数理解析研究所講究録
第377巻 1980年 123-133

Cesàro和を不変にする generalized limitの存在とその性質について

東大 教養　水島 哲也

実有界数列の Banach limit の特徴は、数列の移動に対して不変な値をもつことである。[Banach：1] この論文では、Banach limit の対比として、Cesàro和不変極限を定義し、その極限の存在および性質について考察した。

§1．では、Cesàro和不変極限の定義から導かれる諸性質、および Banach limit との相互関係を列挙する。§2．では、Cesàro和不変極限の存在定理を示す。その証明は、Banach limitの場合と同様に、三種類の方針による別々の方法がある。§3．では、数列の almost convergence の理論を用いて、平均一様収束性が Banach limit の特徴の一つであることを示した。§4．では、Cesàro和不変極限の応用例として、Ergode 理論における、移動不変な有限測度の構成につ

いて述べる。

1. Cesàro和不変極限の性質. 実有界数列空間を $\boldsymbol{m}$， m の上の線型汎関数 ℓ が**一般化極限**であるとは、(i) ℓ は positive， すなわち m の元 $x=(x_n)$ に対して $(\forall n)\ x_n \geqq 0$ ならば $\ell(x) \geqq 0$， (ii) 単位数列 $\boldsymbol{e}=(1,1,1,\cdots)$ に対して $\ell(e)=1$ を満たすことと定義する。

Banach limit, **Cesàro和不変極限** および **積不変極限** は、それぞれ次の性質をもつ一般化極限のことである: m の元 $x=(x_n)$ に対して、

(Banach) $\qquad \ell(x_n) = \ell(x_{n+1})$

(Cesaro 和不変) $\qquad \ell(x_n) = \ell(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i)$

(積不変) $\qquad \ell(x_n \cdot y_n) = \ell(x_n)\cdot\ell(y_n)$.

これらの不変極限の集合を $\boldsymbol{L_T}$， $\boldsymbol{L_S}$ および $\boldsymbol{L_U}$ と書く。

(1) $\ell \in L_S$ ならば $\forall x=(x_n)\in m$ に対して

$$\ell(0,x_2,x_3,\cdots) = \ell(0,x_3,x_4,\cdots).$$

(証明) ℓ の Cesàro 和不変性から

$$\ell(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \cdots, \tfrac{1}{n}, \cdots) = 0 .$$

したがって、 ℓ の positivity より任意の (x_n) に対して

$$\ell(0, \tfrac{x_2}{2}, \tfrac{x_3}{3}, \cdots, \tfrac{x_n}{n}, \cdots) = 0 .$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad & \ell(x_n) - \ell(x_{n+1}) \\ &= \ell(x_n - x_{n+1}) \\ &= \ell\left(\frac{x_1 - x_{n+1}}{n}\right) \\ &= \ell(x_1 - x_2, 0, 0, 0, \cdots) \end{aligned}$$

となって、 標記を得る。

(2) $L_T \cap L_u = \phi$, $L_S \cap L_u = \{\ell_1\}$.

ただし、 線型汎関数 $\boldsymbol{\ell_1}(x_n) = x_1$ と定める。

(3) $\ell \in L_S$ のとき $\ell(e_1) = 0 \leftrightarrow \ell \in L_T$,

$\ell(e_1) = 1 \leftrightarrow \ell \in L_u$.

ただし、 数列を $\boldsymbol{e_1} = (1, 0, 0, 0, \cdots)$ とする。

(証明) 数列 $x = (1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots)$ の評価から

$$L_T \cap L_u = \phi$$

を得る。 次に $\ell \in L_S$ とする。 性質(1)を適用して

$$\ell(e_1) = 0 \rightarrow \ell \in L_T$$

が示される。 また $\ell(e_1) = 1$ を仮定すれば、 ℓ の positivity から、 任意の $x = (x_n) \in m$ に対して

$$\ell(0, x_2, x_3, x_4, \cdots) = 0 .$$

$$\ell(x_n) = x_1 \cdot \ell(e_1) + \ell(0, x_2, x_3, x_4, \cdots)$$
$$= x_1 ,$$

すなわち、 ℓ は evaluation mapping ℓ_1 に等しいから

$$\ell(e_1) = 1 \quad \rightarrow \quad \ell \in L_u .$$

逆に $\ell \in L_S \cap L_u$ を仮定すれば、積不変性から

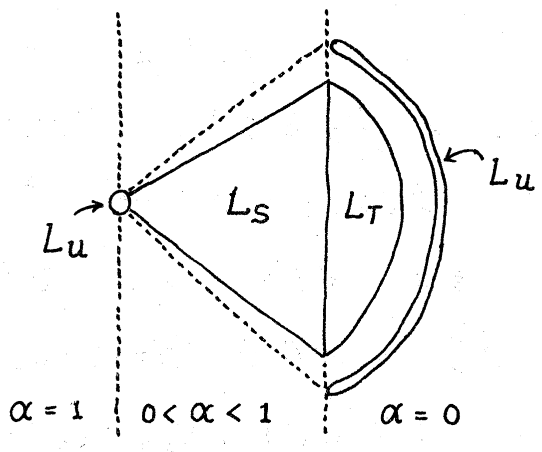
$$\ell(e_1) = 0 , \text{ または } 1 .$$

$L_T \cap L_u = \phi$ だから、 $\ell(e_1) = 0$ の場合は排除される。 よって $\ell(e_1) = 1$ であり、 また ℓ は ℓ_1 に一致する。

(4) L_T , L_S は w^*-compact , convex .

(5) $\mathrm{extr}(L_S) = \{\ell_1\} \cup \mathrm{extr}(L_T \cap L_S)$.

このように、 $\alpha = \ell(e_1)$ は特徴的なパラメターで、 その値によって、 それぞれの一般化極限は図のように分類される。



2. Cesàro和不変極限に関する存在定理. m の上の operator

$$\boldsymbol{T}(x_n) = (x_{n+1}), \quad \boldsymbol{S}(x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

に対して、 m の 部分空間

$$\boldsymbol{M} = \mathrm{range}(\mathrm{id} - T), \ \boldsymbol{N} = \mathrm{range}(\mathrm{id} - S)$$

と定める。 このとき $x = (x_n) \in m$ に対して

$$x \in M \quad \leftrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \in m$$

$$x \in N \quad \leftrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i-1}\right) \in m .$$

ただし、 最後の数列については、第一項を x_1 と置く。

<u>定理 1</u> 次の性質をみたす、 ℓ_1 とは異なる、m 上の線型汎関数 ℓ が存在する。

(i) $\ell(e) = 1$

(ii) $\|\ell\| = 1$

(iii) $\forall x \in m \quad \ell(x) = \ell(Sx)$

<u>定理 2</u> 次の性質をみたす、 m 上の線型汎関数 ℓ, および m の元 a_0 が存在する.

(i) $\ell(e) = 1$

(ii) $\|\ell\| = 1$

(iii) $\forall x \in m \quad \ell(x) = \ell(Tx)$

（iv）　　$\ell(a_0) \neq \ell(Sa_0)$

定理１　は、Cesàro和不変極限の存在を、定理２は、Cesàro和を不変にしない Banach limit の存在を示している。

（定理１の証明）　m の元 $e' = (0, 1, 1, 1, \cdots)$ とすると、e' と部分空間 N との距離 $d = \inf_{x \in N} \{\|e' - x\|_\infty\}$ は 1 以上である。この e' に関して、Hahn-Banach の拡張定理を用いれば、性質（i）$\ell(e') = d$，（ii）$\|\ell\| = 1$，（iii）$\ell|_N = 0$ を持つ線型汎関数 ℓ を得る。$d \leqq \|\ell\| \cdot \|e'\|_\infty$ より $d = 1$。したがって、ℓ は positive. とくに $\ell(e) = 1$ だから

$$\ell(e_1) = \ell(e) - \ell(e') = 0$$

となって、確かに $\ell \neq \ell_1$ である。（証明終り）

定理２の証明の準備として、数列 $\mathbf{c}_0 = (c_n)$ を次のように構成する：

（１）　$c_1 = 0$，　$c_2 = 1$

（２）　$N_k < n \leqq N_{k+1}$ ならば　$c_n = (-1)^k$.

ただし、自然数の列 $\{N_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は、帰納的に、

（a）　$N_1 = 2$

（b） $k+1$ が偶数のとき N_{k+1} は $\sum_{n=2}^{N_{k+1}-1}\frac{c_n}{n-1}>0$, $\sum_{n=2}^{N_{k+1}}\frac{c_n}{n-1}\leqq 0$

（c） $k+1$ が奇数のとき N_{k+1} は $\sum_{n=2}^{N_{k+1}-1}\frac{c_n}{n-1}<1$, $\sum_{n=2}^{N_{k+1}}\frac{c_n}{n-1}\geqq 1$

となるように決める。

定義から、 $c_0 \in \mathcal{N}$。 一方、 $S_{k+1} \underset{def}{=} N_{k+1}-N_k$ は k に関して単調増大となるから $c_0 \notin M$。

（定理２の証明） m の部分空間 $M' = M + \mathbb{R}c_0 + \mathbb{R}e$ 上の写像 ℓ を

$$x\in M,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\ :\ \ell(x+\alpha c_0+\beta e) = \alpha+\beta$$

と定義する。 ℓ は M' 上の線型汎関数で、 性質（i） $\ell(e)=1$,（ii） $\|\ell\|_{M'}=1$,（iii） $\ell_{|M}=0$, (iv) $\ell(c_0)=1$ をみたす。 とくに、（ii）では、 c_0 の選び方が重要な役割を果たしている。

したがって、 M'上の線型汎関数 ℓ を、norm不変のまま m 全体に拡張したものが求める線型汎関数となる。このとき (iv) は、 $c_0 \in \mathcal{N}$ だから、 $c_0 = a_0 - Sa_0$ となる m の元 a_0 に関して

$$\ell(a_0) \neq \ell(Sa_0)$$

を示している。 （証明終り）

尚、定理１の別証明としては、 不動点定理（ cf. [Day : 3])、 および semi-norm 有界に関する Hahn-

Banachの拡張定理を用いる方法とがある。 前者は、 operator T, S の一般化を、 後者は極限の係数に対する依存性を示唆する。

（別証明１） m^* の部分空間 K を

$$K = \{ \ell \in m^* : \ell(e) = \|\ell\| = 1 \} \cap \{ \ell \in m^* : \ell(e_1) = \ell(0, \tfrac{1}{2}, \cdots, \tfrac{1}{n}, \cdots) = 0 \}$$

とすれば、 求める Cesàro 和不変極限は、 *dual* operator S^* についての K の中の不動点に他ならない。

（別証明２） m 上の operator $\boldsymbol{R}$ 、 および sublinear functional p を

$$R(x_n) = \left(\frac{\sum_{i=2}^{n} \frac{x_i}{i-1}}{\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i-1}} \right) \quad (\text{第-項は } x_1)$$

$$p(x_n) = \limsup_{n \to \infty} R(x_n)$$

と定義すれば、 m の任意の元 $x = (x_n)$ に対して

$$p(x - Tx) = p(x - Sx) = 0$$

だから、 p － 有界な線型汎関数が求める不変極限を与える。

3. Banach limit の一様収束性. 任意の $x = (x_n) \in m$ に対して、 Banach limit に関する極大・極小値は次の関係式で与えられる. [Jerison : 4]

$$\sup\{\ell(x) : \ell \in L_T\} = \lim_n (\sup_j \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=j}^{j+n-1} x_i)$$

$$\inf\{\ell(x) : \ell \in L_T\} = \lim_n (\inf_j \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=j}^{j+n-1} x_i) .$$

したがって、この系として次を得る．[Sucheston : 5]

$x = (x_n)$ が $s \in \mathbb{R}$ に almost convergent（すなわち，すべての Banach limit ℓ に対して $\ell(x) = s$ ）であることの必要十分条件は、

$$\lim_n \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=j}^{j+n-1} x_i = s$$

が j に関して一様収束することである。

<u>命題</u>　$\overline{M} = \bigcap \{ \ell^{-1}(0) : \ell \in L_T \}$

（証明）　$\overline{M} \supset \bigcap \ell^{-1}(0)$ を示せばよい。

$x \in \bigcap \ell^{-1}(0)$ を仮定すれば、x は 0 に almost convergent である。したがって、上のことから

$$\lim_n \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=j}^{j+n-1} x_i = 0 \quad \text{（ j に関して一様）.}$$

今、任意の $\epsilon > 0$ に対して、次のような n_ϵ を固定する：　$\left| \sum_{i=j}^{j+n_\epsilon-1} x_i \right| \leq n_\epsilon \cdot \epsilon$　（ j に関して一様）.

$\Delta_k = \sum_{i=kn_\epsilon+1}^{(k+1)n_\epsilon} x_i$ として、数列 $y = (y_n)$ を

$$kn_\epsilon < n \leq (k+1)n_\epsilon \text{ ならば } y_n = x_n - \frac{\Delta_k}{n_\epsilon}$$

と定義すれば、y は M の元で、$\| y - x \|_\infty < \epsilon$ を満たす。よって $x \in \overline{M}$ が示された。

4．Cesàro和不変極限の応用．　Ergode理論では、確率空間（ X, $\mathfrak{A}$, μ ）の上の全単射、non-singularな可測変換 τ に対して、

（＊）　μ と同値で、τ-不変な有限測度が存在することの必要十分条件が多数求められている。ここでは、Cesàro和不変極限の応用として、次の条件の十分性を証明する。

<u>命題</u>　$\forall A \in \mathfrak{A} : \mu(A) > 0 \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu(\tau^i A) > 0$ が成立するとき、（＊）は正しい。

（証明）　ℓ を Cesàro和不変性をもつ Banach limit の一つとして固定する。X上の有限加法的測度 P を次のように定義する：

$$A \in \mathfrak{A} \quad : \quad P(A) = \ell(\mu(\tau^n A)).$$

P は μ と同値であり、同時に τ-不変である。

実際、τ-不変性は、ℓ が Banach limit であることの帰結。また μ-同値については、ℓ の Cesàro和不変性から次の不等式を利用する。

$$\begin{aligned} P(A) &= \ell(\mu(\tau^n A)) \\ &= \ell\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu(\tau^i A)\right) \\ &\geqq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu(\tau^i A)\right) \end{aligned}$$

命題の仮定から、 $\mu(A)>0$ であれば 不等式の最後の項は 正。したがって、 $P(A)>0$ となって μ-同値が示された。

Calderón の補助定理により、 P から μ-同値な、τ-不変測度 を構成することができる。[Calderón : 2] これが求める有限測度である。

REFERENCES

1. S. Banach, Théorie des operations linéaires, Warsaw, 1932.
2. A. P. Calderón, Sur les mesures invariantes, C. R. Acad. Sci. Paris 240 (1955), 1960-1962.
3. M. M. Day, Normed linear spaces, Third edition, Chap. V, Springer, 1973.
4. M. Jerison, The set of all generalized limits of bounded sequences, Canad. J. Math. 9 (1957), 79-89.
5. L. Sucheston, On existence of finite invariant measures, Math. Zeit. 86 (1964), 327-336.