数理解析研究所講究録
第 377 巻 1980 年 141-156

Invariant subspace problem に関連する operator algebra について

東北大学 教養部 御園生 善尚
東北大学医療短大 渕之内長一郎

1 序文 ヒルベルト空間H上の有界作用素の作る代数を $\mathcal{B}(H)$ で表わす. $A \in \mathcal{B}(H)$ とし, $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ をAで不変なHの部分空間とすれば

$$\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{N} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{M} \vee \mathfrak{N} = \mathrm{span}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$$

はまたAで不変である. したがって, Aで不変な部分空間の集合は operations "∨", "∧" により束となる. これを Lat A で表わす. $\mathcal{B}(H)$ の部分集合 $\mathcal{S}$ に対して, $\bigcap_{A \in \mathcal{S}} \mathrm{Lat}\,A$ を $\mathrm{Lat}\,\mathcal{S}$ で表わす. Aと可換な任意の $B \in \mathcal{B}(H)$ に対して, $\mathfrak{M} \in \mathrm{Lat}\,B$ を満たすHの部分空間 $\mathfrak{M}$ をAの hyperinvariant な部分空間という. $\mathfrak{M}$ がAで hyperinvariant ならばAで不変なことは明らかである. いまAと可換な $\mathcal{B}(H)$ の元全体を $\mathfrak{A}$ とすれば, $\mathfrak{A}$ は恒等作用素 I を含む弱閉な部分代数で

Aは non-trivial hyperinvariant な部分空間をもたない

$\Leftrightarrow \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A} = \{\{0\}, H\}$

である．

<u>定義</u>　$\mathrm{Lat}\,\mathfrak{A} = \{\{0\}, H\}$ であるような恒等作用素を含む $\mathcal{B}(H)$ の弱閉な部分代数を *transitive* であるという．

上記のことに着目して，*Kadison* [6] は，つぎの問題を提唱した：

<u>*Transitive algebra* 問題</u>　$\mathfrak{A}$ が *transitive* ならば $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$ か？

$A\ (\neq \lambda I)$ が *non-trivial* な *hyperinvariant* な部分空間をもたないならば，A と可換な $\mathcal{B}(H)$ の元全体は，$\mathcal{B}(H)$ と異なる *transitive algebra* である．したがって，*transitive algebra* 問題が肯定的であれば，すべての $A\ (\neq \lambda I)$ は *non-trivial* な *hyperinvariant* な部分空間（したがって不変部分空間）をもつことになる．

Transitive algebra に関する種々の結果は *Radjavi*, *Rosenthal* [12] に詳しい．この小論の目的は，*transitive algebra* に関する *Arveson* の定理を拡張することと，*transitive algebra* 問題を一般化した *reductive algebra* 問題に関する最近の結果を紹介することにある．

2．グラフ変換　ヒルベルト空間 H の *n-copies* の直和を $H^{(n)}$ で表わし，H 上の作用素 T の *n-copies* の直和を $T^{(n)}$ で表わす．

定義 2.1　$H^{(n)}$ の部分空間 $\mathfrak{M}$ に対して

$$\mathfrak{M} = \{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_{n-1} x \mid x \in \mathfrak{D}\}$$

を満たす，共通の定義域 $\mathfrak{D}$ をもつ H 上の必らずしも有界でない作用素 $T_1, \cdots, T_{n-1}$ が存在するとき，$\mathfrak{M}$ を $H^{(n)}$ のグラフ部分空間という．また，ある n に対して，上のような作用素をグラフ変換という．

$H^{(n)}$ の部分空間 $\mathfrak{M}$ がグラフ部分空間であるとき

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \in \mathfrak{M},\ x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \cdots = x_n = 0$$

で，逆もなりたつ．T を H 上の閉作用素とするとき $\{x \oplus Tx \mid x \in \mathfrak{D}(T)\}$ は $H^{(2)}$ のグラフ部分空間で，したがって T はグラフ変換である．

定理 2.2　$\{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D}\}$ を $H^{(n+1)}$ のグラフ部分空間とするとき

$$T_i x = n V_i S x \quad (x \in \mathfrak{D};\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

を満たす H 上の正値作用素 S および $V_i \in \mathcal{B}(H)$ が存在して

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_1 & \cdots & V_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_n & V_n & \cdots & V_n \end{bmatrix}$$

は $H^{(n)}$ 上の部分的等距離作用素である．

証明　$\overline{\mathfrak{D}} \neq H$ の場合は

$$T_i x = 0 \quad \text{for} \quad x \in \mathfrak{D}^{\perp} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

とすることにより，$\overline{\mathfrak{D}} = H$ として一般性を失なわない．

$$T(x \oplus \cdots \oplus x) = T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x, \quad \mathfrak{D}_1 = \{x \oplus \cdots \oplus x \mid x \in \mathfrak{D}\}$$

とすれば，T は $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}_1$ を定義域とする $H^{(n)}$ 上の閉作用素である．いま

$$\tilde{T} = T \ \text{on} \ \mathfrak{D}_1, \quad \tilde{T} = 0 \ \text{on} \ \mathfrak{D}_1^{\perp}$$

とすれば，$\tilde{T}$ は稠密な定義域をもつ $H^{(n)}$ 上の閉作用素である．$z_1 \oplus \cdots \oplus z_n \in \mathfrak{D}(\tilde{T}^*)$ とし

$$\tilde{T}^*(z_1 \oplus \cdots \oplus z_n) = y_1 \oplus \cdots \oplus y_n$$

とすれば

$$-(y_1 \oplus \cdots \oplus y_n) \oplus (z_1 \oplus z_2 \oplus \cdots + z_n)$$

は $\tilde{T}$ のグラフ $\mathcal{G}(\tilde{T})$ と直交する．いま $u_1 \oplus u_2 \oplus \cdots \oplus u_n \in \mathfrak{D}_1^{\perp}$ とすれば，$\tilde{T}$ の定義から

$$(u_1 \oplus \cdots \oplus u_n) \oplus (0 \oplus \cdots \oplus 0) \in \mathcal{G}(\tilde{T})$$

である．ゆえに，$-(y_1 \oplus \cdots \oplus y_n)$ は $\mathfrak{D}_1^{\perp}$ と直交する．すなわち $y_1 \oplus \cdots \oplus y_n \in \overline{\mathfrak{D}}_1$ をうる．したがって

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_n$$

以上から

$$\tilde{T}^*\tilde{T}(x \oplus \cdots \oplus x) = y \oplus \cdots \oplus y, \quad x \oplus \cdots \oplus x \in \mathfrak{D}(\tilde{T}^*\tilde{T}) \subset \mathfrak{D}_1$$

と表わせる．ゆえに

$$S_1 x = y$$

とすれば

$$\tilde{T}^* \tilde{T} = S_1^{(n)}$$

で，S_1はH上の稠密な定義域をもつ正値作用素である．$S_1^{1/2} = S$とおけば

$$|\tilde{T}| = S^{(n)}$$

である．$\tilde{T}$の極分解を

$$\tilde{T} = V|\tilde{T}|$$

とすれば，VはH$^{(n)}$上の部分的等距離作用素である．その行列表現を$V = (V_{ij})$とすれば，任意の$x \in \mathcal{D}$に対して

$$\begin{aligned} T(x \oplus \cdots \oplus x) &= \tilde{T}(x \oplus \cdots \oplus x) \\ &= V S^{(n)}(x \oplus \cdots \oplus x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} V_{1j} S x \oplus \cdots \oplus \sum_{j=1}^{n} V_{nj} S x \end{aligned}$$

ゆえに

$$T_i x = \sum_{j=1}^{n} V_{ij} S x, \quad x \in \mathcal{D} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

Vは$\{\text{range}\,|\tilde{T}|\}^{\text{closure}}$から$\{\text{range}\,\tilde{T}\}^{\text{closure}}$への部分的等距離作用素であるから，$V^*V$は$\{\text{range}\,|\tilde{T}|\}^{\text{closure}}$への射影作用素である．任意の$y \in H$に対して

$$y \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus \overset{(j)}{-y} \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \in H^{(n)}$$

はrange $\tilde{T}$と直交するから

$$(V_{i1} - V_{ij})\, y = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

jは任意であるから

$$V_{i1} = V_{i2} = \cdots = V_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$V_{i1} = \cdots = V_{in} = V_i \; (i = 1, 2, \cdots, n)$とすることにより定理が

示された．

V^*V が射影作用素であることから，容易につぎの系がえられる．

<u>系 2．3</u>　定理において $n\sum_{i=1}^{n} V_i^* V_i$ は射影作用素である．

<u>定義 2.4</u>　ヒルベルト空間 H_1 からヒルベルト空間 H への作用素 T に対して，ヒルベルト空間 H_2 および H_1 から H_2 への閉作用素 S_1，H_2 から H への閉作用素 S_2 が存在して，$T = S_2 S_1$ と表わせるとき，T を H_1 から H への半閉作用素という．

一般にグラフ変換が半閉であることは，定義から容易にわかるが，定理からグラフ変換は特殊な半閉作用素であることがわかる．半閉作用素については [3], [7] を参照されたい．

<u>3</u>　<u>*Transitive algebra*</u>　$\mathfrak{A}$ をヒルベルト空間 H 上の *transitive algebra* とし

$$\mathfrak{M} = \{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_{n-1} x \mid x \in \mathfrak{D} \}$$

が $\mathfrak{A}^{(n)} = \{ A^{(n)} \mid A \in \mathfrak{A} \}$ で不変な $H^{(n)}$ のグラフ部分空間であるとき，$\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{A}^{(n)}$ の不変グラフ部分空間という．$\mathfrak{A}$ が *transitive* であるから，$\mathfrak{D} \neq \{0\}$ ならば $\overline{\mathfrak{D}} = H$ である．(以下 $\mathfrak{D} \neq \{0\}$ の場合を考える．) また，ある n に対して，$\mathfrak{A}^{(n)}$ の不変グラフ部分空間を構成する作用素を，単に $\mathfrak{A}$ のグラフ変換という．したがって，$\mathfrak{A}$ のグラフ変換は稠密な定義域をもつ $\mathfrak{A}$ と可換な作用

素である．

Arveson [1] は transitive algebra 問題に関連して，重要な幾つかの結果を与えた．例えば，"maximal abelian self-adjoint algebra を含む transitive algebra は $\mathcal{B}(H)$ である" という結果は特記されるべきであろう．これらの結果を導くために，つぎの定理を与えている．

定理 3．1（Arveson）$\mathfrak{A}$ を H 上の transitive algebra とする．$\mathfrak{A}$ の任意のグラフ変換が恒等作用素のスカラー倍ならば，$\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$ である．

この形で Arveson の結果を述べ替えたのは Radjavi－Rosenthal [11] である．定理 3．1 の条件 "$\mathfrak{A}$ の任意のグラフ変換が恒等作用素のスカラー倍" を "$\mathfrak{A}$ と可換な任意の閉作用素が恒等作用素のスカラー倍" で置き換えられないか，という問題が提唱されているが未解決である．その部分的解答を与えよう．

定理 3．2 $\mathfrak{A}$ を H 上の transitive algebra で，$\mathfrak{A}$ と可換な稠密な定義域をもつ任意の閉作用素が恒等作用素 I のスカラー倍であるとする．さらに $\mathfrak{A}^{(n+1)}$ の任意の不変グラフ部分空間

$$\{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$$

に対して，$\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$ が $H^{(n)}$ で稠密でなければ，$\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$ である．ここに n は任意である．

<u>証明</u>　帰納法により示そう．$\{x \oplus T_1 x \mid x \in \mathfrak{D}\}$ を $\mathfrak{A}^{(2)}$ の任意の不変グラフ部分空間とすれば，T_1 は $\mathfrak{A}$ と可換な稠密な定義域をもつ閉作用素であるから，T_1 は I のスカラー倍である．

任意の $k\ (\leqq n)$ および $\mathfrak{A}^{(k)}$ の任意の不変グラフ部分空間

$$\{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_{k-1} \mid x \in \mathfrak{D}\}$$

に対して，$T_i\ (i = 1, \cdots, k-1)$ が I のスカラー倍であると仮定する．このとき

$$\mathfrak{M} = \{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D}\}$$

が $\mathfrak{A}^{(n+1)}$ の不変グラフ部分空間であるとき，$T_i\ (i = 1, \cdots, n)$ が I のスカラー倍であることを示そう．仮定から

$$\mathfrak{M}_1 = \{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D}\}^{\mathrm{closure}} \neq H^{(n)}$$

で，$\mathfrak{M}_1 \in \mathrm{Lat}\, \mathfrak{A}^{(n)}$ である．$\mathfrak{M}_1$ がグラフ部分空間でないとすれば

$$0 \oplus y_2 \oplus \cdots \oplus y_n \in \mathfrak{M}_1$$

のような non-zero な $\mathfrak{M}_1$ の元が存在する．このような $\mathfrak{M}_1$ の元の集合を $\mathfrak{M}_2$ とすれば，$\mathfrak{M}_2 \in \mathrm{Lat}\, \mathfrak{A}^{(n)}$ である．

$$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{M}_1 \ominus \mathfrak{M}_2$$

とする．$\mathfrak{M}_2$ が $0 \oplus 0 \oplus y_3 \oplus \cdots \oplus y_n$ のような non-zero な元を含むとき，このような $\mathfrak{M}_2$ の元全体を $\mathfrak{M}_3$ とすれば，$\mathfrak{M}_3 \in \mathrm{Lat}\, \mathfrak{A}^{(n)}$ で

$$\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{M}_2 \ominus \mathfrak{M}_3$$

とする．

この操作をくり返して，$\mathfrak{M}_4, \mathfrak{M}_5, \cdots, \mathfrak{M}_m$；$\mathcal{K}_4, \mathcal{K}_5, \cdots$ $\mathcal{K}_{m-1}$ を定め

$$\mathfrak{M}_m = \{0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus y_m \oplus \cdots \oplus y_n\}$$

は non-zero な $0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus y_{m+1} \oplus \cdots \oplus y_n$ を含まないとする．このとき

$$\mathfrak{M}_1 = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{K}_{m-1} \oplus \mathfrak{M}_m$$

$$\mathcal{K}_i = \mathfrak{M}_i \ominus \mathfrak{M}_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, m-1)$$

で，$\mathfrak{M}_i \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n)}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ である．

$$\mathfrak{M}_i' = \{y_i \oplus \cdots \oplus y_n \mid 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus y_i \oplus \cdots \oplus y_n \in \mathfrak{M}_i\}$$

$(i = 1, 2, \cdots, m)$ とすれば，$\mathfrak{M}_m' \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n-i+1)}$ である．$m < n$ であることを示そう．$m = n$ とすれば，$\mathfrak{M}_n' \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}$ であるから，$\mathfrak{M}_n' = H$ である．ゆえに

$$\mathfrak{M}_{n-1}' = (0 \oplus H) \oplus (0 \oplus H^{\perp})$$

$$= (0 \oplus H) \oplus (H \oplus 0) = H^{(2)}$$

同様にして $\mathfrak{M}_{n-2}' = H^{(3)}, \cdots, \mathfrak{M}_1 = H^{(n)}$ となり仮定に反する．したがって $m < n$ である．

$\mathfrak{M}_m'$ は $\mathfrak{A}^{(n-m+1)}$ の不変グラフ部分空間であるから，帰納法の仮定から，$y_m \oplus y_{m+1} \oplus \cdots \oplus y_n \in \mathfrak{M}_m'$ ならば

$$y_{m+1} = \lambda_{m\,m+1}\, y_m, \quad \cdots, \quad y_n = \lambda_{mn}\, y_m$$

と表わせる．したがって，$\mathfrak{M}_m \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{*(n)}$ である．ゆえに

$\mathcal{K}_{m-1} = \mathfrak{M}_{m-1} \ominus \mathfrak{M}_m \in \mathrm{Lat}\, \mathfrak{A}^{(n)}$ である.

$$\mathcal{K}'_{m-1} = \{ y_{m-1} \oplus \cdots \oplus y_n \mid 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus y_{m-1} \oplus \cdots \oplus y_n \in \mathcal{K}_{m-1} \}$$

とすれば, $\mathcal{K}'_{m-1}$ は $\mathfrak{A}^{(n-m+2)}$ の不変グラフ部分空間である. ゆえに

$$y_m = \lambda_{m-1\,m}\, y_{m-1}, \ \cdots, \ y_n = \lambda_{m-1\,n}\, y_{m-1}$$

と表わせる. 同様にして

$$\mathcal{K}_i = \{ 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus y_i \oplus \lambda_{i\,i+1}\, y_i \oplus \cdots \oplus \lambda_{in}\, y_i \mid y_i \in H \}$$

と表わせる. ゆえに

$$\begin{aligned} & T_1 x \oplus T_2 x \oplus \cdots \oplus T_n x \\ = \ & y_1 \oplus \lambda_{12}\, y_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_{1n}\, y_1 \\ + \ & 0 \oplus y_2 \oplus \lambda_{23}\, y_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_{2n}\, y_n \\ + \ & \cdots\cdots \\ + \ & 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus y_m \oplus \lambda_{m\,m+1}\, y_m \oplus \cdots \oplus \lambda_{mn}\, y_m \end{aligned}$$

である. ゆえに, $\{T_1 x_k \oplus \cdots \oplus T_m x_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ が収束すれば, $\{T_{m+1} x_k \oplus \cdots \oplus T_n x_k\}$ も収束する. したがって

$$\{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_m x \mid x \in \mathcal{D} \}$$

は $\mathfrak{A}^{(m+1)}$ の不変グラフ部分空間となり, T_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ は I のスカラー倍となる. したがって

$$\{ x \oplus T_2 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D} \}$$

も $\mathfrak{A}^{(n)}$ の不変グラフ部分空間となり, T_i $(i = m+1, \cdots, n)$ も I のスカラー倍である.

以上から，$\mathfrak{A}$の任意のグラフ変換がIのスカラー倍となる．したがって，定理3．1から定理が示された．

定理3．3　$\mathfrak{M} = \{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D} \}$ を$H^{(n+1)}$のグラフ部分空間とし，$\mathfrak{M}_1 = \{ T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D} \}$ とする．$\mathfrak{M}_1$が$H^{(n)}$で稠密であるための必要十分条件は，定理2．2において

$$n V_i V_j^* = \delta_{ij} I \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

が成立することである．さらに，transitive algebra $\mathfrak{A}$に対して，$\mathfrak{M}$が$\mathfrak{A}^{(n+1)}$の不変グラフ部分空間ならば

$$n \sum_{i=1}^{n} V_i^* V_i = I$$

である．

証明　$\tilde{T} = V S^{(n)}$ で，Vは$\mathfrak{M}_1$の閉包をrangeとする$H^{(n)}$の部分的等距離作用素であるから，$\mathfrak{M}_1$が$H^{(n)}$で稠密であるための必要十分条件は

$$V V^* = \begin{bmatrix} V_1 & \cdots & V_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ V_n & \cdots & V_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^* & \cdots & V_n^* \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ V_1^* & \cdots & V_n^* \end{bmatrix}$$

が$H^{(n)}$の恒等作用素となることである．すなわち

$$n V_i V_j^* = \delta_{ij} I \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

定理の後半を示そう．$n V_i V_i^* = I$であるから，$\sqrt{n} V_i$はH上の部分的等距離作用素で

$$P_i = n V_i^* V_i$$

は射影作用素である．また

$$P_i P_j = n^2 V_i^* V_i V_j^* V_j = 0 \quad (i \neq j)$$

であるから，$P_1, \cdots, P_n$ は互いに直交する．$\sum_{i=1}^{n} P_i \neq I$ とすれば

$$V_i x = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

となる 0 と異なる $x \in H$ が存在する．このような x に対して

$$V(x \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) = 0 \oplus \cdots \oplus 0$$

である．一方，$\tilde{T}^* = |\tilde{T}^*| V$ であるから，$x \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \in \mathcal{D}(\tilde{T}^*)$ で

$$\tilde{T}^*(x \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) = 0 \oplus \cdots \oplus 0$$

$\tilde{T}$ は $\mathfrak{A}^{(n)}$ と可換な閉作用素であるから，$\tilde{T}^*$ は $\mathfrak{A}^{*(n)}$ と可換で

$$\mathfrak{M} = \{ x \in H \mid \tilde{T}^*(x \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) = 0 \oplus \cdots \oplus 0 \}$$

とすれば，$\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{A}^*$ で不変な H の部分空間である．$\mathfrak{A}$ が *transitive* であるから $\mathfrak{A}^*$ も *transitive* である．したがって，$\mathfrak{M} = H$．すなわち，任意の $x \in H$ に対して

$$x \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \in \mathcal{D}(\tilde{T}^*), \quad \tilde{T}^*(x \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) = 0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0$$

同様にして，任意の $x \in H$ に対して

$$\tilde{T}^*(0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus x \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) = 0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0$$

したがって

$$\tilde{T}^* = 0$$

ゆえに，$\tilde{T} = 0$ となり，$\{ T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D} \}$ が $H^{(n)}$ で稠

密であることに反する．ゆえに $\sum_{i=1}^{n} P_i = I$

4 Reductive algebra

恒等作用素を含む $\mathcal{B}(H)$ の弱閉な代数 $\mathfrak{A}$ が

$$\mathfrak{M} \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{M} \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^*$$

を満たすとき，$\mathfrak{A}$ を reductive であるという．ここに $\mathfrak{A}^* = \{A^* \mid A \in \mathfrak{A}\}$ である．$\mathfrak{A}$ が transitive ならば容易にわかるように，$\mathfrak{A}$ は reductive である．Transitive algebra 問題は一般化されて

Reductive algebra 問題：$\mathfrak{A}$ が reductive ならば，$\mathfrak{A}$ は von Neumann algebra か

となる．

この問題に関する諸結果は [12] に詳しい．ここでは [12] で述べられていない Hoover [5] の結果を述べておく．$\mathcal{S}$ を $\mathcal{B}(H)$ の部分集合とするとき，$\mathcal{S}$ より生成される von Neumann algebra を $\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ で表わすことにする．Hoover の結果は形を変えて，つぎのように述べることができる．

定理 4.1 (Hoover) $\mathfrak{A}$ が reductive で $\mathcal{R}(\mathfrak{A})'$ が properly infinite な von Neumann algebra ならば，$\mathfrak{A}$ は von Neumann algebra である．

Hoover はさらに，von Neumann algebra $\mathcal{R}(\mathfrak{A})'$ に条件をつけ

ることにより，いくつかの結果を与えている．そのとき，中心的な役をするのがつぎの補題である．

補題4．2　$\mathfrak{A}$が reductive ならば $\mathcal{R}(\mathfrak{A})'$の中心は$\mathfrak{A}''$に含まれる．

この簡単な証明については[8]を参照されたい．Azoff[2]は$\mathcal{R}(\mathfrak{A})'$の中心が$\mathfrak{A}$に含まれる条件について考察している．

有界作用素の値域となっている manifold を単に作用素値域ということにする．作用素値域については[4]を参照されたい．恒等作用素を含む弱閉な代数$\mathfrak{A}$の不変部分空間による考察を拡張して，$\mathfrak{A}$で不変な作用素値域による考察が最近なされるようになった．$\mathfrak{A}$の各作用素で不変な作用素値域の作る束を $\mathrm{Lat}_{1/2}\mathfrak{A}$ で表わす．Voiculescu[13]はつぎの結果を与えた．

定理4．3 (Voiculescu)　$\mathfrak{A}$を恒等作用素を含む$\mathcal{B}(H)$の弱閉な代数とするとき，$\mathrm{Lat}_{1/2}\mathfrak{A}^{(3)} = \mathrm{Lat}_{1/2}\mathcal{R}(\mathfrak{A})^{(3)}$ ならば $\mathfrak{A} = \mathcal{R}(\mathfrak{A})$ である．

恒等作用素を含む$\mathcal{B}(H)$の弱閉な代数$\mathfrak{A}$が

$$\mathfrak{M} \in \mathrm{Lat}_{1/2}\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{M} \in \mathrm{Lat}_{1/2}\mathfrak{A}^*$$

であるとき，$\mathfrak{A}$を strongly reductive であるといい，

$$\mathfrak{M} \in \mathrm{Lat}_{1/2}\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{M} \in \mathrm{Lat}_{1/2}\mathcal{R}(\mathfrak{A})$$

を満たすとき，$\mathfrak{A}$を parareductive であるという．

$$\text{parareductive} \Rightarrow \text{strong reductive} \Rightarrow \text{reductive}$$

であることは明らかである.

Voiculescu の結果は $\mathfrak{A}^{(3)}$ が paraveductive ならば $\mathfrak{A}=\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ ということであった. 類似の結果として, Peligrad [9] によるつぎの定理を紹介しておく.

<u>定理 4. 4</u> (Peligrad) $\mathfrak{A}^{(2)}$ が strongly reductive ならば $\mathfrak{A}=\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ である.

Paravaductive algebra に関しては問題が完全に解決されて, つぎの定理がなりたつ.

<u>定理 4. 5</u> (Azoff, Peligrad) $\mathfrak{A}$ が paraveductive ならば $\mathfrak{A}=\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ である.

この定理は, 最初 Azoff [2] により, ヒルベルト空間が可分の場合になりたつことが示され, Peligrad [10] により一般の場合に拡張された.

文　献

[1] W.B.Arveson, A density theorem for operator algebras, Duku Math.J., 34(1967), 653-643.

[2] E.A.Azoff, Invariant linear manifolds and the selfadjointness of operator algebras, Amer.J.Math., 99(1977), 121-138.

[3] S.R.Caradus, Semiclosed operators, Pacific J.Math., 44(1973), 75-79.

[4] P.A.Fillmore and J.P.Williams, On operator ranges, Advances in Math.,

7(1971),254-281.

[5] T.B.Hoover, Operator algebras with reducinginvariant subspaces, Pacific J.Math., 44(1973), 173-180.

[6] R.V.Kadison, On the orthogonalization of operator representations, Amer.J.Math., 78(1955), 600-621.

[7] W.E.Kaufman, Semiclosed operators in Hilbert space, Proc.Amer. Math.Soc., 70(1979),67-73.

[8] 御園生善尚 Reductive algebraについて, 数理解析研究所講究録 256(1975)

[9] C. Peligrad, Invariant subspaces of von Neumann algebras, Acta Sci. Math.(Szeged), 37(1975), 273-279.

[10] ________, Invariant subspaces of von Neumann algebras II, Proc. Amer. Math. Soc.,73(1979), 346-350.

[11] H.Radjavi and P.Rosenthal, On invariant subspaces and refleive algebras, Amwr.J.Math., 91(1969), 683-692.

[12] ________, invariant subspaces, Springer-Verlag, New York, 1973.

[13] D. Voiculescu, Sure les sous-espaces parafermes invariants d une algebre de von Neumann, Bull. Sci. Math., (2)96(19720, 161-168.