数理解析研究所講究録
第 380 巻 1980 年 127-143

Sufficiency and relative entropy

東理大 理工 日合文雄

序論

Halmos-Savage [1] および Bahadur [2] が十分統計量の研究を抽象的測度論の枠組で始めて以来，十分性の理論は統計的決定論，実験(experiments)，情報量などと関連して発展し，数理統計学の中心テーマの一つになっている．Kullback-Leibler [3] において与えられた Kullback-Leibler 情報量 (= relative entropy) による十分性の特徴づけは次のように述べられる：p, q を σ-集合体 $\mathcal{A}$ 上の確率測度とし，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ の σ-部分集合体とするとき，

(1) $\mathcal{B}$ が $\{p, q\}$ に対して十分ならば，$I_{\mathcal{B}}(p|q) = I(p|q)$ であり，

(2) $I_{\mathcal{B}}(p|q) = I(p|q) < +\infty$ ならば，$\mathcal{B}$ は $\{p, q\}$ に対して十分である．

この報告における主要な論点は，十分性と relative entropy

の関係を三つの観点（§§1–3）から考察し，上にあげたKullback-Leiblerの定理をそれらの方向に拡張することにある．

§1で，十分性の概念は雑音（noise）を含む統計量である情報路（= Markov kernel）に対してまで自然に拡張される（cf. Csiszár [4]）．通常の統計量またはσ-部分集合体の場合と同様に，情報路の十分性に対しても対十分性（pairwise sufficiency）との同値性，Radon-Nikodym微分による因子分解などのような結果が得られる．また十分情報路の構造に関する定理が得られ，それによれば与えられた入力確率の集合$\mathcal{P}$が可分なとき，情報路が$\mathcal{P}$に対して十分ならば，それを通して観測することにより入力空間上の十分統計量を$\mathcal{P}$での誤りの確率0で構成できることがわかる．さらに情報路を通したときの二つの入力確率の間の条件付きrelative entropyが導入され，それが入力空間に含まれるrelative entropyから出力空間に含まれるrelative entropyを引いた差に等しいことが示される．このことから情報路の十分性のrelative entropyを用いた直観的解釈が与えられる．

§2では，近似十分性とrelative entropyの関係が考察される．近似十分性の概念は漸近十分性と関連してKudo [5]により導入され，さらにKusama [6]によりそのいくつか

の同値条件が与えられた．十分性が relative entropy の一致条件に対応する（Kullback-Leibler の定理）のに照らせば，近似十分性が relative entropy のある種の収束条件に対応するであろうことは容易に想像される．ここでは近似十分性と relative entropy のいくつかの収束条件との間の相互関係が与えられる．その証明において，[4] で与えられた確率測度の差のノルムと relative entropy の間に成立する不等式が基本的役割を果たす．

ヒルベルト空間上の作用素代数は量子力学系を記述する数学モデルとして重要である．作用素代数上の状態（states，古典系＝可換系の確率測度に対応する）の解析は非可換確率論と呼ばれる一分野を形成している．Umegaki [7, 8] は十分性および relative entropy を（semi-finite な）von Neumann 代数上で定義し，Halmos-Savage および Kullback-Leibler の理論を初めて非可換系に拡張した．非可換系の熱平衡状態を記述する Kubo-Martin-Schwinger（KMS）条件およびモジュラー自己同型群（modular automorphism group）は，Tomita-Takesaki 理論を通して，作用素代数の研究における中核の一つになっている．§3 では Tomita-Takesaki-Connes 理論による von Neumann 代数の最近の発展に沿って十分性が考察される．とくにモジュラー自己同型群に対す

る定常状態あるいはKMS状態の分類に十分性の概念が有効であることが示される．また Araki [9, 10] の relative entropy を用いて Kullback-Leibler の定理が von Neumann 代数上の非可換系にまで拡張される．

§3の内容は，東理大理工の大矢雅則氏と塚田真氏との共同研究によるものである．最後に，この報告にまとめた十分性の議論に関して東工大の梅垣寿春先生から有益な助言を頂き感謝します．

§1. 情報路の十分性

$(X, \mathcal{A})$ と $(Y, \mathcal{B})$ を可測空間とし，$[X, \nu, Y]$（あるいは単に ν）を入力空間 $(X, \mathcal{A})$ と出力空間 $(Y, \mathcal{B})$ をもつ情報路とする．すなわち，ν は数学的構造としては Markov kernel と同じものであり，次の二条件を満たす：

(i) $\forall x \in X$ に対して，$\nu(x, \cdot)$ は $\mathcal{B}$ 上の確率測度であり，

(ii) $\forall B \in \mathcal{B}$ に対して，$\nu(\cdot, B)$ は X 上の可測函数である．

$\mathcal{A}$ 上の確率測度 p に対して，$\mathcal{B}$ 上の確率測度 $p\nu$ および $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ 上の確率測度 $p\otimes\nu$ を

$$p\nu(B) = \int_X \nu(x, B)\, p(dx), \qquad B \in \mathcal{B},$$

$$p\otimes\nu(A \times B) = \int_A \nu(x, B)\, p(dx), \qquad A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B},$$

で定義する．任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，Y 上の可測函数 $p(A|\nu)$

で

$$p\otimes\nu(A\times B)=\int_B p(A|\nu)(y)\,p\nu(dy),\qquad B\in\mathcal{B},$$

を満たすものが a.e. $[p\nu]$ の意味で一意に存在する．$\mathcal{P}$を$\mathcal{A}$上の確率測度の一つの集合とし，$\mathcal{P}\nu=\{p\nu : p\in\mathcal{P}\}$，$\mathcal{P}\otimes\nu=\{p\otimes\nu : p\in\mathcal{P}\}$とする．

［定義］ 情報路νが$\mathcal{P}$に対して十分であるとは，任意の$A\in\mathcal{A}$に対してY上の可測函数φ_Aで

$$p(A|\nu)(y)=\varphi_A(y)\quad \text{a.e. } [p\nu],\qquad p\in\mathcal{P},$$

となるものが存在することである．

この定義は統計量あるいはσ部分集合体の十分性の概念の自然な拡張である．例えば，統計量$T: X\longrightarrow Y$に対して，$\nu(x,B)=1_B(Tx)$とおいて情報路νをとればTの十分性とνの十分性は同じである．

［定理 1.1］ (1) νが$\mathcal{P}$に対して十分であることは，$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$の$\sigma$-部分集合体$X\times\mathcal{B}=\{X\times B : B\in\mathcal{B}\}$が$\mathcal{P}\otimes\nu$に対して十分であることと同値である．

(2) $\mathcal{P}$が weakly dominated のとき，νが$\mathcal{P}$に対して十分であることは，νが$\mathcal{P}$からとった任意の対$\{p,q\}$に対して十分であることと同値である．

(3) $\mathcal{P}$が dominated のとき，νが$\mathcal{P}$に対して十分であるための必要十分条件は，$\mathcal{P}\equiv p_0$となる$\mathcal{A}$上の確率測度p_0が存在

してすべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $p(dx)/p_0(dx) = p\nu(dy)/p_0\nu(dy)$ a.e. $[p_0 \otimes \nu]$ が成立することである。

次に十分情報路の構造に関する定理をあげる：

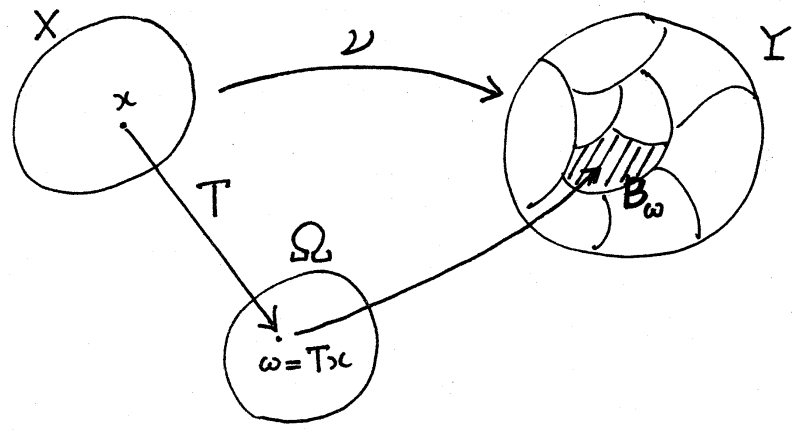
［定理 1.2］ (1) $\mathcal{P}\nu$ が weakly dominated とするとき，可測空間 $(\Omega, \mathcal{O})$，統計量 $T: X \to \Omega$，および $\mathcal{B}$ の中の互に素な集合族 $\{B_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ が存在して次の条件 (i)－(iii) を満たすならば，$[X, \nu, Y]$ は $\mathcal{P}$ に対して十分である：

(i) T は $\mathcal{P}$ に対して十分であり，

(ii) $\forall Q \in \mathcal{O}$ に対して，$\bigcup_{\omega \in Q} B_\omega \in \overline{\mathcal{B}} \ (= \mathcal{B} \vee \{\mathcal{P}\nu\text{-null sets}\})$，

(iii) $\nu(x, B_{Tx}) = 1$ a.e. $[\mathcal{P}]$.

(2) $\mathcal{P}$ が全変動ノルムに関して可分とするとき，$[X, \nu, Y]$ が $\mathcal{P}$ に対して十分ならば，上のような (i)－(iii) を満たす $(\Omega, \mathcal{O})$，$T: X \to \Omega$，および $\{B_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ が存在する。



さて，Π を X の有限可測分割の全体とする．$\mathcal{A}$ 上の確率測度 p, q と $\mathfrak{A} \in \Pi$ に対して

$$I_{\mathfrak{A}}(p|q) = \sum_{A\in\mathfrak{A}} p(A)\log\frac{p(A)}{q(A)}$$

とするとき，p, q 間の relative entropy (= Kullback-Leibler 情報量) は

$$I(p|q) = \sup_{\mathfrak{A}\in\Pi} I_{\mathfrak{A}}(p|q)$$

で与えられる．別の表示で書けば，

$$I(p|q) = \begin{cases} \int_X \left(\frac{dp}{dq}\log\frac{dp}{dq}\right)dq, & p \ll q \text{ のとき},\\ +\infty, & p \not\ll q \text{ のとき}. \end{cases}$$

次に，情報路 $[X, \nu, Y]$ を通したときの条件付き relative entropy を定義しよう．$p \ll q$ として，各 $\mathfrak{A}\in\Pi$ に対して

$$I_{\mathfrak{A}}(p|q|\nu) = \int_Y \sum_{A\in\mathfrak{A}} p(A|\nu)(y)\log\frac{p(A|\nu)(y)}{q(A|\nu)(y)}\,p\nu(dy)$$

とおき，条件付き relative entropy $I(p|q|\nu)$ を

$$I(p|q|\nu) = \sup_{\mathfrak{A}\in\Pi} I_{\mathfrak{A}}(p|q|\nu)$$

で定義する．

［定理 1.3］ $I(p|q) < +\infty$ のとき，

$$I(p|q|\nu) = I(p|q) - I(p\nu|q\nu).$$

すなわち，条件付き relative entropy $I(p|q|\nu)$ は入力側の relative entropy $I(p|q)$ から出力側の relative entropy $I(p\nu|q\nu)$ を引いた差に等しい．

［定理 1.4］ 次の条件(i)–(iii) に関して，(i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longleftrightarrow$(iii) が成立する：

(i) $I(p\nu|q\nu)=I(p|q)<+\infty$;

(ii) $I(p|\frac{p+q}{2}|\nu)=0$;

(iii) νは$\{p,q\}$に対して十分である.

§2. 近似十分性とrelative entropy

$\{\mathcal{A}_\alpha\}$を$\mathcal{A}$のσ-部分集合体の増大netで$\mathcal{A}=\bigvee_\alpha \mathcal{A}_\alpha$とし,$\{\mathcal{B}_\alpha\}$を$\mathcal{B}_\alpha\subset\mathcal{A}_\alpha$となる$\sigma$-部分集合体のnetとする. p, qを$\mathcal{A}$上の確率測度とする.

[定義](cf. [5,6]) $\{\mathcal{B}_\alpha\}$が$\{p,q\}$に対して近似十分であるとは,各$\mathcal{A}_\alpha$上の確率測度p_α, q_αが存在して,$\|p_\alpha-p\|_{\mathcal{A}_\alpha}\to 0$, $\|q_\alpha-q\|_{\mathcal{A}_\alpha}\to 0$,かつ$\mathcal{B}_\alpha$が$\{p_\alpha, q_\alpha\}$に対して十分となることである. ここで$\|\cdots\|_{\mathcal{A}_\alpha}$は$\mathcal{A}_\alpha$上でとった全変動ノルムである.

この§では,近似十分性とrelative entropyのいくつかの収束条件との関係を調べよう.

$\mathcal{B}$を$\mathcal{A}$のσ-部分集合体とするとき,$q(B_0)=0$かつ$\mathcal{B}\cap(X\setminus B_0)$上で$p\ll q$となる$B_0\in\mathcal{B}$が存在する. そこで$\mathcal{A}$上の確率測度$p'$を

$$p'(A)=\int_{X\setminus B_0} q(A|\mathcal{B})\,dp+p(A\cap B_0),\quad A\in\mathcal{A},$$

で定義する. ここで$q(A|\mathcal{B})$はAのq, $\mathcal{B}$に関する条件付き確率をあらわす. このとき,$\mathcal{B}$の$\{p,q\}$に対する十分性

は $p=p'$ と同値になる．次の結果は Csiszár [4] による：

［定理2.1］ (1) $\|p-q\| \leq \{2\, I(p|q)\}^{1/2}$.

(2) $I_{\mathcal{B}}(p|q) < +\infty$ のとき，

$$I(p|p') = I(p|q) - I_{\mathcal{B}}(p|q).$$

(3) $I_{\mathcal{B}}(p|q) < +\infty$ のとき，

$$\|p-p'\| \leq \{2\,(I(p|q) - I_{\mathcal{B}}(p|q))\}^{1/2}.$$

さて，近似十分性と relative entropy の関係は次の定理にまとめられる：

［定理2.2］ 次の各条件に関して，(iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) が成立する；とくに $I(p|q) < +\infty$ のとき，(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) および (iv) $\Leftrightarrow$ (v) が成立する：

(i) 各 $\mathcal{A}_\alpha$ 上の確率測度 p_α, q_α が存在して，$\|p_\alpha - p\|_{\mathcal{A}_\alpha} \to 0$, $\|q_\alpha - q\|_{\mathcal{A}_\alpha} \to 0$, かつ $I_{\mathcal{B}_\alpha}(p_\alpha|q_\alpha) = I_{\mathcal{A}_\alpha}(p_\alpha|q_\alpha)$；

(ii) $\{\mathcal{B}_\alpha\}$ は $\{p, q\}$ に対して近似十分である；

(iii) 各 $\mathcal{A}_\alpha$ 上の確率測度 p_α, q_α が存在して，$\|p_\alpha - p\|_{\mathcal{A}_\alpha} \to 0$, $\|q_\alpha - q\|_{\mathcal{A}_\alpha} \to 0$, かつ $I_{\mathcal{A}_\alpha}(p_\alpha|q_\alpha) - I_{\mathcal{B}_\alpha}(p_\alpha|q_\alpha) \longrightarrow 0$；

(iv) $I_{\mathcal{A}_\alpha}(p|q) - I_{\mathcal{B}_\alpha}(p|q) \longrightarrow 0$；

(v) $I_{\mathcal{B}_\alpha}(p|q) \longrightarrow I(p|q)$.

［証明］ (iv) $\Rightarrow$ (iii) は明らかであり，(ii) $\Rightarrow$ (i) は近似十分性の定義と Kullback-Leibler の定理から明らかである．(iii) $\Rightarrow$ (ii) を示すために，上で p' を定義したと同様にして，各

$\mathcal{A}_\alpha$ 上の確率測度 p'_α を

$$p'_\alpha(A) = \int_{X \setminus B_\alpha} g_\alpha(A|\mathcal{B}_\alpha)\,dp_\alpha + p_\alpha(A \cap B_\alpha), \quad A \in \mathcal{A}_\alpha,$$

で定義する．ここで $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ は $g_\alpha(B_\alpha) = 0$ かつ $\mathcal{B}_\alpha \cap (X \setminus B_\alpha)$ 上で $p_\alpha \ll g_\alpha$ となるものである．すると，定理2.1 (3) より

$$\| p'_\alpha - p_\alpha \|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq \{2(I_{\mathcal{A}_\alpha}(p_\alpha|g_\alpha) - I_{\mathcal{B}_\alpha}(p_\alpha|g_\alpha))\}^{1/2} \longrightarrow 0$$

であり，従って

$$\| p'_\alpha - p \|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq \| p'_\alpha - p_\alpha \|_{\mathcal{A}_\alpha} + \| p_\alpha - p \|_{\mathcal{A}_\alpha} \longrightarrow 0.$$

また $\| g_\alpha - g \|_{\mathcal{A}_\alpha} \to 0$ であり，さらに p'_α のとり方から $\mathcal{B}_\alpha$ は $\{p'_\alpha, g_\alpha\}$ に対して十分である．よって (ii) が成立する．次に，$I(p|g) < +\infty$ のとき，(i) $\Longrightarrow$ (iii) は明らかであり，(iv) $\Longleftrightarrow$ (v) は $I_{\mathcal{A}_\alpha}(p|g) \longrightarrow I(p|g)$ からすぐに得られる．

［問題］ (ii) $\Longrightarrow$ (iv)（または (v)）は一般には成立しないように思われる．いかなる仮定の下で，(ii) $\Longrightarrow$ (iv)（または (v)）が成立するか？

§3. 非可換確率論における十分性

$\mathcal{R}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上に作用する恒等写像 I を含む von Neumann 代数とし，$\mathfrak{S}$ を $\mathcal{R}$ のすべての正規状態 (normal states, $\varphi(I) = 1$ を満たす $\mathcal{R}$ 上の正線形汎函数で，$A_\alpha \in \mathcal{R}$, $A_\alpha \uparrow A$ ならば $\varphi(A_\alpha) \uparrow \varphi(A)$ となるもの) からなる集合と

する．α_t, $t\in\mathbb{R}$, を$\mathfrak{R}$の強連続な一径数自己同型群とするとき，状態$\varphi\in\mathfrak{S}$がある定数$\beta>0$でα_tに関してKMS条件を満たすとは，任意の$A,B\in\mathfrak{R}$に対して次の境界値をもつ帯状領域$0\leq \mathrm{Im}\, z\leq\beta$で連続かつ内部で正則な有界函数$F_{A,B}(z)$が存在することである：

$$F_{A,B}(t)=\varphi(\alpha_t(A)B),\quad F_{A,B}(t+i\beta)=\varphi(B\alpha_t(A)),\ t\in\mathbb{R}.$$

φがα_tに関してKMS条件を満たすならば，φはα_t-不変，すなわち$\varphi\circ\alpha_t=\varphi$である．$\alpha_t$の代りに$\alpha_{\beta t}$を考えることにより，以下の議論において$\beta=1$にとってよい．Takesaki [11]は，任意の忠実な状態$\varphi\in\mathfrak{S}$（φが忠実とは，$A\in\mathfrak{R}$, $A\geq 0$, $\varphi(A)=0 \Rightarrow A=0$）に対して唯一つの一径数自己同型群$\sigma_t^{\varphi}$（モジュラー自己同型群と呼ばれる）が存在して，$\varphi$が$\beta=1$で$\sigma_t^{\varphi}$に関してKMS条件を満たすことを示した．

部分代数$\mathfrak{M}$は常にIを含む$\mathfrak{R}$のvon Neumann部分代数を意味するものとする．部分代数$\mathfrak{M}$と状態$\varphi\in\mathfrak{S}$に対して，$E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$は$\mathfrak{M}$と$\varphi$に関する条件付き期待値をあらわすとする；すなわち$E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$は$\mathfrak{R}$から$\mathfrak{M}$の上へのノルム1の正規な射影ですべての$A\in\mathfrak{R}$に対して$\varphi(A)=\varphi(E_\varphi(A|\mathfrak{M}))$を満たす．Takesaki [12]によれば，忠実な状態$\varphi\in\mathfrak{S}$に対して，$E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$が存在するための必要十分条件は，$\mathfrak{M}$が$\sigma_t^{\varphi}$に関して不変，i.e., $\sigma_t^{\varphi}(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$となることである．

Connes [13] によれば，任意の二つの忠実な状態 $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ に対して，$\mathcal{N}$ のユニタリー作用素を値とする強連続な u_t, $t\in\mathbb{R}$, が存在して，

$$u_{s+t}=u_s\sigma_s^{\varphi}(u_t),\qquad s,t\in\mathbb{R},$$

$$\sigma_t^{\psi}(A)=u_t\sigma_t^{\varphi}(A)u_t^*,\qquad t\in\mathbb{R},\ A\in\mathcal{N},$$

を満たす．この u_t は $u_t=(D\psi:D\varphi)_t$ と書かれ，ψ の φ に関する Connes Radon-Nikodym 微分と呼ばれる．

S を $\mathfrak{S}$ の一つの部分集合とする．

［定義］ 部分代数 $\mathcal{M}$ が S に対して十分であるとは，すべての $\varphi\in S$ に対して $E_\varphi(\cdot\mid\mathcal{M})$ が存在し，かつ任意の $A\in\mathcal{N}$ に対して $A_0\in\mathcal{M}$ が存在して

$$A_0=E_\varphi(A\mid\mathcal{M})\ \text{a.e.}[\varphi],\qquad \varphi\in S,$$

が成立することである．ここで $A=B$ a.e.$[\varphi]$ とは $\varphi(|A-B|)=0$ を意味する．また $\mathcal{M}$ が S に対して最小十分である (minimal sufficient) とは，$\mathcal{M}$ が S に対して十分でありかつ S に対して十分な部分代数のうち最小なものであることである．

［定理3.1］ (cf.[14]) 任意の部分代数 $\mathcal{M}$ と任意の忠実な状態 $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ に対して，次の二つの条件は同値である：

(i) $\mathcal{M}$ は $\{\varphi,\psi\}$ に対して十分である；

(ii) $E_\varphi(\cdot\mid\mathcal{M})$ が存在し，かつ $(D\psi:D\varphi)_t\in\mathcal{M}$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

さて，忠実な状態$\varphi\in\mathfrak{S}$を一つ固定し，σ_t^φをそのモジュラー自己同型群とする．$\mathcal{Z}_\varphi$をφの中心化群，すなわち

$$\mathcal{Z}_\varphi=\{A\in\mathcal{M}:\varphi(AB)=\varphi(BA),\ \forall B\in\mathcal{M}\}$$

とすると

$$\mathcal{Z}_\varphi=\{A\in\mathcal{M}:\sigma_t^\varphi(A)=A,\ \forall t\in\mathbb{R}\}$$

とも書ける．$\mathfrak{Z}$を$\mathcal{M}$の中心，すなわち$\mathfrak{Z}=\mathcal{M}\cap\mathcal{M}'$，ただし$\mathcal{M}'=\{A\in\mathcal{M}:AB=BA,\ \forall B\in\mathcal{M}\}$とする．明らかに，$\mathfrak{Z}\subset\mathcal{Z}_\varphi$である．$I(\varphi)$を$\sigma_t^\varphi$－不変な$\varphi\in\mathfrak{S}$の全体とし，$K(\varphi)$を$\beta=1$で$\sigma_t^\varphi$に関してKMS条件を満たす$\varphi\in\mathfrak{S}$の全体とする．

［定理3.2］(1) 任意の$\psi\in\mathfrak{S}$に対して，$\psi\in I(\varphi)$であることと$\mathcal{Z}_\varphi$が$\{\varphi,\psi\}$に対して十分であることは同値である．

(2) $\mathcal{Z}_\varphi$は$I(\varphi)$に対して最小十分である．

［定理3.3］(1) 任意の$\psi\in\mathfrak{S}$に対して，$\psi\in K(\varphi)$であることと$\mathfrak{Z}$が$\{\varphi,\psi\}$に対して十分であることは同値である．

(2) $\mathfrak{Z}$は$K(\varphi)$に対して最小十分である．

$\mathcal{M}$が有限次元（すなわち$\mathcal{M}$がmatrix代数）のとき，各$\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$に対してrelative entropy $S(\psi|\varphi)$は

$$S(\psi|\varphi)=\mathrm{tr}(\rho_\psi\log\rho_\psi-\rho_\psi\log\rho_\varphi)$$

で与えられる．ここでtrはトレース，ρ_φ,ρ_ψはφ,ψの密度行列である．Araki [9,10] は一般のvon Neumann代数に

おける任意の$\varphi, \psi \in \mathfrak{S}$に対してまで relative entropy $S(\psi|\varphi)$を拡張し，その性質を調べた．その定義のし方については，簡単でないので詳細は省略したい．その性質については，$S(\psi|\varphi) \geq 0$で，$S(\psi|\varphi)=0 \Longleftrightarrow \psi=\varphi$であり，部分代数$\mathcal{M}$に$\varphi, \psi$を制限したときの relative entropy を$S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi)$であらわすと monotonicity : $S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi) \leq S(\psi|\varphi)$が成立する．また joint convexity, lower semicontinuity などの性質ももっている．最後に，非可換系の relative entropy $S(\psi|\varphi)$は次の意味で古典系の relative entropy $I(p|q)$を含んでいることに注意しよう：p, qをσ-集合体$\mathcal{A}$上の確率測度とし，$p, q \ll \nu$となる測度ν（$\nu = \frac{p+q}{2}$でよい）をとる．ヒルベルト空間$\mathcal{H} = L^2(\nu)$上に積作用素として作用する可換 von Neumann 代数$\mathcal{N} = L^\infty(\nu)$をとり，$h \in L^\infty(\nu)$に対して$\psi(h) = \int h\,dp$, $\varphi(h) = \int h\,dq$によりψ, φを定めれば，$S(\psi|\varphi) = I(p|q)$が成立する．

次の定理は定理 2.1 を$S(\psi|\varphi)$の場合へ拡張したものである：

［定理3.4］(1) $\|\psi - \varphi\| \leq \{2S(\psi|\varphi)\}^{1/2}$.

(2) $\varphi, \psi \in \mathfrak{S}$を忠実とし，$\mathcal{M}$を$\mathcal{M} \subset Z_\varphi$となる部分代数とする．$\psi' \in \mathfrak{S}$を$\psi'(A) = \psi(E_\varphi(A|\mathcal{M}))$, $A \in \mathcal{N}$, で定義する．このとき，$S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi) < +\infty$ならば

$$S(\psi|\psi') = S(\psi|\varphi) - S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi).$$

(3) $\varphi \in \mathfrak{S}$を忠実とし，$\mathcal{M} \subset \mathcal{Z}_\varphi$とする．$\psi \in \mathfrak{S}$に対して(2)のように$\psi' \in \mathfrak{S}$を定義する．さらに(a) ψが忠実，または(b) $\exists \lambda > 0$で$\psi \leq \lambda\varphi$のいずれかを仮定するとき，$S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi) < +\infty$ならば

$$\|\psi - \psi'\| \leq \{2(S(\psi|\varphi) - S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi))\}^{1/2}.$$

序論であげたKullback-Leiblerの定理の非可換系への拡張は次のようである：

［定理3.5］ $\varphi \in \mathfrak{S}$を忠実とし，$\psi \in \mathfrak{S}$，$\mathcal{M} \subset \mathcal{Z}_\varphi$とする．定理3.4(3)の条件(a)または(b)のいずれかを仮定するとき，

(1) $\mathcal{M}$が$\{\varphi, \psi\}$に対して十分ならば，$S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi) = S(\psi|\varphi)$であり，

(2) $S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi) = S(\psi|\varphi) < +\infty$ならば，$\mathcal{M}$は$\{\varphi, \psi\}$に対して十分である．

［定理3.6］ $\varphi \in \mathfrak{S}$を忠実とするとき，任意の$\psi \in \mathfrak{S}$と$\mathcal{M} \subset \mathcal{Z}_\varphi$に対して，

(1) $\mathcal{M}$が$\{\varphi, \psi\}$に対して十分ならば，$S_{\mathcal{M}}(\frac{\psi+\varphi}{2}|\varphi) = S(\frac{\psi+\varphi}{2}|\varphi)$であり，

(2) $S_{\mathcal{M}}(\frac{\psi+\varphi}{2}|\varphi) = S(\frac{\psi+\varphi}{2}|\varphi) < +\infty$ならば，$\mathcal{M}$は$\{\varphi, \psi\}$に対して十分である．

定理3.2, 3.3, 3.5, 3.6 を組合せれば, 定常状態 $\psi \in I(\varphi)$ あるいはKMS状態 $\psi \in K(\varphi)$ の relative entropy を用いた特徴づけが可能となる. 例えば上の仮定 (a) または (b) の下で, $S_{Z_\varphi}(\psi|\varphi) = S(\psi|\varphi) < +\infty \Longrightarrow \psi \in I(\varphi)$ であり, $S_{\mathfrak{Z}}(\psi|\varphi) = S(\psi|\varphi) < +\infty \Longrightarrow \psi \in K(\varphi)$ である.

文献

[1] P. R. Halmos and L. J. Savage, Application of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics, Ann. Math. Statistics 20 (1949), 225-241.

[2] R. R. Bahadur, Sufficiency and statistical decision functions, Ann. Math. Statistics 25 (1954), 423-462.

[3] S. Kullback and R. A. Leibler, On information and sufficiency, Ann. Math. Statistics 22 (1951), 79-86.

[4] I. Csiszár, Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations, Studia Sci. Math. Hungar. 2 (1967), 299-318.

[5] H. Kudo, On an approximation to a sufficient statistic including a concept of asymptotic sufficiency, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I 17 (1970), 273-290; ibid. Sec. I 22 (1975), 449.

[6] T. Kusama, On approximate sufficiency, Osaka J. Math. 13 (1976), 661–669.

[7] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, III, Kōdai Math. Sem. Rep. 11 (1959), 51–64.

[8] ———, Conditional expectation in an operator algebra, IV (entropy and information), Kōdai Math. Sem. Rep. 14 (1962), 59–85.

[9] H. Araki, Relative entropy of states of von Neumann algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 11 (1976), 809–833.

[10] ———, Relative entropy for states of von Neumann algebras II, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 13 (1977), 173–192.

[11] M. Takesaki, Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications, Springer, Lecture Notes in Math. Vol. 128, 1970.

[12] ———, Conditional expectations in von Neumann algebras, J. Functional Anal. 9 (1972), 306–321.

[13] A. Connes, Une classification des facteurs de type III, Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 4, 6 (1973), 133–252.

[14] F. Combes and C. Delaroche, Groupe modulaire d'une espérance conditionnelle dans une algèbre de von Neumann, Bull. Soc. Math. France 103 (1975), 385–426.