alpha: G \to Aut(A)$: 強連続homomorphismとする. $L^1(G,A)$をG上のdtに関して Bochner 積分可能なA-値関数(の同値類)全体とすると, norm $\|f\| = \int \|f(t)\| dt$, 積 $(fg)(t) = \int f(s)\alpha_s g(s^{-1}t)ds$, involution $f^*(t) = \Delta(t^{-1})\alpha_t f(t^{-1})^*$ によって approximate unit を持つ Banach$*$-algebra (以後はαに依存することを明記するため$L^1(G,A,\alpha)$と書くことにする)になる. $C^*(G,A,\alpha)$を$L^1(G,A,\alpha)$の enveloping C^*-algebra とする(αによるAとGのC^*-crossed product). このとき, $C^*(G,A,\alpha)$の$*$-表現Πと(A,G,α)の covariant 表現(π,U)とは1対1の対応がある(Doplicher-Kastler-Robinson [3]). 最近 Pedersen [8] により$C^*(G)$の場合の正定値関数と同様な概念が$C^*(G,A,\alpha)$の場合に導入され, $C^*(G,A,\alpha)$上の正線形汎関数Φが特徴付けられた(Pedersen の本を教えて頂いた山形大の富山淳先生に感謝します). なおGが discrete の時はすでに Zeller-Meier [11] によって与えられている事に注意. $\varphi: G \to A^*$ (Aのdual) : (norm 連続) α-正定値とすると, $C^*(G)$の場合と同様な1対1の対応は下図のようになっている. なおφと(π,U)の正確な対応関係は, Gが discrete の時に Zeller-Meier [11] によって与えられただけである. またΦとΠの対応は GNS 表現によ

るものである。

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & \Phi\ (\text{or } \Pi) \arrow[dl, leftrightarrow, swap, "{\Phi(f)=\int<f(t),\varphi(t)>dt \ ([8])}"] \arrow[dr, leftrightarrow, "{\Pi(f)=\int\pi(f(t))U(t)dt \ ([3])}"] & \\ \varphi \arrow[rr, leftrightarrow] & & (\pi, U) \end{tikzcd}$$

$$<a, \varphi(t)> = (\pi(a)U(t)\xi, \xi)$$

$$(\ f \in L^1(G, A, \alpha),\ a \in A,\ t \in G\ )$$

φ と (π, U) の対応で，ξ は (π, U) の表現されている Hilbert 空間の元．この対応は ξ が cyclic の時は同型を除いて一意．§3ではまず dilation の構成と同様な方法により，φ より直接 (π, U) を構成する．次に，正定値関数から再生核 Hilbert 空間が構成できるように (cf. [1])，φ からある種の“再生核” Hilbert 空間が構成できることを示す．§3は東工大の小沢正直君との共同研究の一部である．

§2. Hilbert module 上の dilation. B : C^*-algebra, X : right B-module (module action $(x, b) \to x \cdot b$ $(x \in X, b \in B)$ と compatible な complex field $\mathbb{C}$ 上の vector 空間の構造を持つとする，i.e., $\lambda(x \cdot b) = (\lambda x) \cdot b = x \cdot (\lambda b)$ $(x \in X, b \in B, \lambda \in \mathbb{C})$)とする．

定義2.1. X が pre-Hilbert B-module $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ X : right B-module かつ $\exists <\cdot,\cdot> : X \times X \to B$: 共役線形で (i) $<x, x> \geq 0$, $<x, x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$; (ii) $<x, y> = <y, x>^*$; (iii) $<x \cdot b, y> =$

$\langle x,y\rangle b$, $(x, y\in X,\ b\in B)$ を満たす.

$\|x\|_X=\sqrt{\|\langle x,x\rangle\|}$ は X の norm. この norm で完備の時 X を Hilbert B-module と呼ぶ. Hilbert module の概念は Paschke [7], Rieffel [9] によって導入された. 以下 X は Hilbert B-module とする. $B(X)$: X 上の有界線形写像全体, $\mathcal{A}(X)=\{T\in B(X) \mid \exists T^*\in B(X),\ \langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle\ (\forall x,y\in X)\}$ とする. $\mathcal{A}(X)$ は operator norm $\|\cdot\|_X$ と involution $T\to T^*$ で unital C^*-algebra.

Γ を unital $*$-半群とする, i.e., Γ は unit ε を持つ半群で, involution $*$ が定義されていて, $\xi^{**}=\xi$, $(\xi\eta)^*=\eta^*\xi^*$ $(\xi,\eta\in\Gamma)$ を満たす. 任意の群 G は $t^*=t^{-1}$, $\varepsilon=e$ (G の unit) により unital $*$-半群となる. $F(\Gamma,X)=\{f:\Gamma\to X \mid f(\xi)\neq 0$ となる ξ は有限個$\}$ とおく.

定義 2.2. $\varphi:\Gamma\to\mathcal{A}(X)$ が正定値 (positive definite; PD) $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall f\in F(\Gamma,X)$, $\sum_{\xi,\eta}\langle\varphi(\eta^*\xi)f(\xi),f(\eta)\rangle\geqq 0$. (この時 $\forall\xi\in\Gamma$, $\varphi(\xi)^*=\varphi(\xi^*)$ となる).

定義 2.3. PD $\varphi:\Gamma\to\mathcal{A}(X)$ が有界性条件 (boundedness condition; BC) を満たす $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists c:\Gamma\to[0,\infty)$, $\forall\alpha\in\Gamma$, $\forall f\in F(\Gamma,X)$,
$$\sum_{\xi,\eta}\langle\varphi(\eta^*\alpha^*\alpha\xi)f(\xi),f(\eta)\rangle\leqq c(\alpha)\sum_{\xi,\eta}\langle\varphi(\eta^*\xi)f(\xi),f(\eta)\rangle.$$
有界性条件は次の様に特徴付けられる.

補題 2.4. $\varphi:\Gamma\to\mathcal{A}(X)$: PD の時, 次の条件は同値である:

(i) φ : BC を満たす;

(ii) $\exists\, d : \Gamma \to [0, \infty)$, $\forall \alpha, \xi \in \Gamma$, $\forall x \in X$,

$$\langle \varphi(\xi^* \alpha^* \alpha \xi) x, x \rangle \leqq d(\alpha) \langle \varphi(\xi^* \xi) x, x \rangle ;$$

(iii) $\exists\, s : \Gamma \to [0, \infty)$, $\exists\, C > 0$, $\forall \xi, \eta \in \Gamma$,

$$\| \varphi(\xi) \|_X \leqq C s(\xi), \quad s(\xi\eta) \leqq s(\xi) s(\eta).$$

$\pi : \Gamma \to \mathcal{L}(X)$ が表現とは，$\forall \xi, \eta \in \Gamma$，$\pi(\xi)^* = \pi(\xi^*)$，$\pi(\xi\eta) = \pi(\xi)\pi(\eta)$，$\pi(\varepsilon) = 1_X$（X上の恒等写像）を満たすものとする．Y を別の Hilbert B-module とし，$T : X \to Y$ とする．T が module 写像とは，$\forall x \in X, \forall b \in B$，$T(x \cdot b) = (Tx) \cdot b$ を満たすものを言う．T が isometric embedding $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in X$，$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$.

定理2.5. $\varphi : \Gamma \to \mathcal{L}(X)$: PD で BC を満たすとする．すると

(i) $\exists\, Y$: Hilbert B-module，$\exists\, r : X \to Y$，$\exists\, q : Y \to X$: 有界線形 module 写像で $qr = \varphi(\varepsilon)$，$\exists\, \pi : \Gamma \to \mathcal{L}(Y)$: 表現で，$\forall \xi \in \Gamma$，$\varphi(\xi) = q\pi(\xi)r$. また $\{ \pi(\xi) r x \mid x \in X, \xi \in \Gamma \}$ が張る線形空間は Y で稠密である．

(ii) さらに $\varphi(\varepsilon) = 1_X$ の時は，r : isometric embedding で，X と $r(X)$ を同一視すると，q は $\mathcal{L}(Y)$ に属する射影になる．

A を unital C^*-algebra とすると，$\langle x, y \rangle = y^* x$ $(x, y \in A)$ で A は Hilbert A-module になり，$\mathcal{L}(A) = \{ L_x \mid x \in A \}$ となる．但し $L_x y = xy$ $(y \in A)$ である．$\mathcal{L}(X)$ は unital C^*-algebra だから Hilbert $\mathcal{L}(X)$-module になり，$\varphi : \Gamma \to \mathcal{L}(X)$: PD に対して，

$\psi : \Gamma \to \mathcal{Q}(\mathcal{Q}(X))$ を $\psi(\xi) = L_{\varphi(\xi)}$ で定義すると，ψ は PD. また φ が BC を満たせば，$\|\psi(\xi)\|_{\mathcal{Q}(X)} = \|L_{\varphi(\xi)}\|_{\mathcal{Q}(X)} = \|\varphi(\xi)\|_X$ だから補題2.4より ψ も BC を満たす.

定理2.6. $\varphi : \Gamma \to \mathcal{Q}(X)$: PD で BC を満たす. すると

(i) $\exists Y$: Hilbert $\mathcal{Q}(X)$-module, $\exists \pi : \Gamma \to \mathcal{Q}(Y)$: 表現, $\exists z \in Y$ で，$\forall \xi \in \Gamma$，$\varphi(\xi) = \langle \pi(\xi)z, z \rangle$. また $y_\xi = \pi(\xi)z$ とおくと，$\varphi(\eta^*\xi) = \langle y_\xi, y_\eta \rangle$ で，$\{y_\xi \cdot a \mid \xi \in \Gamma, a \in \mathcal{Q}(X)\}$ の張る線形空間は Y で稠密である.

(ii) さらに $\varphi(\varepsilon) = 1_X$ の時は，$\exists p \in \mathcal{Q}(Y)$: 射影，$\exists i : \mathcal{Q}(X) \to p\mathcal{Q}(Y)p$: onto $*$-isomorphism で，$\forall \xi \in \Gamma$，$i\varphi(\xi) = p\pi(\xi)p$.

§3. Covariant表現とVector値PD関数. G : 位相群, A : C^*-algebra, $Aut(A)$: A の $*$-automorphism全体, A^* : A の dual, $\langle \cdot, \cdot \rangle$: A と A^* の duality pairing とする. $\alpha : G \to Aut(A)$: homomorphismで強連続, i.e., $\forall a \in A$, $\alpha_t a$ が t について norm連続, とする. α の dual を同じ α で書く, i.e., $\langle a, \alpha_t p \rangle = \langle \alpha_t a, p \rangle$ ($\forall a \in A, \forall t \in G, \forall p \in A^*$).

定義3.1. $\varphi : G \to A^*$ が α-正定値 (α-PD) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall n$, $\forall \{t_1, \cdots, t_n\} \subset G$, $\forall \{a_1, \cdots, a_n\} \subset A$, $\sum_{i,j} \langle \alpha_{t_i^{-1}}(a_i^* a_j), \varphi(t_i^{-1}t_j) \rangle \geqq 0$.

$\varphi : G \to A^*$ が弱連続 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a \in A$, $\langle a, \varphi(t) \rangle$ が t について連続.

補題3.2. (Zeller-Meier [11]) $\varphi : G \to A^*$ が α-PD $\Rightarrow$ $\forall s, t \in G$; $\alpha_{s^{-1}} \varphi(s^{-1}t)^* = \alpha_{t^{-1}} \varphi(t^{-1}s)$, $\|\varphi(t)\| \leqq \|\varphi(e)\|$.

定義3.3. $(\pi, U, \mathfrak{H})$ が (A, G, α) の covariant 表現 $\overset{}{\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}}$ $\mathfrak{H}$ は Hilbert 空間, $\pi: A \to B(\mathfrak{H})$: $*$-表現, $U: G \to B(\mathfrak{H})$: 連続 unitary 表現で, $\forall t \in G$, $\forall a \in A$, $U(t)\pi(a)U(t^{-1}) = \pi(\alpha_t a)$. $\xi \in \mathfrak{H}$ が (π, U) の cyclic vector $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\{\pi(a)U(t)\xi \mid a \in A, t \in G\}$ の張る線形空間が $\mathfrak{H}$ で稠密.

定理3.4. $\varphi: G \to A^*$ が弱連続, α-PD とする. すると $\exists (\pi, U, \mathfrak{H}, \xi)$: (A, G, α) の cyclic covariant 表現で, $\forall a \in A$, $\forall t \in G$, $\langle a, \varphi(t) \rangle = (\pi(a)U(t)\xi, \xi)$. また $(\pi, U, \mathfrak{H}, \xi)$ は同型を除いて一意である.

系3.5. φ: α-PD, 弱連続 $\Rightarrow$ φ: norm 連続.

再生核 Hilbert 空間の考え方を一般化して次の結果を得る.

定理3.6. φ: 上と同じ. すると, $\exists (\pi, U, \mathfrak{H}, \xi)$: (A, G, α) の cyclic covariant 表現, $\mathfrak{H}$: norm 連続な $P: G \to A^*$ の一部のつくる vector 空間より成る, $\exists [\cdot, \cdot]: \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to A^*$: 共役線形で, $\forall t \in G$, $K_t: G \to A^*$ を $K_t(s) = \alpha_{s^{-1}} \varphi(s^{-1}t)$ とおくと, $K_t \in \mathfrak{H}$, $K_e = \xi$. さらに $\forall t \in G$, $\forall P, Q \in \mathfrak{H}$, $\forall a \in A$, $\mathfrak{H}$ の内積 $(P, Q) = \lim_i \langle u_i, [P, Q] \rangle$ ($\{u_i\}$: A の approximate unit), $[P, K_t] = P(t)$, $\varphi(t) = [U(t)\xi, \xi]$, $\langle a, \varphi(t) \rangle = (\pi(a)U(t)\xi, \xi)$.

最後に $C^*(G, A, \alpha)$ 上の正線形汎関数と α-PD 関数の関係を簡単に書いておこう (cf. Pedersen [8]). G は局所 compact 群とする. $\forall t \in G$, $\forall a \in A$ に対して $L^1(G, A, \alpha)$ 上の有界線形作用素

$V(t)$, $\rho(a)$ を $(V(t)f)(s)=\alpha_t f(t^{-1}s)$, $(\rho(a)f)(s)=af(s)$ $(f\in L^1(G,A,\alpha))$ で定義する.

定理3.7. (i) φ: α-PD, 弱連続とする. $\Phi: L^1(G,A,\alpha)\to\mathbb{C}$ を $\Phi(f)=\int\langle f(t),\varphi(t)\rangle dt$ で定義すると, Φ は $L^1(G,A,\alpha)$ 上の(連続)正線形汎関数(従って Φ は $C^*(G,A,\alpha)$ 上の正線形汎関数に一意に拡張できる).

(ii) 逆に Φ: $C^*(G,A,\alpha)$ 上の正線形汎関数とする. $\varphi: G\to A^*$ を $\langle a,\varphi(t)\rangle=\lim_j \Phi(\rho(a)E_jV(t)E_j)$ $(a\in A, t\in G)$ で定義すると, φ: α-PD, 弱連続. 但し $\{E_j\}$: $L^1(G,A,\alpha)$ の approximate unit. (実際 Φ に対応する GNS 表現を $(\Pi,\mathfrak{H},\xi)$ とし, さらに後者に対応する cyclic covariant 表現を $(\pi,U,\mathfrak{H},\xi)$ とすると, 上の極限は $(\pi(a)U(t)\xi,\xi)$ に等しい).

参考文献

[1] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 337-404.

[2] J. Dixmier, *C*-Algebras*, (English transl.), North-Holland, 1977.

[3] S. Doplicher, D. Kastler, D.W. Robinson, *Covariance algebras in field theory and statistical mechanics*, Commun. Math. Physics 3 (1966), 1-28.

[4] S. Itoh, *A note on dilations in modules over C*-algebras*,

Res. Rep. Inf. Sci. No. A-70, 1979.

[5] W. Mlak, Dilations of Hilbert Space Operators, Dissertationes Mathematicae 153, PWN, 1978.

[6] M. Ozawa, Hilbert B(H)-modules and stationary processes, Kodai Math. J. (to appear).

[7] W. L. Paschke, Inner product modules over B^*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 182 (1973), 443-468.

[8] G. K. Pedersen, C^*-Algebras and their Automorphism Groups, Academic Press, 1979.

[9] M. A. Rieffel, Induced representations of C^*-algebras, Advances in Math. 13 (1974), 176-257.

[10] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Functional Analysis ≈ Appendix, Ungar, 1960.

[11] G. Zeller-Meier, Produits croisés d'une C^*-algèbre par un groupe d'automorphismes, J. Math. Pures Appl. 47 (1968), 101-239.