

無限の遅れを持つ関数微分方程式の基本行列

電通大 内藤 敏機

§ 0 標題の方程式の線形系

$$(0.1) \quad \frac{dx}{dt} = L(t, x_t) + h(t)$$

の解の表現について考察する。線形常微分方程式系の解は、基本行列を用いて、所謂定数変化法で表わされる。有限の遅れを持つ線形関数微分方程式系に対しても、定数変化法が拡張されており、基本行列 $X(t, \sigma)$ が定義されている。これは初期条件 $X(t, \sigma) \equiv 0$ for $t < \sigma$ and $X(\sigma, \sigma) = I$ (単位行列) の下での、方程式

$$(0.2) \quad \frac{dX}{dt} = L(t, X_t) \quad t \geq \sigma$$

の解である。有限遅れの場合、方程式の相空間はある $\ell > 0$ (有限) を決めて連続関数の空間 $C = C([- \ell, 0], \mathbb{C}^n)$ とするのが普通であり、解は $t \geq \sigma$ で連続だからそうする理由もある。

る。一方基本行列の初期条件となる関数 X_0 は不連続でありこの相空間に属さない。しかし Riesz の表現定理により、連続関数の空間 C 上で定義された連続線形汎関数は Stieltjes 積分で表わされる。 $0 \leq t \leq 0+$ に対し X_t は C に属さないが、この積分によって $L(t, X_t)$ が定義され、方程式 (0.2) が意味を持つ。

今から考える無限遅れの方程式系の相空間 β は、次節で公理的に定義される。それによって $(-\infty, 0]$ 上で連続な compact 台を持つ関数の族 $\mathcal{C}$ が相空間 β の部分集合となる。だから $L(t, \cdot)$ は $\mathcal{C}$ 上で意味を持つが、これは $(-\infty, 0]$ 上で定義された有界 Borel 可測で compact 台の関数の族 $\mathcal{F}$ の上にまで延長される。これを $\tilde{L}(t, \cdot)$ で表わすと、無限遅れの場合も基本行列の方程式は (0.2) で L を $\tilde{L}$ で置きかえたものと考えられる。実際、そうしてうまく行き、有限遅れの場合の議論に併行した議論で、方程式系 (0.1) に対して定数変化法の公式が得られる。ただ無限遅れの場合は、初期時刻のよりこみだけ時間が過ぎても X_t は β に属さないかも知れない。たとえば β として、 $(-\infty, 0]$ で連続で $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \varphi(\theta) e^{\lambda \theta}$ の有在する関数 φ の全体を考えれば、この事が起る。有限遅れの場合は X は系 (0.2) を $t \geq 0+$ のすべての時刻で満たすが、無限遅れの場合は、 $[0, \infty)$ のほとんどすべての t において

$dx/dt = \tilde{L}(t, x_t)$ となるだけである。

自励系はすでに [8, 9] で調べられているが, Laplace 変換が用いられて, いささか迂遠である。定数変化法の公式は, そんな事をせずとも出てくる誤である。ただこの稿の順序で議論を進めると, 基本行列の $t \rightarrow \infty$ のときの order が指数関数的であることを示せるかどうか疑問である (定理 3.1)。そうすると基本行列の Laplace 変換が特性行列の逆行列であることを示すのに困る。しかし [8, 9] では特性行列の逆行列の Laplace 逆変換として X を定義し, 色々な欲しい結果を導いている。

有限遅れの場合の基本行列については References [1, 3, 6, 7] を参照されたい。無限遅れの方程式の相空間に関しては [4, 10] が基本的で, [5] では少し修正して整理されている。積分の延長理論は [11] で丁寧に述べてある。[2] は積分順序の交換に際し, しばしば利用される。

§1 関数空間 $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \Gamma$. 関数 $x: (-\infty, A) \rightarrow \mathbb{C}^n$ があるとき, 関数 $x_t: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}^n$ (但し $t < A$) を, 関係式 $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ for $\theta \leq 0$ によって定義する。方程式系 (0.1) を考える時, x_t の属する相空間 $\mathcal{B}$ と, それに関連する空間 $\mathcal{C}, \Gamma$ を定義する。

β は $(-\infty, 0]$ を n 次元複素 Banach space $\mathbb{C}^n$ に写す関数のある族で、線形空間であり、ある semi-norm $|\cdot|_\beta$ が定義されており、次の様な条件を満たすとする。

(H₁) 区間 $(-\infty, \sigma + A)$, $A > 0$, を $\mathbb{C}^n$ に写す関数 χ が $[\sigma, \sigma + A)$ で連続で $\chi_\sigma \in \beta$ を満たせば, $[\sigma, \sigma + A)$ の t に対し $\chi_t \in \beta$ となり χ_t は t の連続関数となる。

(H₂) ある正値非減少関数 $K(t)$, $t \geq 0$, と, 正値で局所有界関数 $M(t)$, $t \geq 0$, があって, (H₁) で考えた χ に対し

$$|\chi_t|_\beta \leq K(t-\infty) \sup_{\sigma \leq \sigma \leq t} |\chi(\sigma)|_{\mathbb{C}^n} + M(t-\infty) |\chi_\sigma|_\beta$$

が, $t \geq \sigma$ に対して成立つ。

(H₃) ある $K > 0$ が存在し, 任意の $\phi \in \beta$ に対し

$$|\phi(0)|_{\mathbb{C}^n} \leq K |\phi|_\beta.$$

$\mathcal{C}$ は $(-\infty, 0]$ を $\mathbb{C}^n$ に写す compact 台を持つ連続関数の全体からなる線形空間とする。 $\mathcal{P}$ は $(-\infty, 0]$ を $\mathbb{C}^n$ に写す compact 台を持ち, 有界で Borel 可測な関数全体からなる線形空間とする。もちろん $\mathcal{C}$ は $\mathcal{P}$ に含まれる。また上記 (H₁) によって, $\mathcal{C}$ は β にも含まれる。しかし $\mathcal{P}$ と β との関係は, 何も仮定しない。

次節に進む前に, β 上の半群 $S(t)$, $t \geq 0$, を定義する。

すなわち $\phi \in \mathcal{B}$ に対して, $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ を $\chi_0 = \phi$ かつ $\chi(t) = \phi(0)$ for $t > 0$ とおき, $S(t)\phi = \chi_t$, $t \geq 0$ とするのである。(H₁) から $S(t)$ は確かに $\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}$ に写し, ϕ を止めたとき $S(t)\phi$ は t について連続となる。(H₂) によって, t を止めたとき $S(t)$ は $\mathcal{B}$ 上の有界線形作用素で, そのノルム $|S(t)|$ は局所有界である。Hille-Phillips の教科書 p.306 にある如く $|S(t)|$ は下半連続となり Borel 可測である。

§2 線形作用素の表現定理. 前節で定義した空間 $\mathcal{B}$ から $\mathbb{C}^n$ への連続線形作用素 L の積分表現を考える。上記のように $\mathcal{C}$ は $\mathcal{B}$ に含まれるから, $\phi \in \mathcal{C}$ に対し $L(\phi)$ は意味を持つ。今, $\text{supp } \phi \subset [-r, 0]$ ならば条件 (H₂) によって

$$|L(\phi)|_{\mathbb{C}^n} \leq K(r) \sup_{-\infty < \theta \leq 0} |\phi(\theta)|_{\mathbb{C}^n}.$$

したがって L の $\mathcal{C}$ への制限 L_0 は, 空間 $(-\infty, 0]$ 上の Radon 測度である [11]。 L_0 は Γ の上に次の意味で延長される。まず Γ の関数列 $\{\phi^n\}$ が ϕ に Lebesgue 収束するとは, $\{\phi^n(\theta)\}$ が一様有界で, ϕ^n の台が n に無関係な一定の compact set に含まれ, 各点 θ で $\phi^n(\theta)$ が $\phi(\theta)$ に収束することとする。また $\{\phi^n\}$ が ϕ に Lebesgue 収束すれば $\mu(\phi^n)$ が $\mu(\phi)$ に

収束するような線形作用素 $\mu: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^n$ は Lebesgue 連続であるという。そうすると $(-\infty, 0]$ 上の $\mathbb{C}^n$ の値をとる Radon 測度は, Γ 上の Lebesgue 連続な線形作用素に一意的に延長される ([11] を見よ. 和訳 "シュワルツ解析学" 東京図書 33 巻, pp. 123-128). したがって次の定理が成り立つ.

定理 2.1. 空間 $\mathcal{B}$ を $\mathbb{C}^n$ に写す連続線形作用素 L から次のような Γ から $\mathbb{C}^n$ への線形作用素 $\tilde{L}$ が唯一つ決まる:

- (i) $\tilde{L}(\phi) = L(\phi)$ for $\phi \in \mathcal{C}$.
- (ii) $\tilde{L}$ は Lebesgue 連続である.

このような $\tilde{L}$ の存在を知れば, ある特殊な関数 χ に対し $L(\phi)$ の積分表現は容易に導かれる。そのために, $(-\infty, 0)$ において 0, $[0, \infty)$ において 1 の値をとる関数を χ とおく。明きらかに, $t \geq 0$ に対して χ_t は空間 $(-\infty, 0]$ 上での, 区間 $[-t, 0]$ の定義関数 (indicator function) である。 I を $n \times n$ 単位行列として, $n \times n$ 行列関数 $\eta(\theta)$, $\theta \leq 0$, を

$$\eta(\theta) = \begin{cases} -\tilde{L}(\chi_{-\theta} I) & \text{for } \theta < 0 \\ 0 & \text{for } \theta = 0 \end{cases}$$

によって定義しよう。このとき次の定理が成立つ ([11], 和訳 4 巻, 定理 95 及び定理 102 も見よ)。

定理 2.2 ([9]). 上記の η は $(-\infty, 0]$ の任意の有界区間 $[-t, -s]$, $t > s \geq 0$, で有界変分でその全変分は

$$\text{var}(\eta, [-t, -s]) \leq c |L| K(t-s) |S(s)|$$

と評価される, 但し c は $\mathbb{C}^n$ のノルムに依存する定数である.
関数 $\phi: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}^n$ が, $(-t, 0]$ で連続, $-t$ で右連続で,
 $(-\infty, -t)$ では恒等的に 0 ならば,

$$\mathcal{L}(\phi) = \int_{-t}^0 d\eta(\theta) \phi(\theta).$$

特に

$$L(\phi) = \int_{-\infty}^0 d\eta(\theta) \phi(\theta) \quad \text{for } \phi \in \mathcal{C}.$$

§3 非自励線形関数微分方程式系の基本行列と解の表現
実数 t を parameter とする空間 β を $\mathbb{C}^n$ に写す線形作用素の族 $L(t)$ が次の条件を満たすとする: そのノルム $|L(t)|$ は $\mathbb{R}$ の有界区間で有界で, 各 $\phi \in \beta$ に対し $L(t)\phi$ は t の連続関数である. 記号 $L(t, \phi)$ は $L(t)\phi$ を表わすとする. $\mathbb{R}^2$ の (t, θ) に対し $n \times n$ 行列 $\eta(t, \theta)$ を

$$\eta(t, \theta) = \begin{cases} -\mathcal{L}(t, X_{-\theta} I) & \text{if } \theta < 0 \\ 0 & \text{if } \theta \geq 0 \end{cases}$$

とおく. 定理 2.2 によって, これは t を固定したとき θ に関して局所有界変分である. その上 (t, θ) に関して $\mathbb{R}^2$ 上で Borel 可測である. 実際, $(-\infty, -\frac{1}{n}]$ では 0, $[0, \infty)$ では 1 で $[-\frac{1}{n}, 0]$ では一次式で表わされる連続関数を X^n , $n=1, 2, \dots$, とおくと, $\theta < 0$ に対して $X_{-\theta}^n$ は $X_{-\theta}$ に Lebesgue 収束する. よって $\theta < 0$ に対して, $\tilde{L}(t, X_{-\theta}^n I)$ は $\tilde{L}(t, X_{-\theta} I)$ に収束する. 他方定理 2.1 によって $\tilde{L}(t, X_{-\theta}^n I)$ は $L(t, X_{-\theta}^n I)$ に等しく, 後者は $L(t)$ に対する仮定から $(t, \theta) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ において連続である. 連続関数の極限関数として $\tilde{L}(t, X_{-\theta} I)$ は $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ で Borel 可測であり, (たがって $\eta(t, \theta)$ は $\mathbb{R}^2$ で Borel 可測である).

定理 3.1. 未知関数 X の方程式

$$(3.1) \quad X(t) = X(\sigma) + \int_{\sigma}^t \tilde{L}(s, X_s) ds \quad t > \sigma$$

は, 各 $\phi \in \Gamma$ に対して $X(t) = \phi(t - \sigma)$ for $t \leq \sigma$ であるような局所絶対連続な解 $X(t, \sigma, \phi)$ を区間 $[\sigma, \infty)$ において唯一つ持つ. また C を定理 2.2 で述べた定数として, このとき $\text{supp } \phi \subset [-1, 0]$ ならば, 任意の $t \geq \sigma$ に対して次の不等式がなりたつ:

$$\begin{aligned}
& |X(t, \sigma, \phi)|_{\mathbb{C}^n} \\
& \leq |\phi(\sigma)|_{\mathbb{C}^n} \cdot c \exp \int_{\sigma}^t |L(s)| K(s-\sigma) ds \\
& \quad + \sup_{0 \leq \theta < \sigma} |\phi(\theta)|_{\mathbb{C}^n} \cdot c K(\tau) \int_{\sigma}^t |L(s)| |S(s-\sigma)| \left\{ \exp \int_{\sigma}^s |L(u)| K(u-\sigma) du \right\} ds.
\end{aligned}$$

証明. 逐次近似法で証明すればよいが、 $\tilde{L}(s, X_s)$ の可測性が問題となる。まず関数 $y: (-\infty, \sigma+A] \rightarrow \mathbb{C}^n$ が $[\sigma, \sigma+A]$ で連続で、 $y_\sigma = \phi$ が Γ に属すれば、 $\tilde{L}(t, y_t)$ は $t \in [\sigma, \sigma+A]$ に関して Borel 可測であると言おう。より詳しく、 ϕ が α 階級の Baire 関数ならば、 $\tilde{L}(t, y_t)$ は高々 α 階級の Baire 関数である。実際、 ϕ が 0 階級即ち連続な関数ならば、定理 2.1 により $\tilde{L}(t, y_t) = L(t, y_t)$ であり、 $L(t)$ に関する仮定によって、これは t の連続関数である。ところで超限帰納法によって次の 2 補題が証明される。第一に、関数 $\phi: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}^n$ が α 階級ならば、区間 $[-t, -\Delta]$, $t > \Delta \geq 0$, Δ の ϕ の制限も高々 α 階級であり、逆にその制限が α 階級で、その上 $(-\infty, -t]$ 及び $[-\Delta, 0]$ では連続なら、 ϕ は $(-\infty, 0]$ で高々 α 階級である。第二に、定数 $M > 0$ に対して、 $|\phi(\theta)| < M$ のときは $\phi^M(\theta) = \phi(\theta)$, $|\phi(\theta)| \geq M$ のときは $\phi^M(\theta) = (M/|\phi(\theta)|) \cdot \phi(\theta)$ とおいて、関数 $\phi^M: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}^n$ を定義すると、 ϕ が α 階級ならば、 ϕ^M は高々 α 階級である。本来の命題にもより、 Γ に属する ϕ が β 階級とし、 $\alpha < \beta$ なる順序数 α に対し命題が成立つと

する. このとき β より低い階級の関数の列 $\{\phi^n\}$ が存在して, 各点で $\phi^n(\theta)$ は $\phi(\theta)$ に収束する. 上記第一補題により ϕ^n の台は一定の compact set に含まれると仮定できる. $t \leq \sigma$ においては $y^n(t) = \phi^n(t - \sigma)$ で, $[\sigma, \sigma + A]$ では連続な関数 $y^n(t)$ を作って, 各点で $y^n(t)$ が $y(t)$ に収束するようにできる. 同じ補題によって y_t^n , $\sigma \leq t \leq \sigma + A$, はすべて β より低い階級であるが, 第二補題によってこれらは一様有界であるとしてよい. $\tilde{L}(t)$ の Lebesgue 連続性から, $\tilde{L}(t, y_t^n)$ は $\tilde{L}(t, y_t)$ に収束する. 一方帰納法の仮定から, $\tilde{L}(t, y_t^n)$ はすべて β より低い階級であるから, $\tilde{L}(t, y_t)$ は高々 β 階級の Baire 関数である.

次に上と同じ y に対し, $\tilde{L}(t, y_t)$ は $t \in [\sigma, \sigma + A]$ で有界である. 実際, $u(t)$ を $t < \sigma$ では恒等的に 0 で, $t \in [\sigma, \sigma + A]$ に対しては $y(t)$ に等しくとり, また $t \leq \sigma + A$ に対し, $y(t) = u(t) + v(t)$ とおいて $v(t)$ を定義すると, $\tilde{L}(t, y_t) = \tilde{L}(t, u_t) + \tilde{L}(t, v_t)$ と分解される. $|\tilde{L}(t, u_t)|$ は $\sup\{|u_t(\theta)| : -(t - \sigma) \leq \theta \leq 0\}$ と $\text{var}(\eta, [-t - \sigma, 0])$ の積で上からおさえられるが, 定理 2.2 によって次のように書きかえられる:

$$(3.2) \quad |\tilde{L}(t, u_t)| \leq \left(\sup_{\sigma \leq \theta \leq t} |y(\theta)| \right) \cdot c |L(t)| K(t - \sigma).$$

また $\sup\{|v_t(\theta)| : \theta \leq 0\} = \sup\{|\phi(\theta)| : \theta < 0\}$ であり,

ϕ の台が $[-r, 0]$ に含まれると V_t の台は $[-(t-\sigma)-r, -(t-\sigma)]$ に含まれるから,

$$(3.3) \quad |\tilde{L}(t, v_t)| \leq \sup_{\theta < 0} |\phi(\theta)| \cdot c |L(t)| K(r) |S(t-\sigma)|$$

したがって $|L(t)|, K(t), |S(t-\sigma)|$ に対する仮定から, $\tilde{L}(t, y_t)$ は $[\sigma, \sigma+A]$ において有界である.

さて解の逐次近似列 $x_n(t), t \in \mathbb{R}$, を次の様に構成する.
 $t \leq \sigma$ に対しては, $x^n(t) = \phi(t-\sigma), n=0, 1, 2, \dots$ とおく.
 $t > \sigma$ に対しては $x^0(t) \equiv \phi(0)$ とおくと, 上記の考察から, $\tilde{L}(t, x_t^0)$ は局所有界な Borel 可測関数である, 但し $t \geq \sigma$. 以下 $n \geq 1$ に対して帰納的に

$$x^n(t) = \phi(0) + \int_{\sigma}^t \tilde{L}(s, x_{s-}^{n-1}) ds \quad t > \sigma$$

とする. これは意味を持ち x^n は $[\sigma, \infty)$ で連続である.

今, $A(t) = |L(t)| K(t-\sigma), B(t) = |L(t)| |S(t-\sigma)|, C_1 = c |\phi(0)|, C_2 = c K(r) \sup \{ |\phi(\theta)| : \theta < 0 \}$ とおくと (3.2) と (3.3) を使って, $t \geq \sigma$ に対し $|\tilde{L}(t, x_t^n)| \leq C_1 A(t) + C_2 B(t)$ となる. したがって

$$|x^n(t) - x^{n-1}(t)| \leq C_1 \int_{\sigma}^t A(s) ds + C_2 \int_{\sigma}^t B(s) ds \quad t \geq \sigma$$

が成立つ. $n=1, 2, \dots$ に対して $x^n(t) - x^{n-1}(t)$ は $t \leq \sigma$ では

0 となり. これは $\mathbb{R}$ で連続な関数である. ゆえに定理 2.1 から $|\tilde{L}(s, x_s^n - x_s^{n-1})| = |L(s, x_s^n - x_s^{n-1})|$ となり. この右辺は $|L(s)| |x_s^n - x_s^{n-1}|_\beta$ で上からおさえられ. 更に (H2) を使うと. $A(s) \sup\{|x^n(u) - x^{n-1}(u)| : a \leq u \leq s\}$ 以下である. これを使って. $n=1, 2, \dots$ に対して.

$$|x^n(t) - x^{n-1}(t)| \leq C_1 \frac{1}{n!} \left\{ \int_a^t A(s) ds \right\}^n \\ + C_2 \int_a^t B(s) \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \int_a^t A(u) du \right\}^{n-1} ds \quad t \geq a$$

であることが帰納的に示される.

ゆえに $\{x^n(t)\}$ は $[a, \infty)$ で局所一様収束する. 極限関数を $x(t)$ とおけば, 有界収束の定理によってこれが望む解であると言える. 不等式 $|x^n(t)| \leq \sum_{k=1}^n |x^k(t) - x^{k-1}(t)| + |\phi(0)|$ と. 上記評価式を組合せ. $n \rightarrow \infty$ のときの極限を考えれば, 定理に述べた評価式が導き出される. 解の一意性は Gronwall 不等式によって直接証明できる.

この定理から. $t < \sigma$ に対して恒等的に 0 行列に等しく. $t = \sigma$ において単位行列 I に等しいような. 方程式 (3.1) の行列解 $X(t, \sigma)$ が唯一つ存在する. これを関数微分方程式 (0.2) の基本行列とよぶ. したがって. 定理 2.2 より

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial t}(t, \sigma) &= \int_{-(t-\sigma)}^0 d\theta [\eta(t, \theta)] X(t+\theta, \sigma) \quad \text{a.e. in } t \geq \sigma \\ &= \int_{\sigma}^t d\lambda [\eta(t, \lambda - t)] X(\lambda, \sigma)\end{aligned}$$

が成立ち. また

$$|X(t, \sigma)| \leq c \|I\| \exp \int_{\sigma}^t |L(\lambda)| K(\lambda - \sigma) d\lambda \quad t \geq \sigma$$

と評価される. (したがって (0.2) が自励系であっても, 関数 $K(t)$ の増大する order を知らなければ, この式から $|X(t, \sigma)|$ が指数関数的に増加するとは結論できない.

次に随伴系を考えよう.

定理 3.2. t はある実数, b は n 次横ベクトルとする. この時, λ を変数とする n 次横ベクトル関数 $y(\lambda)$ の方程式

$$(3.4) \quad y(\lambda) + \int_{\lambda}^t y(\alpha) \eta(\alpha, \lambda - \alpha) d\alpha = b \quad \lambda \leq t$$

は, $(-\infty, t]$ において局所有界変動な解を唯一持つ. その全変分は, $\lambda < t$ に対して次のように評価される:

$$\text{var}(y, [\lambda, t]) \leq \|b\| \left[\exp \left\{ \int_{\lambda}^t c |L(\alpha)| K(\alpha - \lambda) d\alpha \right\} - 1 \right].$$

証明. これは逐次近似法で示される. n 次横ベクトル関数 $u(\lambda)$, $\lambda \leq t$, が Borel 可測で局所有界ならば,

$$v(s) = \int_s^t u(\alpha) \eta(\alpha, s-\alpha) d\alpha$$

は、 $(-\infty, t]$ において意味を持ち、関数 v は局所有界変動であることをまず見よう。実際 $\eta(t, \theta)$ は (t, θ) の Borel 可測関数だから、 $\eta(\alpha, s-\alpha)$ は α の Borel 可測関数である。定理 2.2 から $\eta(t, \theta)$ の θ に関する compact 区間での全変分は、 t が compact 区間を走るとき一様有界となる。ゆえに特に $\eta(t, \theta)$ は $\mathbb{R}^2$ で局所有界である。これより $u(\alpha) \eta(\alpha, s-\alpha)$ は α に関して Borel 可測となり、 $\alpha \in [s, t]$ に対して有界である。よって上記積分は可能である。 t より小さい s を一つ固定しよう。 $\eta(t, \theta) = 0$ for $\theta \geq 0$ であることを注意すると、 $v(s)$ の定義式は $s \in [s, t]$ に対して $u(\alpha) \eta(\alpha, s-\alpha)$ の $[s, t]$ における積分であきかえられる。ゆえに、 $[s, t]$ の分割、 $s = s_0 < s_1 < \dots < s_N = t$ に対し

$$\sum_{j=1}^N |v(s_j) - v(s_{j-1})| \leq \int_s^t |u(\alpha)| \sum_{j=1}^N |\eta(\alpha, s_j - \alpha) - \eta(\alpha, s_{j-1} - \alpha)| d\alpha$$

である。定理 2.2 の η の全変分の評価式を使うと、結局

$$\text{var}(v, [s, t]) \leq c \int_s^t |u(\alpha)| |L(\alpha)| K(\alpha - s) d\alpha$$

を得る。即ち v は $[s, t]$ で有界変動である。有界変動関数は有界で Borel 可測であることに注意しよう。

さて、 $(-\infty, t]$ 上の局所有界変分関数の列 $\{y^n(s)\}$ を、帰納的に定義する。まず $y^0(s) \equiv b$ for $s \leq t$ とし、 $n=1, 2, \dots$ に対して、関係式

$$y^n(s) = b - \int_s^t y^{n-1}(\alpha) \eta(\alpha, s-\alpha) d\alpha \quad s \leq t$$

によって y^n を定義する。これが意味を持つことが上記の注意によって確かめられる。

$\eta(t, \theta)$ は θ について局所有界変分であるから、局所有界で、 $\eta(t, 0) \equiv 0$ に注意すると定理2.2から $|\eta(t, \theta)| \leq c|L(t)| \times K(-\theta)$ for $\theta \leq 0$ となる。したがって $|y^1(s) - y^0(s)|$ は $c|b||L(\alpha)|K(\alpha-s)$ を α について $[s, t]$ で積分したもので上からおさえられる。これを使うと次に

$$|y^2(s) - y^1(s)| \leq \int_s^t c|L(\alpha)|K(\alpha-s) \int_\alpha^t c|b||L(u)|K(u-\alpha) du d\alpha$$

を得る。 $K(t)$ は非減少と仮定されているので、右辺の $K(u-\alpha)$ を $K(u-s)$ で置きかえても不等号は変わらない。この置きかえをいつも行くと、 $n=1, 2, \dots$ に対し、 $s \leq t$ のとき

$$|y^n(s) - y^{n-1}(s)| \leq \frac{|b|}{n!} \left\{ c \int_s^t |L(u)|K(u-s) du \right\}^n$$

であることが帰納的に証明される。この不等式を関係式 $|y^n(s)| \leq \sum_{k=1}^n |y^k(s) - y^{k-1}(s)| + |y^0(s)|$ にもちこめば $n=0, 1, \dots$ に対し

$$|y^n(s)| \leq |b| \exp\left\{c \int_0^t |L(u)| K(u-s) du\right\} \quad s \leq t.$$

ゆえに $\{y^n(s)\}$ は $(-\infty, t]$ で局所一様収束する。極限関数を $y(s)$ とすれば、 $y^n(s)$ の定義式と有界収束の定理を使い、これは定理の方程式の解であることがわかる。 y^n はすべて Borel 可測だから y も Borel 可測である。上記不等式で $n \rightarrow \infty$ とすれば $|y(s)|$ の評価式が得られ、 $y(s)$ は局所有界変動である。証明の最初、PP.13-14 の考察から $y(s)$ は 1 たがって局所有界変動で、 $u=v=y$ に対し P.14 で得た全変分の評価を適用すると

$$\begin{aligned} & \text{Var}(y, [s, t]) \\ & \leq c \int_s^t |L(\alpha)| K(\alpha-s) |b| \exp\left\{c \int_\alpha^t |L(u)| K(u-\alpha) du\right\} d\alpha. \end{aligned}$$

$K(t)$ は非減少であるから、右辺の $K(u-\alpha)$ を $K(u-s)$ で置きかえても不等号は変わらず、定理の評価式に達する。

解の一意性は Gronwall 不等式によって、証明できる。

方程式系 (3.4) は方程式系 (0.2) の 随伴系 とよばれる。定理 3.2 から、実定数 t に対して、 s を変数とする $n \times n$ 行列 $Y(s, t)$ の方程式系

$$Y(s, t) + \int_0^t Y(\alpha, t) \eta(\alpha, s - \alpha) d\alpha = I \quad s \leq t$$

は, $[-\infty, t]$ において局所有界変動な解を唯一つ持つ. そして,

$$\text{var}(Y(\cdot, t), [s, t]) \leq \|I\| \left[\exp \int_0^t c \|L(\alpha)\| K(\alpha - s) d\alpha - 1 \right] \quad s \leq t.$$

また, 後の計算のため

$$Y(s, t) \equiv 0 \quad \text{for } s > t$$

と定義する.

局所可積分な関数 $h: [\sigma, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ をとり, 方程式系

$$(3.5) \quad x(t) = \begin{cases} a + \int_{\sigma}^t \tilde{L}(s, x_s) ds + \int_{\sigma}^t h(s) ds & t \geq \sigma \\ 0 & t < \sigma \end{cases}$$

を考えよう. 定理 3.1 と同様にして, これは $[\sigma, \infty)$ で局所絶対連続な解を唯一つ持つ.

定理 3.3. 系 (3.5) の解は次のように表わされる:

$$x(t) = Y(\sigma, t) a + \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t) h(\alpha) d\alpha \quad t \geq \sigma.$$

証明. Banks [1] と同様の方法で証明できる. 実際, $x(\sigma) = a$, $Y(\sigma, \sigma) = I$ に注意して部分積分を行うと

$$(3.6) \quad \int_{\sigma}^t d_{\alpha} [Y(\alpha, t)] X(\alpha) + \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t) dX(\alpha) = X(t) - Y(\sigma, t) a.$$

$X(t)$ は (3.5) の解だから, $dX(\alpha) = \{\tilde{L}(\alpha, X_{\alpha}) + h(\alpha)\} d\alpha$ と置きかえられる. 定理 2.2 を使って, $\tilde{L}(\alpha)X_{\alpha}$ は $\eta(\alpha, \theta)$ を使って Stieltjes 積分で表わされる. 即ち

$$\int_{\sigma}^t Y(\alpha, t) \tilde{L}(\alpha, X_{\alpha}) d\alpha = \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t) d\alpha \left[\int_{-(\alpha-\sigma)}^0 d_{\theta} \eta(\alpha, \theta) X(\alpha+\theta) \right]$$

右辺 [] 中の Stieltjes 積分において, 積分変数を関係式 $\lambda = \alpha + \theta$ によって θ から λ に変えると, λ の積分区間は $[\sigma, \alpha]$ になるが, $\eta(\alpha, \lambda - \alpha) \equiv 0$ for $\lambda \geq \alpha$ であるから, 積分区間は $[\sigma, t]$ まで延長しても積分値は変わらない. よって上記右辺は $[\sigma, t] \times [\sigma, t]$ における (α, λ) に関する積分で表わされる. そして Cameron-Martin [2] により, 積分順序を交換すると.

結局

$$\int_{\sigma}^t Y(\alpha, t) d\alpha \left[\int_{-(\alpha-\sigma)}^0 d_{\theta} \eta(\alpha, \theta) X(\alpha+\theta) \right] = \int_{\sigma}^t d_{\lambda} \left[\int_{\sigma}^t Y(\alpha, t) \eta(\alpha, \lambda - \alpha) d\alpha \right] X(\lambda).$$

右辺の α に関する積分は, $\eta(\alpha, \lambda - \alpha) \equiv 0$, $\alpha \leq \lambda$, を使って再び $[\sigma, t]$ に縮小される. したがって (3.6) の左辺は

$$\int_{\sigma}^t d_{\lambda} \left\{ Y(\lambda, t) + \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t) \eta(\alpha, \lambda - \alpha) d\alpha \right\} X(\lambda) + \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t) h(\alpha) d\alpha$$

に等しいが, Y の満たす方程式から第一項は 0 となる. これは

リ定理の結論に達する.

上記定理を $h(t) \equiv 0$ の場合に適用すると次の系が得られる.

系 3.4. $X(t, \sigma) = Y(\sigma, t)$ for all $\sigma, t \in \mathbb{R}$.

系 3.5. 方程式系 (3.5) の解は次のように表わされる:

$$X(t) = X(t, \sigma) a + \int_{\sigma}^t X(t, s) h(s) ds \quad t \geq \sigma$$

方程式 (0.1) にもとづき、 $L(t): \beta \rightarrow \mathbb{C}^n$ は 7 頁の仮定を満たし、 $h: [\sigma, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ は局所可積分とする.

定理 3.6. 任意の $\phi \in \beta$ に対し、 $X_{\sigma} = \phi$ で、方程式 (0.1) をほとんどすべての $t \geq \sigma$ に対し満たす局所絶対連続な解 $X(t, \sigma, \phi, h)$ が唯一つ存在して、次のように表わされる:

$$X(t, \sigma, \phi, h) = \phi(0) + \int_{\sigma}^t X(t, s) L(s, S(s-\sigma)\phi) ds + \int_{\sigma}^t X(t, s) h(s) ds \quad t \geq \sigma.$$

証明. 解の一意性は Gronwall 不等式により証明される. ゆえに存在したとすると、系の線形性により $X(t, \sigma, \phi, h)$

$= X(t, \sigma, \phi, 0) + X(t, \sigma, 0, h)$. $X(t, \sigma, 0, h)$ は L を $\tilde{L}$ で置きかえた方程式系の解となるから、系 3.5 によって、それは上式右辺第三項で与えられる。簡単のため $X(t) = X(t, \sigma, \phi, 0)$ とおく。関数 $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ を、 $y(t) = \phi(0)$ for $t \geq \sigma$, $y(t) = \phi(t - \sigma)$ for $t < \sigma$ により定義すると、 $y_\sigma = \phi$ であり $y_t = \dot{\phi}(t - \sigma)$ である。今 $z(t) = X(t) - y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, とおく。これは $\mathbb{R}$ 上連続で、 $t \geq \sigma$ のとき

$$\frac{dz}{dt} = L(t, z_t) + L(t, y_t)$$

をみたら、 $t \geq \sigma$ に対し $z_t \in \mathcal{C}$ であるから $L(t, z_t) = \tilde{L}(t, z_t)$ と置きかえられる。 $z_\sigma = 0$ に注意して、系 3.5 を $h(t) = L(t, y_t)$, $x \equiv z$ に対し適用すると

$$z(t) = \int_{\sigma}^t X(t, s) L(s, y_s) ds \quad t \geq \sigma.$$

即ち z の方程式は解をもつ。それが上の様に表示される。関係 $X(t) = y(t) + z(t) = \phi(0) + z(t)$, $t \geq \sigma$, にこれを代入すれば、 $X(t) = X(t, \sigma, \phi, 0)$ が定理 3.6 の式の右辺の各項の和で表わされる。

方程式 (0.1) で L を $\tilde{L}$ で置きかえ、初期関数 $\tilde{\phi}$ が $\mathcal{T}$ に属するとすると、その時の解 $\tilde{X}(t, \sigma, \phi, h)$ はやはり

$$\begin{aligned}\tilde{X}(t, \sigma, \phi, h) &= \phi(0) + \int_{\sigma}^t X(t, s) \tilde{L}(s, S(s-\sigma)\phi) ds \\ &\quad + \int_{\sigma}^t X(t, s) h(s) ds \quad t \geq \sigma\end{aligned}$$

である。定理3.1の証明中で述べた $\tilde{L}(s, S(s-\sigma)\phi)$ の可測性、有界性の判定を思い出せば、上記の証明がそのまま適用できる。特に $\phi \in \mathcal{C}$ ならば、 $\tilde{L}(s, S(s-\sigma)\phi)$ を $\gamma(s, \theta)$ を使って Stieltjes 積分で表わし計算すると、

$$\begin{aligned}X(t, \sigma, \phi, h) &= X(t, \sigma)\phi(0) + \int_{-\infty}^0 d\theta \left\{ \int_{\sigma}^t X(t, s) \gamma(s, \theta + \sigma - s) ds \right\} \phi(\theta) \\ &\quad + \int_{\sigma}^t X(t, s) h(s) ds \quad t \geq \sigma.\end{aligned}$$

Banks [1] と類似の公式が導き出される。

References

- [1] H. T. Banks, Representations for solutions of linear functional differential equations, J. Differential Equations, 5(1969), 399-409.
- [2] R. H. Cameron and W. T. Martin, An unsymmetric Fubini theorem, Bull. Amer. Math. Soc. 47(1941), 121-125.
- [3] A. Halanay, Differential Equations Stability, Oscillations, Time Lags, Academic Press, 1966.
- [4] J. K. Hale and J. Kato, Phase space for retarded equations with infinite delay, Funkcialaj Ekvacioj, 21(1978), 11-41.
- [5] J. K. Hale, Retarded equations with infinite delays, Lecture Notes

in Math. vol. 730, Springer, 1979, 157-193.

- [6] J. Kato, Remarks on linear functional differential equations, Funkcialaj Ekvacioj, 12(1969), 89-98.
- [7] J. Kato, 線型函数微分方程式系の基本行列について, 数理研講究録, 38(1968), 79-88.
- [8] T. Naito, On linear autonomous retarded equations with an abstract phase space for infinite delay, J. Differential Equations, 33(1979), 74-91.
- [9], T. Naito, Fundamental matrices of linear autonomous retarded equations with infinite delay, to appear in Tohoku Math. J.
- [10] K. Schumacher, Existence and Continuous dependence for functional-differential equations with unbounded delay, Arch. Ration. Mech. Anal., 67(1977), 315-335.
- [11] L. Schwartz, Cours d'analyse, I, Hermann, Paris, 1967.