

変化点の推定

日本IBM 渋谷政昭
東大 工 柴田義貞

§1. はじめに

時系列データが構造変化を起したとき、その変化時点を知
ることはそれ自体が重要であるばかりでなく、それから有用
な情報が得られることも多い。例えば地震計の自動データ収
集では地震の発生時点決定は重要な問題の一つであり、品質
管理の場では管理図から工程の異常発生時点を知ることによ
り原因追求を効率よく遂行させることができる。本稿ではこ
のような問題を背景に、次のように定式化した問題について
論ずる。

問題 互いに独立な確率変数 X_i ($i=1, \dots, T$) の分布をそれ
ぞれ $F(x, \theta_i)$ とする。 θ_i についてはある τ ($1 \leq \tau \leq T-1$) が
あって

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_\tau < \theta_{\tau+1} = \theta_{\tau+2} = \dots = \theta_T$$

が成り立つものとする。T個のデータ x_1, \dots, x_T から τ を推定せよ。

問題に述べてある τ を変化点 (change-point) とよぶ。このような定式化は地震計の自動データ収集の例については第一近似としても相当粗いものかもしれないが、管理回りの例ではある程度良い近似であると考えられる。

§2. 変化点の推定

τ の推定方法としては種々のものが考えられるが、そのうちのいくつかを以下に示す。

(1) 最尤法

$\theta_L \equiv \theta_1 = \dots = \theta_\tau$, $\theta_R \equiv \theta_{\tau+1} = \dots = \theta_T$ とおき $F(x, \theta_L)$, $F(x, \theta_R)$ の密度関数をそれぞれ $f(x, \theta_L)$, $f(x, \theta_R)$ とする。 $\tau = t$ を与えたときの対数尤度は

$$L(t; \theta_L, \theta_R) = \sum_{i=1}^t \log f(x_i, \theta_L) + \sum_{i=t+1}^T \log f(x_i, \theta_R) \quad (2-1)$$

だから $\theta_L < \theta_R$ の下で (2-1) を最大にする θ_L , θ_R をそれぞれ $\hat{\theta}_L$, $\hat{\theta}_R$ とし, $L(t; \hat{\theta}_L, \hat{\theta}_R)$ ($t=1, \dots, T-1$) を最大にする t を求めれば τ の最尤推定値 $\hat{\tau}$ が得られる。

(2) ベイズ法

(θ_L, θ_R) の事前分布を $h(\theta_L, \theta_R)$, τ の事前分布を $P_r\{\tau=t\} = \pi_t$ とすると τ の事後分布 $g(t) = P_r\{\tau=t | x_1, \dots, x_T\}$ は次式で与えられる。

$$\hat{g}(t) = \frac{\pi_t \int_{\theta_L < \theta_R} \left[\prod_{i=1}^t f(x_i, \theta_L) \prod_{i=t+1}^T f(x_i, \theta_R) \right] h(\theta_L, \theta_R) d\theta_L d\theta_R}{\sum_{j=1}^T \pi_j \int_{\theta_L < \theta_R} \left[\prod_{i=1}^t f(x_i, \theta_L) \prod_{i=t+1}^T f(x_i, \theta_R) \right] h(\theta_L, \theta_R) d\theta_L d\theta_R}$$

での推定値としては $\hat{g}(t)$ のモード, 平均値などが考えられる (平均値の場合には推定値が必ずしも整数とはならない。この場合には得られた値に最も近い整数を推定値とすればよいだろう)。

(3) 重みつき最尤法

θ_L, θ_R を nuisance parameter とみなし, π_t だけに事前分布を入力事後分布の尤度を最大にすることも考えられる。これは (2-1) の L の代わりに

$$\tilde{L}(t; \theta_L, \theta_R) = \sum_{i=1}^t \log f(x_i, \theta_L) + \sum_{i=t+1}^T \log f(x_i, \theta_R) + \log \pi_t$$

$$\pi_i > 0, \quad \sum_{i=1}^T \pi_i = 1$$

を考え, (1) と同様に推定する方法である。

(4) 検定消去法

帰無仮説, 対立仮説を組とした次のような列を二つ作る。

$$H_{0l}^L: \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{l+1} \quad H_{1l}^L: \theta_1 = \dots = \theta_l < \theta_{l+1}, \quad l=1, 2, \dots$$

$$H_{0r}^R: \theta_{r-1} = \theta_r = \dots = \theta_T \quad H_{1r}^R: \theta_{r-1} < \theta_r = \dots = \theta_T, \quad r=T, T-1, \dots$$

H_{0l}^L が棄却される最小の $l = l^*$ と H_{0r}^R が棄却される最大の $r = r^*$ との中央値を \hat{t} の推定値とする。

(5) 曲線適合法

問題で述べたモデルでは θ_i は変化点の前後では一定で、変化点でのみ跳びがあるとしたものであるが、変化点の前後でも θ_i は緩やかに変化し、変化点の近くで急激に変化する(ただし滑らかに)というモデルを想定して、 τ を推定するのがこの方法である。すなわち

$$\theta_i = \frac{\theta_L + \theta_R}{2} + \frac{\theta_R - \theta_L}{2} k\left(\frac{i - \tau}{\sigma}\right), \quad \theta_L < \theta_R$$

として、 τ を推定する。ここに k は $k(0) = 0$, $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} k(s) = \pm 1$ となる滑らかな奇関数であり、 $\sigma > 0$ である。 k の例としては例えば $\tanh s$ が考えられる。

次節では最尤推定値(あるいはこれに類似のもの)を若干の例について求め、その性質を調べる。

§3. 例3.1 $N(-\delta, 1) / N(\delta, 1)$

X_i ($i=1, \dots, \tau$)の分布が $N(-\delta, 1)$, X_i ($i=\tau+1, \dots, T$)の分布が $N(\delta, 1)$ の場合である。 $\delta > 0$ は未知母数である。

$\tau = t$ を与えたときの対数尤度を $L(t; \delta)$ とすると

$$L(t; \delta) = -\frac{1}{2} \left\{ T\delta^2 - 2\delta \left(\sum_{i=t+1}^T x_i - \sum_{i=1}^t x_i \right) \right\} + \text{定数}$$

だから $D(t) = \sum_{i=t+1}^T x_i - \sum_{i=1}^t x_i$ とおくと

$$L(t; \delta) = -\frac{T}{2} \left(\delta - \frac{D(t)}{T} \right)^2 + \frac{D^2(t)}{2T} + \text{定数}$$

となる。 $D(t) > 0$ ならば δ の最尤推定値は $\hat{\delta} = D(t)/T$ である

が、 $D(t) \leq 0$ のときは δ の最尤推定値は存在しない。

I を $D(t) > 0$ となる $t=1, \dots, T-1$ の集合とすると、 $I \neq \emptyset$ ならば $L(t; \delta)$ ($t \in I$) を最大にする δ の値が $\hat{\tau}$ の最尤推定値を与える。 $I = \emptyset$ のときは $\hat{\tau}$ の最尤推定値は存在しない。

$\tilde{\tau}$ を $D(t)$ ($t=1, \dots, T-1$) を最大にする τ の値とする。 $I \neq \emptyset$ ならば $\tilde{\tau} = \hat{\tau}$ である。 $I = \emptyset$ となる確率は $T \rightarrow \infty$ のとき 0 となるから、以下では $\tilde{\tau}$ の性質を調べる。

Y_i ($i=1, \dots, T$) を互いに独立に $N(0, 1)$ に従う確率変数 y_i を Y_i の実現値とすると

$$D(t) = (y_{t+1} + \dots + y_T) - (y_1 + \dots + y_t) + (T-2|t-1)\delta$$

したがって $D(1), \dots, D(T-1)$ の同時分布は

$$E\{D(t)\} = (T-2|t-1)\delta, \quad t=1, \dots, T-1$$

$$\text{Cov}\{D(s), D(t)\} = T-2|s-t|, \quad s, t=1, \dots, T-1$$

となる $T-1$ 変量正規分布である。 $s < t$ とすると

$$D(s) - D(t) = 2(x_{s+1} + \dots + x_t) \quad (3-1)$$

だから $\tilde{\tau}$ の分布は、 φ を $N(0, 1)$ の密度関数とするとき、適当な多面体上で $\prod_{i=1}^T \varphi(y_i)$ を積分することにより得られる。例

えば $T=4$ のとき、 $P_{ij} = \text{Pr}\{\tilde{\tau}=j \mid \tau=i\}$ とすると

$$P_{11} = P_{33} = \int_0^{\infty} \Phi(x+\delta) \varphi(x-\delta) dx = \frac{1}{2} \{\Phi(\sqrt{2}\delta) + \Phi^2(\delta)\}$$

$$P_{13} = P_{31} = \int_0^{\infty} \Phi(x-\delta) \varphi(x+\delta) dx = \frac{1}{2} \{\Phi(-\sqrt{2}\delta) + \Phi^2(-\delta)\}$$

$$P_{12} = P_{32} = \Phi(-\delta) \Phi(\delta)$$

$$P_{21} = P_{23} = \frac{1}{2} \{1 - \Phi^2(\delta)\}$$

$$P_{22} = \Phi^2(\delta)$$

である。ここに Φ は $N(0,1)$ の分布関数である。図1は P_{ij} を図示したものである。 $T \geq 5$ のときはその分布を簡単な形で表現することはできないが、正しく推定する確率 $P_{\tau\tau}$ については次のような結果を得る。

問題から $P_{\tau\tau} = P_{T-\tau T-\tau}$ は明らかであるから $1 \leq \tau \leq [\frac{T}{2}]$ としてよい。 X_i の分布の連続性と (3-1) より、 $\tau \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} P_{\tau\tau} &= \Pr \{X_2 + \dots + X_\tau \leq 0, X_3 + \dots + X_\tau \leq 0, \dots, X_\tau \leq 0, X_{\tau+1} \geq 0, \\ &\quad X_{\tau+1} + X_{\tau+2} \geq 0, \dots, X_{\tau+1} + \dots + X_{T-1} \geq 0\} \\ &= \Pr \{X_2 + \dots + X_\tau \leq 0, \dots, X_\tau \leq 0\} \Pr \{X_{\tau+1} \geq 0, \dots, X_{\tau+1} + \dots + X_{T-1} \geq 0\} \end{aligned} \quad (3-2)$$

$\tau=1$ のときは $P_{11} = \Pr \{X_2 \geq 0, X_2 + X_3 \geq 0, \dots, X_2 + \dots + X_{T-1} \geq 0\}$ であるから $\tau=1$ のとき (3-2) の右辺第1項を1と約束すれば、 $1 \leq \tau \leq [\frac{T}{2}]$ について (3-2) が成り立つ。 X_i ($i=1, \dots, \tau$), $-X_i$ ($i=\tau+1, \dots, T$) の分布は $N(-\delta, 1)$ であるから、 Z_i ($i=1, 2, \dots$) を $N(-\delta, 1)$ に従う互いに独立な確率変数、 $S_k = \sum_{i=1}^k Z_i$, $C_k = \Pr \{S_1 \leq 0, S_2 \leq 0, \dots, S_k \leq 0\}$, $C_0 = 1$ とすると (3-2) より

$$P_{\tau\tau} = C_{\tau-1} C_{T-\tau-1} \quad (3-3)$$

を得る。

$$L(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k$$

とおく、Feller (An Introduction to Probability Theory and its Applications vol.2) 12章7節の定理4より

$$\log c(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \Pr\{S_k \leq 0\}$$

が成り立つ。 S_k の分布は $N(-k\delta, k)$ だから

$$\log c(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \Phi(\sqrt{k}\delta) \quad (3-4)$$

(3-4) の両辺を z で微分して z^k の係数を比較することにより

$$C_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} C_j \Phi(\sqrt{k-j}\delta) \quad (3-5)$$

を得る。 $C_0 = 1$ と (3-5) から C_k ($k=1, 2, \dots$) が定まる。これを

(3-3) に代入して $P_{\tau\tau}$ を計算しやすいう形で表わすことができる。

例として C_k の最初の3項を示すと次のようになる。

$$C_1 = \Phi(\delta)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \Phi(\sqrt{2}\delta) + \frac{1}{2} \Phi^2(\delta)$$

$$C_3 = \frac{1}{3} \Phi(\sqrt{3}\delta) + \frac{1}{2} \Phi(\sqrt{2}\delta)\Phi(\delta) + \frac{1}{6} \Phi^2(\delta)$$

図2に $T=10$ の場合について $P_{\tau\tau}$ ($1 \leq \tau \leq 5$) を示す。図2から次の命題が予想される。

この命題が予想される。

命題 任意に T, δ を定めると $P_{\tau\tau}$ は $1 \leq \tau \leq \lfloor \frac{T}{2} \rfloor$ で τ について単調減少である。

この命題は研究集会で conjecture として出したものであるが、最近これを含む一般的な形での証明を得た。

$P_{\tau\tau} \geq P_{\tau+1, \tau+1}$ を示すには (3-3) より $\{C_k\}$ が対数凸であること、すなわち $\{C_{k+1}/C_k\}$ が増加列であることを示せば十分で

ある。 $\{C_k\}$ の対数凸性については一般の場合の証明は省略するが、 $\delta=0$ の場合には次のように簡単に示すことができる。

$\bar{\pi}(0) = \frac{1}{2}$ だから (3-5) より $C_k = \sum_{j=0}^{k-1} C_j / 2^k$, したがって

$$\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{2k+1}{2(k+1)} = 1 - \frac{1}{2(k+1)},$$

これは $\{C_{k+1}/C_k\}$ が増加列であること、すなわち $\{C_k\}$ の対数凸性を示す。

注：証明からも明らかのように、 $\delta=0$ の場合 $\{C_k\}$ の対数凸性を示すのに X_i の分布が正規分布であることは本質的ではない。原点に関して対称な連続分布であればよい。($\delta=0$ の場合も含めて一般に密度関数の対数凹性の仮定だけで $\{C_k\}$ の対数凸性を証明できる。)

図1を見ると $\tau=2$ のとき、 δ が小さくなる ($\delta < \bar{\pi}^{-1}(\frac{1}{3})$) と正しく推定する確率が誤って推定する確率よりも小さくなるという不都合が起っている。これを避ける一つの方法は前節の(3)で述べた重みつき最尤法で推定することである。 $\delta=0$ のとき π_i の分布が一様になるように重み π_i を定めればよい。しかし一般に π_i を正確に定めることは難しい。

$T \geq 5$ の場合 π_i の分布を簡単な形で表わすことができないうのでシミュレーションによって分布の様子を調べた。シミュレーション回数は1000である。シミュレーションがうまくいっているかどうかチェックするために $T=4$ の場合につい

て理論値と比較したが、シミュレーション結果と理論値との整合が確認された。図3, 図4に $T=10$ の場合の $\tilde{\tau}$ の分布を示す。(対称性から $1 \leq \tilde{\tau} \leq 5$ についてだけ示す。) 図3を見ると δ が小的时候 (図には $\delta=0.1$ の場合を示したが, 他の結果を調べると δ が 0.2 以下のときは $\tilde{\tau}=1$ となる確率が他に比較してかなり大きいことがわかる。 $T=20, 30$ の場合についても同様の実験を行なったが, 分布の様子は $T=10$ の場合と同様なので省略する。図5, 図6に $\tilde{\tau}$ の標準偏差およびそれをデータ数で規準化したものを載せた。

$T=10$ の場合に $I=\emptyset$, すなわち最尤推定値が存在しない確率を推定すると, $\delta=0$ の場合約 0.05 , $\delta=0.1$ のとき約 0.01 , $\delta \geq 0.2$ では 0 , となり両端ほどその確率が大きくなることが認められた。

3.2 $N(\mu-\delta, 1)/N(\mu+\delta, 1)$

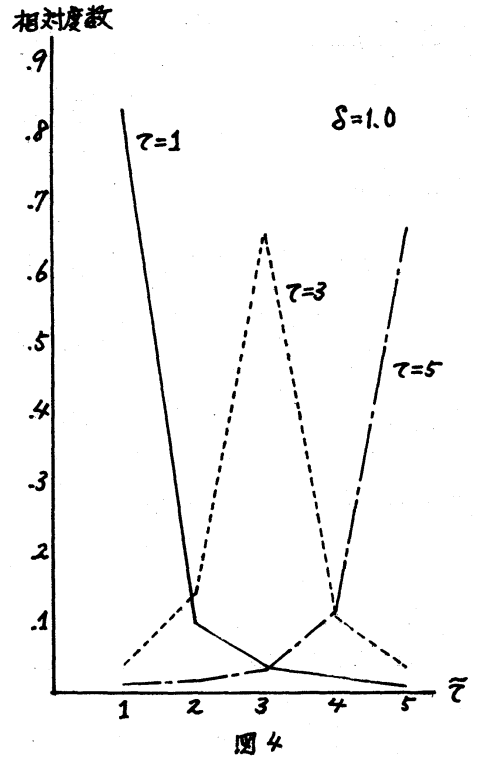
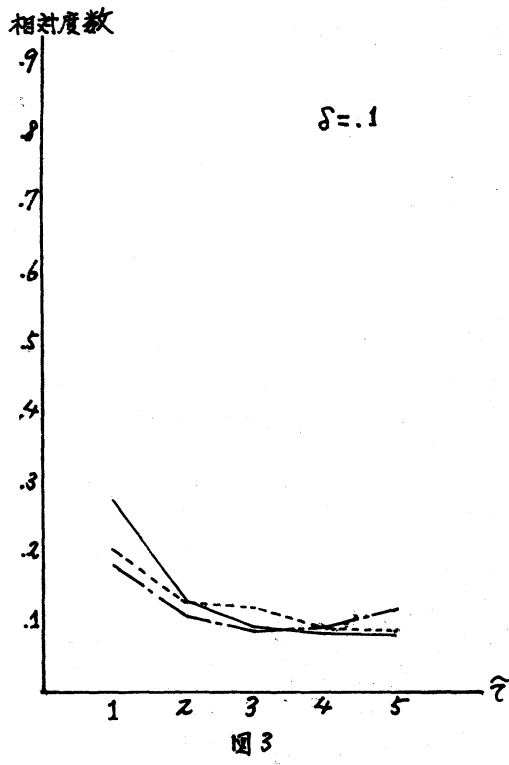
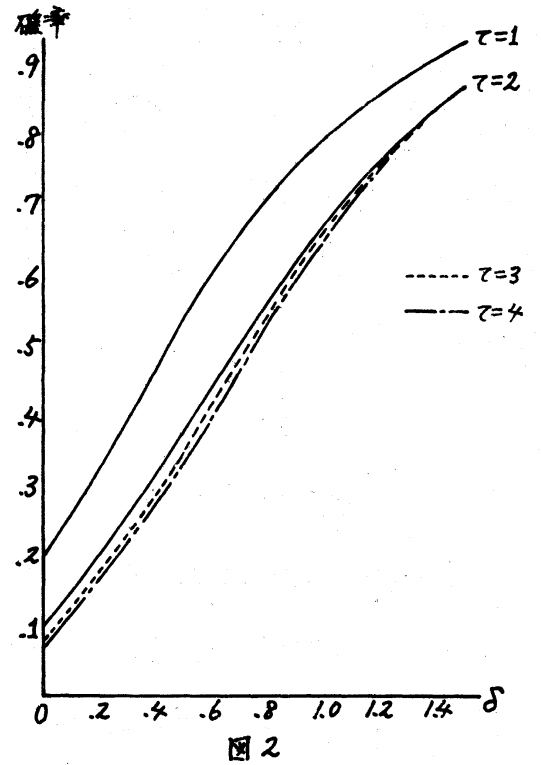
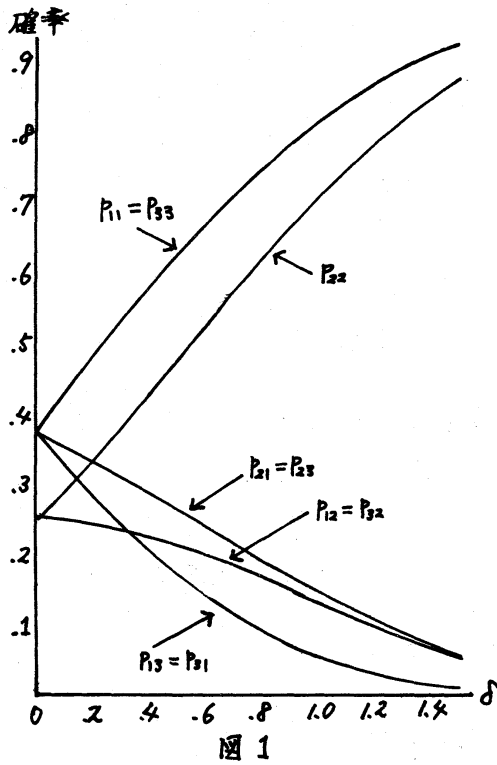
$X_i (i=1, \dots, t)$ の分布が $N(\mu-\delta, 1)$, $X_i (i=t+1, \dots, T)$ の分布が $N(\mu+\delta, 1)$ の場合である。 $\delta > 0$, μ は未知母数である。

$\mu_L = \mu - \delta$, $\mu_R = \mu + \delta$ とすると $\mu_L < \mu_R$, $\delta = \frac{1}{2}(\mu_R - \mu_L)$,

$\mu = \frac{1}{2}(\mu_R + \mu_L)$ である。対数尤度は

$$L(t; \mu_L, \mu_R) = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^t (x_i - \mu_L)^2 + \sum_{i=t+1}^T (x_i - \mu_R)^2 \right\} + \text{定数}$$

であり, $\hat{\mu}_L = \frac{\sum_{i=1}^t x_i}{t}$, $\hat{\mu}_R = \frac{\sum_{i=t+1}^T x_i}{T-t}$ は μ_L, μ_R に条件をつけないときの最尤推定値である。 $I = \{t \mid 1 \leq t \leq T-1, \hat{\mu}_L < \hat{\mu}_R\}$ が



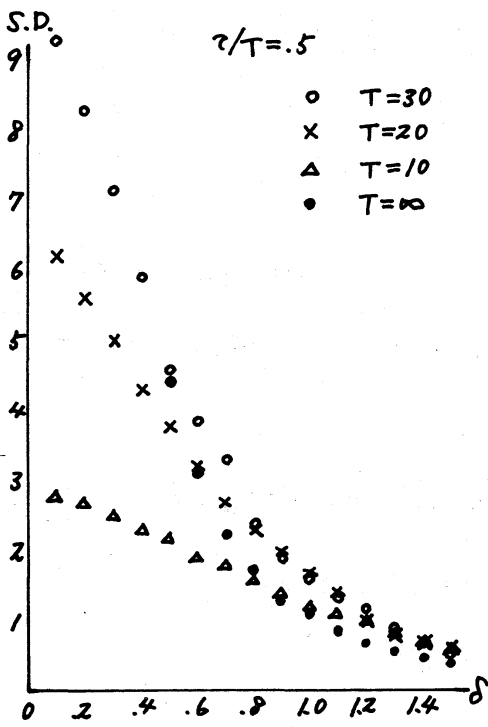


圖 5

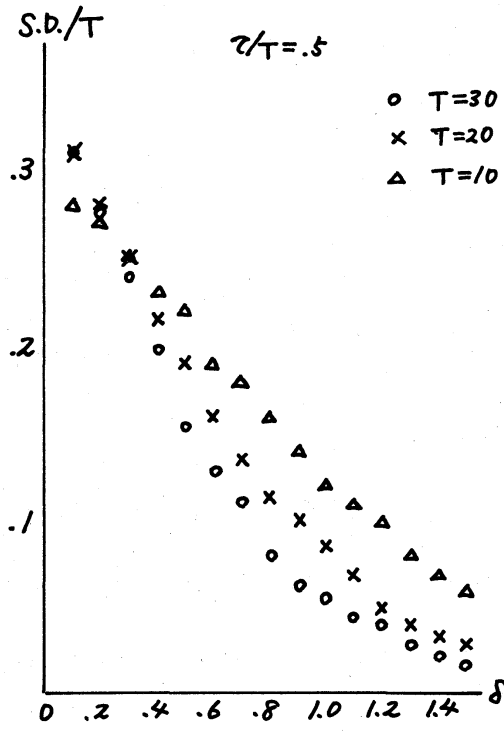
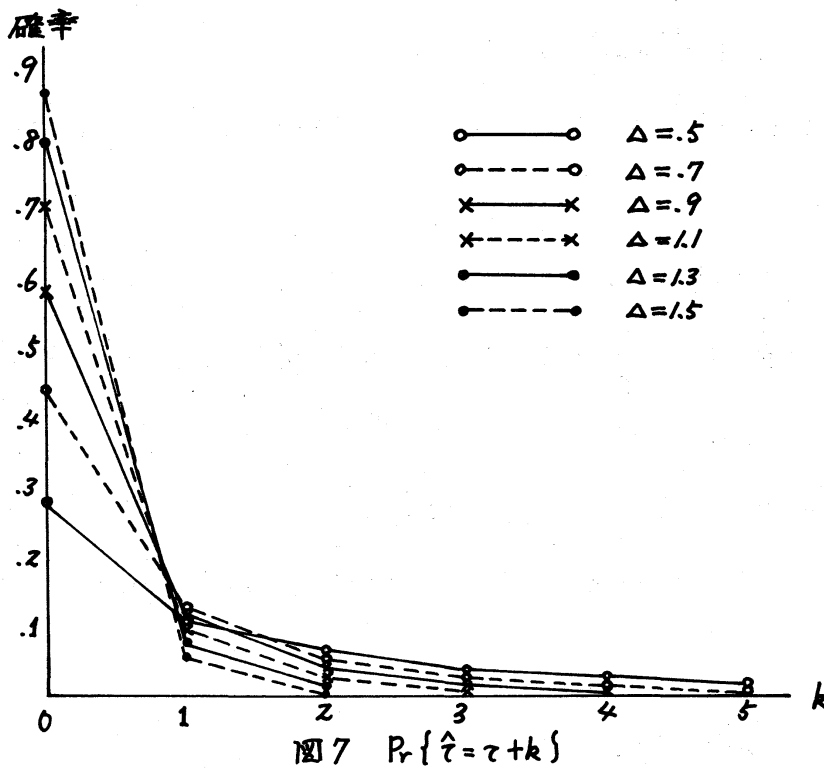


圖 6



空でなければ $L(t; \hat{\mu}_L, \hat{\mu}_R)$ ($t \in I$) を最大にする t がその最尤推定値である。 $I = \emptyset$ ならば最尤推定値は存在しない。

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^T x_i / T \text{ とすると}$$

$$\sum_{i=1}^t (x_i - \hat{\mu}_L)^2 + \sum_{i=t+1}^T (x_i - \hat{\mu}_R)^2 = \sum_{i=1}^T (x_i - \bar{x})^2 - t(\bar{x} - \hat{\mu}_L)^2 - (T-t)(\bar{x} - \hat{\mu}_R)^2$$

$$\bar{x} - \hat{\mu}_L = (T-t)(\hat{\mu}_R - \hat{\mu}_L) / T, \quad \bar{x} - \hat{\mu}_R = t(\hat{\mu}_L - \hat{\mu}_R) / T$$

だから

$$L(t; \hat{\mu}_L, \hat{\mu}_R) = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^T (x_i - \bar{x})^2 - t(T-t) \frac{(\hat{\mu}_R - \hat{\mu}_L)^2}{T} \right\}$$

したがって $L(t; \hat{\mu}_L, \hat{\mu}_R)$ を最大にする t は

$$S(t) = t(T-t) \frac{(\hat{\mu}_R - \hat{\mu}_L)^2}{T}$$

を最大にする t である。 $S(t)$ の分布は自由度 $T-2$ の非心カイ 2乗分布で、その非心度は

$$4(T-t)(t-t)\delta^2 / (T-t) \quad (t \leq t), \quad 4t(t-t)\delta^2 / t \quad (t > t)$$

である。

t を $S(t)$ ($t=1, \dots, T-1$) を最大にする t とすると、その分布は $S(t)$ の形から $\prod_{i=1}^T \varphi(x_i)$ の適当な四面体上での積分として得られることはわかるが、その具体的な形を求めることは $T=4$ のときでも難しい。この場合についても前例と同様のシミュレーションを行なう。だが、結果は前例と類似のものなので省略する。

3.3 $U(0,1)/U(0,\theta)$

X_i ($i=1, \dots, t$) の分布が $(0,1)$ 上の一様分布, X_i ($i=t+1, \dots, T$)

の分布が $(0, \theta)$ 上の一様分布の場合である。 $\theta > 1$ は未知母数である。

$\max\{x_1, \dots, x_T\} \leq 1$ ならば $\theta > 1$ の最尤推定値は存在しないから、 τ の最尤推定値も存在しない。 $\max\{x_1, \dots, x_T\} > 1$ のとき、 $x_i > 1$ となる最小の i を i^* とすると、 $\tau = t$ を与えたときの尤度は

$$L^*(t; \theta) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{T-t} & t \leq i^* - 1, \max\{x_1, \dots, x_T\} \leq \theta \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

となる。したがって $\hat{\theta} = \max\{x_1, \dots, x_T\}$, $\hat{\tau} = i^* - 1$ を得る。最尤推定値が存在しない確率は $(1/\theta)^{T-\tau}$ であり、 $\max\{x_1, \dots, x_T\} > 1$ を与えたときの $\hat{\tau}$ の条件付分布は

$$P_r\{\hat{\tau} = \tau + k \mid \tau, \max\{x_1, \dots, x_T\} > 1\} = \frac{\left(\frac{1}{\theta}\right)^k \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)}{1 - \left(\frac{1}{\theta}\right)^{T-\tau}}, \quad k=0, 1, \dots, T-\tau-1$$

で与えられる。

§4. 最尤推定量の漸近分布

θ_L, θ_R が既知の場合、最尤推定量を求める問題を次のようなランダム・ウォークの問題に帰着させることができる。以下 Hinkley (1970) に沿ってその概略を説明する。

(2-1) を次のように変形する。

$$L(t) \equiv L(t; \theta_L, \theta_R) = \sum_{i=1}^t \log \left(\frac{f(x_i, \theta_L)}{f(x_i, \theta_R)} \right) + \sum_{i=1}^T \log f(x_i, \theta_R)$$

$L(t)$ が最大となるのは

$$\sum_{i=1}^T U_i, \quad U_i = \log(f(X_i, \theta_L) / f(X_i, \theta_R))$$

が最大となるときである。そこで、 τ 前と τ 後の二つの独立なランダム・ウォークを

$$Y_j = -U_{\tau-j+1}, \quad Y'_j = U_{\tau+j}, \quad j=1, 2, \dots$$

$$W = \left\{ 0, Y_1, Y_1 + Y_2, \dots, \sum_{j=1}^{\tau-1} Y_j \right\}$$

$$W' = \left\{ 0, Y'_1, Y'_1 + Y'_2, \dots, \sum_{j=1}^{\tau-1} Y'_j \right\}$$

により定義し、 W, W' の最大値をそれぞれ M, M' とすると

$$\hat{\tau} = \tau \iff M=0 \text{ かつ } M'=0$$

であるし、最大値 M, M' の生じた時点をも I, I' とする ($M = \sum_{j=1}^I Y_j$, $M' = \sum_{j=1}^{I'} Y'_j$) と

$$\hat{\tau} = \tau + k \iff I' = k, M' > M, M' > 0$$

$$\hat{\tau} = \tau - k \iff I = k, M > M', M > 0$$

となる。 $k=0, 1, \dots, x \geq 0$ に対して次の確率分布を定義すると

$$\beta_k(x) dx = \Pr\{I=k, x \leq M < x+dx\}, \quad \beta'_k(x) dx = \Pr\{I'=k, x \leq M' < x+dx\}$$

$$\alpha(x) = \Pr\{M \leq x\}, \quad \alpha'(x) = \Pr\{M' \leq x\}$$

$\hat{\tau}$ の分布は

$$\Pr\{\hat{\tau} = \tau + k\} = \int_0^{\infty} \beta'_k(x) \alpha(x) dx \quad (k=0, 1, \dots) \quad (4-1)$$

$$\Pr\{\hat{\tau} = \tau - k\} = \int_0^{\infty} \beta_k(x) \alpha'(x) dx \quad (k=0, 1, \dots)$$

と表わされる。 $\alpha, \alpha', \beta_k, \beta'_k$ は積分方程式を満足する。例えば Y_j の密度関数を g とすると

$$\alpha(x) = \int_0^{\infty} \alpha(y) g(x-y) dy$$

が成り立つ。しかし一般にこれらの積分方程式の解を具体的な形で求めることはできない。

ランダム・ウォークの一般論により

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P_r \left\{ \sum_{j=1}^n Y_j' > 0 \right\} < \infty$$

ならば

$$\begin{aligned} E \{ z^{I'} e^{-\omega M'} \} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} e^{-\omega x} \beta_n'(x) dx \\ &= \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n C_n'(\omega)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n'(0)}{n} \right\} \quad (4-2) \end{aligned}$$

を得る。こゝに $C_n'(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\omega x} P_r \left\{ x \leq \sum_{j=1}^n Y_j' < x+dx \right\} (n=1, 2, \dots)$,

$|z| \leq 1$, $\text{Re}(\omega) > 0$ である。I, M についても同様である。

(4-2) で $\omega \rightarrow 0$ とし次式を得る。

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k P_r \{ I' = k \} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^n - 1) C_n'(0)}{n} \right\} \quad (|z| \leq 1) \quad (4-3)$$

$P_r \{ \hat{c} = \tau + k \}$ を求めるために (4-1) を次のように変形する。

$$P_r \{ \hat{c} = \tau + k \} = \int_0^{\infty} \beta_k'(x) dx - \int_0^{\infty} \beta_k'(x) \{ 1 - d(x) \} dx \quad (4-4)$$

これより $P_r \{ \hat{c} = \tau + k \}$ の母関数が得られる。

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k P_r \{ \hat{c} = \tau + k \} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_r \{ I' = k \} - \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \beta_k'(x) \{ 1 - d(x) \} dx \quad (4-5)$$

$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \beta_k'(x)$, $1 - d(x)$ は可積分だから Parseval の等式と (4-2) (お

よび I, M のこれに対応する式) から (4-5) の右辺第 2 項が未

まり, (4-3) 式を使, て母関数を計算することが原理的には

可能となる。しかし具体的な計算は困難なので次のような近

似によ, て $P_r \{ \hat{c} = \tau + k \}$ の近似解を求める。

$$1 - d(x) = \sum_{r=1}^R a_r e^{-\omega_r x} \quad (x \geq 0)$$

として(4-4)に代入すると

$$Pr\{\hat{\tau} = \tau + k\} = g'_k - \sum_{r=1}^R a_r \tilde{\beta}'_k(\omega_r) \quad (k=0, 1, \dots) \quad (4-6)$$

$$g'_k = \int_0^{\infty} \beta'_k(x) dx = Pr\{I' = k\}, \quad \tilde{\beta}'_k(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\omega x} \beta'_k(x) dx$$

を得る。ところで(4-2), (4-3)により g'_k , $\tilde{\beta}'_k(\omega)$ はともに

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n z^n = A \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n \sigma_n}{n}\right)$$

の形の方程式を満足する。この方程式の解は次の漸化式を満足するから(4-6)により $Pr\{\hat{\tau} = \tau + k\}$ の近似値を具体的に計算することが可能となる。

$$\rho_0 = A$$

$$\rho_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \sigma_{n+1-j} \rho_j \quad (n=0, 1, \dots)$$

Hinkley は正規分布の場合にこの近似を使て、 $\tau \rightarrow \infty$, $T - \tau \rightarrow \infty$ での $\hat{\tau}$ の漸近分布を求めている(図7)。(図5にその標準偏差を示した。) これは3.1 で δ を既知とした場合に相当し、図中の Δ は δ と同じものである。彼はまた3.2 の例についても上と同様の議論ができることを示している。

$\tau \rightarrow \infty$, $T - \tau \rightarrow \infty$ のとき最尤推定量の分散有限の漸近分布が存在するといふことは次のような意味をもっている。単位時間 $[0, 1]$ を T 等分する時点で観測し、 $T \rightarrow \infty$ により観測数を増すことができるとする、時間を単位とする $\hat{\tau}$ の標準偏差は $1/T$ の速度で小さくでき、推定精度は非常に良くなる。 Δ がある程度大きければこの議論に問題はなしか、 Δ

が小さいときどうなるかは未だ明らかでない。

§5. あとがき

研究集会のあと、文献を探索したところ、変化点の検定だけでなく推定に関してもいくつかの論文があることを知った。

問題を最初に述べているのは Quandt (1958) のようで、回帰直線の変化問題

$$y_t = \alpha_i + \beta_i x_t + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_i^2)$$

$$i = \begin{cases} 1 & 1 \leq t \leq \tau \\ 2 & \tau+1 \leq t \leq T \end{cases}$$

において変化点 τ およびすべての母数を最尤法で求めることを提案している。しかし提案だけであり、その後の論文では検定問題の方に傾いている。

まともに変化点推定を扱ったのは Hinkley である。前節で紹介した漸近分布一般および正規分布の場合の計算と共に、Hinkley and Hinkley (1970) では 2 点分布の場合を扱っている。その後、変化点推定については Broemling (1974), Smith (1975), Holbert and Broemling (1977) がベイズ推定を提案しているが推定量の形を示しているに過ぎない。Cobb (1978) は条件付推測の見地からある種のベイズ推定量が導かれることを示している。

変化点推定と関連して興味があるのは変化のある系列で最

終状況の母数を推定するという問題である。これは迎撃ミサイルが目標物を追跡するというキナ臭い問題から発生したのである。Chernoff and Zacks (1964), Kander and Zacks (1966) がバイズ推定についてかなり詳しく論じている。

回帰の変化については比較的文献が多く、特に検定問題が詳しく議論されているが省略する。

参考文献

- [1] Broemeling, L. D. (1974) *Commun. Statist.* 3 243-255.
- [2] Chernoff, H. and Zacks, S. (1964) *AMS* 35 999-1018.
- [3] Cobb, G. W. (1978) *Biometrika* 65 243-251.
- [4] Hinkley, D. V. (1970) *Biometrika* 57 1-17.
- [5] Hinkley, D. V. and Hinkley, E. A. (1970) *Biometrika* 57 477-488.
- [6] Hinkley, D. V. (1971) *JASA* 66 736-743.
- [7] Holbert, D. and Broemeling, L. D. (1977) *Commun. Statist.* A6 265-275.
- [8] Kander, Z. and Zacks, S. (1966) *AMS* 37 1196-1210.
- [9] Smith, A. F. M. (1975) *Biometrika* 62 407-416.
- [10] Quandt, R. E. (1958) *JASA* 53 873-880.