

Robust Regression and Interpolation for Time Series

広島大学工学部 谷口正信

1. Introduction. ここでは spectral density が vaguely known である場合の regression と interpolation 問題を考える。即ち interpolation においては、関与してゐる stationary process の spectral density の class $\mathcal{S} = \{g; g(\omega) = (1-\varepsilon)f(\omega) + \varepsilon h(\omega), 0 < \varepsilon < 1\}$ に属すると仮定する。ただし $f(\omega)$ は known to spectral density, $h(\omega)$ は unknown to spectral density で適当な class \mathcal{L} に属する。この時 class \mathcal{S} に関して min-max robust な interpolator を構成する。一方時系列の回帰 model で、残差 spectral density $g(\omega)$ が \mathcal{S} に属する場合、回帰係数の \mathcal{S} に対して min-max robust な推定量を構成する。

2. Interpolation and Regression. 以下の interpolation について考える。今 $\{X(t); t = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ を平均 0, spectral density $g(\omega)$ をもつ定常過程とする。そして

$\mathcal{D} = \{g; g(x) = g(-x), g(x) > 0, g(x) \text{ は } [-\pi, \pi] \text{ 上で連続 (かも区分的になめらか)}\}$ と定義する。ここで $X(0) \in X(j)$ $j \neq 0$ の線形結合で近似する。つまり次の型の問題になる。

$$\text{Min}_{\{a_j\}} E \left| X(0) - \sum_{j \neq 0} a_j X(j) \right|^2 = \text{Min}_{h(x)} \int_{-\pi}^{\pi} |1 - h(x)|^2 g(x) dx,$$

ただし $h(x)$ は e^{ijx} ; $j \neq 0$ で生成される closed linear manifold に属する。このとき次の定理を得る。

Theorem 1. $\{X(t)\}$ の真の spectral density が $g(x) \in \mathcal{D}$ であるにもかかわらず, interpolator \in pseudo spectral density $\phi(x) \in \mathcal{D}$ から構成すれば, その response function は

$$1 - \phi(x)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} dx \right)^{-1} \text{ で与えられる。}$$

またこのときの interpolation error は

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} dx \right\}^{-2} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(x)}{\phi(x)^2} dx \right\} \text{ で与えられる。}$$

次に回帰について考える。

$$y(t) = \alpha z(t) + u(t),$$

ただし α は unknown parameter, $z(t)$ は known な 逐次関数 で次の条件をみたす。

$$i) \quad \sum_{t=0}^{T-1} |z(t)|^2 \rightarrow \infty \text{ as } T \rightarrow \infty,$$

$$ii) \quad \max_{0 \leq t \leq T-1} |z(t)| / \left(\sum_{t=0}^{T-1} |z(t)|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0, \text{ as } T \rightarrow \infty,$$

$$iii) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=0}^{T-1} z(t+s)z(t)}{\sum_{t=0}^{T-1} |z(t)|^2} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{isx} R(dx).$$

また $u(t)$ は stationary process で平均 0, spectral density $g(x)$ をもつとする。今 $\psi(x)$ を

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixt} \overline{\psi(x)} dx = z(t), \quad 0 \leq t \leq T-1,$$

の解であるとする。

$$y(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixt} z_y(dx), \quad z_y(dx) = d\overline{\psi(x)} dx + z_u(dx),$$

と表わせる。ただし $u(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixt} z_u(dx)$ 。今 $\phi \in \mathcal{L}$

に対して
$$\hat{\alpha} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} |\psi(x)|^2 dx \right]^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} \psi(x) z_y(dx)$$

とおくとこれは本質的には Rozanov 型 推定量であることがわかる。そして次の定理は Rozanov による。

Theorem 2. (Rozanov (1969)). $D_T(\hat{\alpha} - \alpha)$ の漸近的分散は

$$V(\phi, g) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} R(dx) \right)^{-2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(x)}{\phi(x)^2} R(dx) / 2\pi$$

で与えられる。ただし $D_T = \sqrt{\sum_{t=0}^{T-1} |z(t)|^2}$. ▲

3. Robust Interpolation and Regression. 前章で見た様に interpolation も regression の場合も $V(\phi, g)$ 型の criterion で表わされるので以後 $V(\phi, g)$ の behavior を見る。しばらくの間 $R(dx) = r(x)dx$, $r(x) > 0$ である場合

を考える。

$$\mathcal{D}_0 \equiv \left\{ c(x) \in \mathcal{D} ; \int_{-\pi}^{\pi} \frac{c(x)}{r(x)} dx = 1 \right\}$$

$$\mathcal{S} \equiv \left\{ g(x) ; g(x) = (1-\varepsilon)f(x) + \varepsilon h(x) \right\},$$

$$h(x) \in \mathcal{D}_0, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad \text{と置く.}$$

もし $f(x)$ は known で $f(x) \in \mathcal{D}_0$. 次は ある $m > 0$ に対して $E_m \equiv \{ x \in [-\pi, \pi] ; m \geq (1-\varepsilon)f(x)/r(x) \}$,

$$F_m \equiv \{ x \in [-\pi, \pi] ; m < (1-\varepsilon)f(x)/r(x) \} \text{ とおくと}$$

Hosoya (1978) の Lemma 1 と同様にして次を得る。

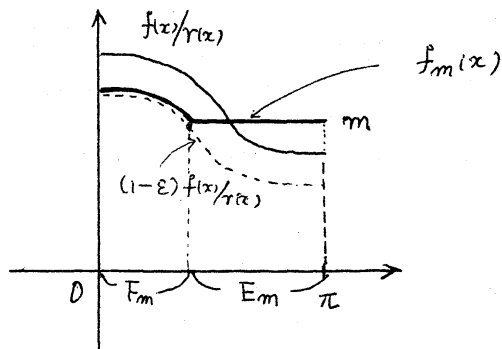
Lemma 1. ある正数 m が一意に存在して

$$(1-\varepsilon) \int_{F_m} f(x)/r(x) dx + \int_{E_m} m dx = 1$$

をみる。

$$\text{そこで } f_m(x) = \begin{cases} (1-\varepsilon)f(x) & , x \in F_m \\ m r(x) & , x \in E_m \end{cases}$$

と定義すれば, Lemma 1 は $f_m \in \mathcal{D}_0$ を意味する。



左図は以上の事の直観的な説明である。

そこで我々は次の定理を得る。

Theorem 3. $V(\phi, g)$ は saddle point $\exists \phi \rightarrow$. i.e.,

$$\max_{g \in \mathcal{S}} V(\phi_0, g) = V(\phi_0, g_0) = \min_{\phi \in \mathcal{D}_0} V(\phi, g_0),$$

ただし $\phi_0 = g_0 = \phi f_m$. △

この定理の意味することは $\min_{\phi} \max_g V(\phi, g) = \max_g V(\phi_0, g)$

であり, よって min-max robust な 回帰係数推定量 および interpolating response function はそれぞれ

$$(1) \hat{\alpha} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} f_m(x)^{-1} |\psi(x)|^2 dx \right]^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f_m(x)^{-1} \psi(x) z_y(dx),$$

$$(2) 1 - f_m^{-1}(x) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_m(x)^{-1} dx \right)^{-1}$$

で与えられる。ただし (2) の interpolating response function

は $r(x) = 1$ とし計算された $f_m(x)$ を用いねばならない。

の時系列回帰の場合 regression spectrum が g 個の

jumpo から成るとき; $R(x) = \sum_{x_j \leq x} \Delta R(x_j)$, $j=1, \dots, g$

が重要である。ここで次の様に定義する。

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ c(x) \in \mathcal{D} ; \sum_{j=1}^g c(x_j) \Delta R(x_j)^{-1} = 1 \right\}.$$

ある $l > 0$ に対して

$$E_l = \left\{ x_j ; l \geq (1-\varepsilon) f(x_j) / \Delta R(x_j) \right\},$$

$$F_l = \left\{ x_j ; l < (1-\varepsilon) f(x_j) / \Delta R(x_j) \right\}, \text{ と定義する.}$$

このとき Lemma 1 と同様にして次の補題を得る。

Lemma 1. ある正数 $l > 0$ が一意に存在して

$$(1 - \varepsilon) \sum_{j \in F_l} f(x_j) / \Delta R(j) + l \cdot N(E_l) = 1,$$

ただし $N(E_l)$ は x_j で E_l に属するものの個数. \triangleleft

ところで jump ε $R(x)$ が持つ場合の criterion は,

$$V_1(\phi, g) = \left(\sum_j \phi(x_j)^{-1} \Delta R(j) \right)^{-2} \left(\sum_j \frac{g(x_j)}{\phi(x_j)^2} \Delta R(j) \right)$$

となる。今 $\equiv \equiv \equiv$

$$S_1 = \left\{ g \in \mathcal{D}_1 ; g(x) = (1 - \varepsilon)f(x) + \varepsilon h(x), h(x) \in \mathcal{D}_1, 0 < \varepsilon < 1 \right\},$$

$$f_l(x_j) = \begin{cases} (1 - \varepsilon)f(x_j), & x_j \in F_l \\ l \Delta R(j), & x_j \in E_l, \quad j = 1, \dots, J. \end{cases}$$

とかけば Theorem 3 と同様にして次の定理を得る。

Theorem 3'. $V_1(\phi, g)$ は saddle point ε 持つ。i.e.,

$$\text{Max}_{g \in S_1} V_1(\phi_0, g) = V_1(\phi_0, g_0) = \text{Min}_{\phi \in \mathcal{D}_1} V_1(\phi, g_0),$$

ただし $\phi_0 = g_0 = f_l$. \triangleleft

よって min-max robust な 回帰係数の推定量は次で与えられる。

$$\hat{\alpha} = \left[\sum_j f_l(x_j)^{-1} |\psi(x_j)|^2 \right]^{-1} \cdot \sum_j f_l(x_j)^{-1} \psi(x_j) \left(\frac{1}{2\pi} \right) \sum_{t=0}^{T-1} y(t) e^{i t x_j}.$$

4. Multiple Robust Regression. 回帰函数が多次の場合を考える。即ち

$$y(t) = \alpha_1 z_1(t) + \dots + \alpha_p z_p(t) + u(t),$$

ただし $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)'$ は未知 vector, $z(t) = (z_1(t), \dots, z_p(t))'$ は次の i) - iii) をみたす known な回帰函数,

$$i) \sum_{t=0}^{T-1} |z_j(t)|^2 \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$ii) \lim_{T \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq T-1} |z_j(t)| / \left(\sum_{t=0}^{T-1} |z_j(t)|^2 \right)^{1/2} = 0, \\ j = 1, \dots, p,$$

$$iii) \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} z_p(t+s) z_j(t) \right\} / \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} |z_p(t)|^2 \cdot \sum_{t=0}^{T-1} |z_j(t)|^2 \right\}^{1/2} = R_{kj}(s)$$

$$R(s) = \{ R_{kj}(s) \} \quad p \times p \text{-matrix.} \quad \triangle$$

このとき $R(s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{isx} \underline{R}(dx)$ の表現が可能である。

$$\text{今} \quad \underline{\psi}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=0}^{T-1} z(s) e^{-isx} \quad \text{と置く。}$$

α の推定量として

$$\hat{\alpha} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} \underline{\psi}(x) \underline{\psi}(x)^* dx \right]^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} \underline{\psi}(x) z_y(dx)$$

を考えると $\hat{\alpha}$ の asymptotic covariance matrix は

$$V(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} \underline{R}(dx) \right)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(x)}{\phi(x)^2} \underline{R}(dx) \right) \\ \times \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} \underline{R}(dx) \right)^{-1}$$

と表はれる。

この場合の難点は $R(x)$ がすべての周波 $x = \omega$ に 一般に 同時対角化できないことにある。この場合 $R(\cdot)$ の spectrum elements が points からなる場合を考えると spectrum element 上の jumps はある unitary 行列で対角化される。よってこの様な場合は成分ごとく Theorem 3' の議論を apply してやればよい。

Example. 回帰 model として次を考える。

$$y(t) = \alpha_1 z_1(t) + \alpha_2 z_2(t) + u(t),$$

$$\text{ただし } z_1(t) = \cos \theta_1 t + \cos \theta_2 t, \quad z_2(t) = \sin \theta_1 t + \sin \theta_2 t,$$

$$\theta_j = \frac{2\pi j}{T} \quad (j: \text{integer type の数}) \text{ とある。また } u(t) \text{ は}$$

平均 0 の stationary process でその spectral density $g(x) \in \mathcal{S}_1$ であることがわかっていると可る。このとき

$$\tilde{p}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta_1 s + \cos \theta_2 s}{2} & -\frac{\sin \theta_1 s + \sin \theta_2 s}{2} \\ \frac{\sin \theta_1 s + \sin \theta_2 s}{2} & \frac{\cos \theta_1 s + \cos \theta_2 s}{2} \end{pmatrix}$$

であることがわかる。従って $R(x)$ の jumps は

$$V = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{at } \theta_1, \theta_2,$$

$$V' = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{at } -\theta_1, -\theta_2,$$

となることがわかる。

これら V, V' は

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{で同時対角化される}$$

$$UVU^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad UV'U^* = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とある。ここで known is spectral density $f(x)$,

($g = (1-\varepsilon)f + \varepsilon h$) は

$$2f(\theta_1) + 2f(\theta_2) = 1, \quad f(\theta_1) < f(\theta_2)$$

であるとする。今 $l > 0$ を

$$l + 2(1-\varepsilon)f(\theta_1) = 1 \quad \text{の解とする。}$$

そして

$$f_l(x) = \begin{cases} (1-\varepsilon)f(\theta_2) & , \quad x = \pm\theta_2 \\ l/2 & , \quad x = \pm\theta_1, \end{cases}$$

と定義すれば、 $\hat{\alpha}_l$ は l による min-max robust な α の推定量

は

$$\hat{\alpha}_l = \left[\sum_{x=\pm\theta_1, \pm\theta_2} f_l(x)^{-1} \psi(x) \psi(x)^* \right]^{-1} \\ \times \left[\sum_{x=\pm\theta_1, \pm\theta_2} f_l(x)^{-1} \psi(x) \frac{1}{2\pi} \sum_{t=0}^{T-1} y(t) e^{itx} \right]$$

で与えられる。

References

- Hannan, E. J. (1970). *Multiple Time Series*.
Wiley.
- Hosoya, Y. (1978). Robust linear extrapolations
of second-order stationary processes.
Ann. Prob. 574-584.
- Huber, P. (1964). Robust estimation of a location
parameter. *Ann. Math. Statist.* 35. 73-101.
- Rozanov, Yu. A. (1969). On a new class of
statistical estimates, *Soviet-Japanese Sympos.,
Theory of Probability, Novosibirsk*, 239-252.
- Taniguchi, M. (1979). Regression and interpolation
for time series. *International Conference
in Statistics in Tokyo*. 167-170.