数理解析研究所講究録
第381巻 1980年 152-159

制限された1階述語論理の Computational Complexity

相模工大　岩田茂樹
京大 数理研　笠井琢美

1階述語論理の論理式の恒真問題や充足可能性問題のうち、いくつかの制限された問題が決定可能であることが知られている。本稿では、単項述語論理の充足可能性問題について考察し、その問題を解くのに (1) 少なくとも指数時間必要とする、(2) 非決定性指数時間で解ける、ことを示す。

はじめに、石おきゲーム [4] における先手必勝問題が決定性指数時間完全であることを利用して、上の (1) を示し、次にこの問題を指数時間内で解く非決定性アルゴリズムを示すことにより上の (2) を証明する。

本稿での complexity theory, 1階述語論理に関する基本的事項の定義は [1,5,6] 等による。はじめに石おきゲームに関する定義と結果について述べる。

定義 [4] 石おきゲームは4項組 $G = (N, R, U, t)$ のことである。ただし、

(1) Nは頂点の有限集合、

(2) $R \subset \{(i,j,k) \mid i,j,k \in N,\ i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i\}$は規則の集合、

(3) UはNの部分集合、

(4) tはNに属する頂点で、終局頂点と呼ぶ。

石おきゲームのはじめは、石はUのすべての頂点の上に置く。(i,j,k)がRの元で、石がi,jに置いてあり，kに置いていないならば、iの上にある石をkの上に移すことができる。２人で遊ぶ石おきゲームは２人で交互に規則にしたがって石を動かし、相手より先に終局頂点tに石を置くか、または相手に石を動かせなくした方を勝ちとするゲームである。

定理１［４］　２人で遊ぶ石おきゲームにおいて、先手に必勝の手段が存在するかどうかを決定する問題は決定性指数時間完全である。

系１　２人で遊ぶ石おきゲームにおいて、先手に必勝の手段が存在しないかどうかを決定する問題は決定性指数時間完全である。

定義　$G=(N,R,U,t)$を石おきゲームとする。Gのゲームグラフとは(X,E,x_0)のことである。ただし、

(1) XはGの推移可能な盤面の集合、

(2) $E=\{(x,y) \mid x,y \in X$，盤面xでは終局頂点tに石は

置かれていない，かつ，xは規則によりyに移ることができる}，

(3) $x_0 \in X$ は初期盤面といい，石おきゲームのはじめの石の配置である．

2人で遊ぶ石おきゲームでは，先手は$x_0 \in X$からはじめて，$(x_0, x_1) \in E$ となる x_1 を選ぶ．後手は $(x_1, x_2) \in E$ の x_2 を選ぶ．以下同様．もしどちらかが x_i を選び，x_i からのEに属する edge がないとき，x_i を選んだ方は勝ちとなる．

定義　石おきゲームGのゲームグラフ (X, E, x_0) において，$Notwin \subset X$ は次をみたすとき，Gの非勝利盤面集合という．

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z) \quad (x \in Notwin) \equiv [(x,y) \in E \Rightarrow \{(y,z) \in E \wedge z \in Notwin\}]$$

定理2　Gを石おきゲームとする．Gにおいて，盤面xからの必勝の手段が存在しないための必要十分条件は，Gの非勝利盤面集合 Notwin が存在し，$x \in Notwin$ である．

証明　非勝利盤面集合 Notwin が存在し，$x \in Notwin$ とする．非勝利盤面集合の定義より，盤面xからは，どこにも移ることはできないかまたは，どのような盤面に移ったとしても，他方のプレイヤーは再び非勝利盤面集合に属する盤面に移ることができる．すなわちxからの必勝の手段は存在しない．

xから必勝の手段が存在しないとする．$G=(N,R,U,t)$，(X,E,x_0)をGのゲームグラフとする．$|N|=n$とする．次の盤面集合 L_0，W_1, L_2, W_3, … を考える．

$$L_0=\{x \mid x\text{から出るゲームグラフ上の edge はない}\}$$

$$W_1=\{x \mid x\notin L_0,\ (\exists y)[(x,y)\in E \wedge y\in L_0]\}$$

$$L_{2i}=\{x \mid x\notin W_{2i-1}\cup L_{2i-2},\ (\forall y)[(x,y)\in E \Rightarrow y\in W_{2i-1}]\}\cup L_{2i-2}$$

$$W_{2i+1}=\{x \mid x\notin L_{2i}\cup W_{2i-1},\ (\exists y)[(x,y)\in E \wedge y\in L_{2i}]\}\cup W_{2i-1}$$

$$(1\leq i<n)$$

W_1, W_3, … の構成法より W_{2i+1} に属する盤面のみから $2i+1$ 回以下の石の移動で勝つことができる．したがって $X-W_{2\times\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}$ に属する盤面からは必勝の手段は存在しない。必勝の手段が存在しない盤面 x はこの集合に属する．$Notwin=X-W_{2\times\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}$ とおけば、Notwin は非勝利盤面集合の定義をみたす．

（証明終）

<u>定義</u>　<u>単項述語論理</u>は変数記号と単項述語記号のみを含む wff よりなる．

$\mathcal{A}$ を単項述語論理の wff とし，$p_1, p_2, \cdots, p_k$ を $\mathcal{A}$ にあらわれる単項述語記号とする．<u>解釈</u> $\mathcal{I}=\langle D; p_1,\cdots,p_k\rangle$ は．空でない集合D（変域という）と各 p_i にDの部分集合をわりあてることからなる．

<u>定理3</u>　単項述語論理の充足可能性の問題は、指数時間必要とする。

<u>証明</u>　この問題から系1の問題に決定性対数領域の複雑さで帰着できることを示す。すなわち石おきゲームから単項述語論理の wff を構成し、石おきゲームで先手必勝ではないときかつそのときにかぎり構成した wff が充足可能である、のようにすればよい。

$G=(N,R,U,t)$ を石おきゲームとし，(X,E,x_0) を G のゲームグラフとする．$|N|=n$ とすると，単項述語記号 $p_1,\cdots,p_n$, Notwin を使って wff を構成する．
各 $r=(i,j,k)\in R$ について，

$$\mathrm{Move}_r(x,y) := p_i(x)\wedge p_j(x)\wedge\sim p_k(x)\wedge\sim p_i(y)\wedge p_j(y) \wedge p_k(y)\wedge\Big[\bigwedge_{l\in N-\{i,j,k\}}(p_l(x)\equiv p_l(y))\Big]\wedge\sim p_t(x)$$

として、また、

$$\mathrm{Rules}(x,y) := \bigvee_{r\in R}\mathrm{Move}_r(x,y)$$

とする。次の wff を考える．

$$(\exists x_0)(\forall x)(\forall y)(\exists z)\,[\,\mathrm{Notwin}(x)\equiv(\mathrm{Rules}(x,y)\Rightarrow \{\mathrm{Rules}(y,z)\wedge\mathrm{Notwin}(z)\})]\wedge\Big(\bigwedge_{i\in U}p_i(x_0)\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{i\notin U}\sim p_i(x_0)\Big) \wedge\mathrm{Notwin}(x_0)\wedge\Big\{\Big(\bigwedge_{i\in N}(p_i(x)\equiv p_i(y))\Big)\Rightarrow (\mathrm{Notwin}(x)\equiv\mathrm{Notwin}(y))\Big\} \qquad (*)$$

(*) は G の記述の長さに対して、決定性対数領域で構成でき

ることに注意する。

Gで先手に必勝の手段が存在しないとする。定理2よりGの非勝利盤面集合Sが存在して $x_0 \in S$ である。このとき，次の解釈 $\mathcal{I} = \langle D;\ p_1, \cdots, p_n, \mathrm{Notwin} \rangle$ を考える。

D： Gの盤面の集合 X

p_i： Dの部分集合で i 番目の頂点に石のある盤面の集合

Notwin： Dの部分集合S

x_0 を初期盤面とすれば，$\mathcal{I}$ のもとで (*) は true となり，(*) は充足可能である。

次に (*) が充足可能であるとする。したがって (*) はある解釈 $\mathcal{I} = \langle D;\ p_1, \cdots, p_n, \mathrm{Notwin} \rangle$ のもとで true となる。各 $x \in D$ に対し、石おきゲームの盤面 $\bar{x}$ を対応させ、

$x \in p_i \Leftrightarrow \bar{x}$ では頂点 i に石がある、のようにする。$(1 \leq i \leq n)$

(*) が true であるからGに非勝利盤面集合

$S = \{\bar{x} \mid x \in \mathrm{Notwin}\}$ が存在し、また初期盤面 $\bar{x}_0$ が存在し $\bar{x}_0 \in S$ である。また、$(\forall x)(\forall y)\{(\bigwedge_{i \in N}(p_i(x) \equiv p_i(y))) \Rightarrow (\mathrm{Notwin}(x) \equiv \mathrm{Notwin}(y))\}$ が true であることは、同じ石の配置である2つの盤面は、片方がSに属していて他方が属していないことはないことを保証している。よって定理2により、先手に必勝の手段は存在しない。　　　　　（証明終）

系2　$\mathcal{B}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ を関数記号のない1階述語論理の限定記号なしの wff とする.

$$(\forall x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\forall x_4)\ \mathcal{B}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)\ \mathcal{B}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

の恒真問題は指数時間を必要とする.

注意　系2で与えられる形の恒真問題は決定可能であることが知られている[5].

補題1[3]　$\mathcal{A}$ を単項述語論理の wff とし, $\mathcal{A}$ は k 個の単項述語記号 $p_1, \cdots p_k$ を含むとする. $\mathcal{A}$ が充足可能であるための必要十分条件は、$\mathcal{A}$ がある解釈 $\mathcal{I} = \langle D; p_1, \cdots, p_k \rangle$, $|D| \leq 2^k$ のもとで true となることである.

単項述語論理の wff の充足可能性を決定するアルゴリズム

1. 解釈 $\mathcal{I} = \langle D; p_1, \cdots, p_k \rangle$ を推定する. ただし $|D| \leq 2^k$.

2. 解釈 $\mathcal{I}$ のもとで与えられた wff が true になるかどうかを決定する.

定理4. 上のアルゴリズムは与えられた単項述語論理の wff が充足可能かどうかを非決定性指数時間で決定する.

証明　アルゴリズムにおいて, 1の推定は非決定性で, $O(k \cdot 2^k)$ 時間以内でできる. k は wff にあらわれる単項述語記号の数である. また、m を wff にあらわれる変数の数とすると, 2. は wff が true かどうかをすべての変数

の組合せについてしらべるので、$O(2^{km})$ でできる。

(証明終)

謝辞　有益なコメントをいただいた電通大の西沢輝泰さん、東工大の山崎秀記さんに感謝する。

参考文献

[1] Aho, A.V., Hopcroft, J.E. and Ullman, J.D., The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

[2] Berge, C., Graphs and Hypergraphs, North-Holland, 1976.

[3] Goodstein, R.L., Development of Mathematical Logic, Logos Press, London, 1971.

[4] Kasai, T., Adachi, A. and Iwata, S., Classes of pebble games and complete problems, SIAM J. on Comput. 8 (1979), pp. 574-586.

[5] Manna, Z., Mathematical Theory of Computation, McGraw-Hill, 1974.

[6] Mendelson, E., Introduction to Mathematical Logic, Van Nostrand, 1964.