

常微分方程式の初期値問題の新しい解法
(NIM法)の Y_0^k とその加速について

日大 理工	永坂 秀子
日大 農獣医	五十嵐正夫
職業訓練大	室伏 誠

常微分方程式の初期値問題の数値解法において、積分区間を適当に細分しながら補外を重ねる(NIM法)を考えた。以下にその手法と解法に対する考察及び数値例をあげる。

1. 刻み幅を h とすると、厳密解を a_0 としたとき数値解 Y_0^0 が

$$Y_0^0 = a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \dots \quad (p_1 < p_2 < \dots) \quad (1)$$

とあらわせるとする。

2. 細分した区間を単区間とよび、その単区間長を l_0 とするとき、刻み幅 h は $h_k = 2^{-k} l_0$ ($k=0, 1, \dots$; ただし中実法では $k=1, 2, \dots$) と変化させる。

3. $Y_0^k = a_0 + a_1 (2^{-k} l_0)^{p_1} + a_2 (2^{-k} l_0)^{p_2} + \dots$

とし、 $Y_0^0, Y_0^1, Y_0^2, \dots$ を初期系列値とよび、オイラー法、中実法、R-K法等で計算する。

4. 補外計算式は

$$Y_n^k = Y_{n-1}^{k+1} + \frac{Y_{n-1}^{k+1} - Y_{n-1}^k}{2^k - 1} \quad \left(\begin{array}{l} n=1, 2, \dots \\ k=0, 1, 2, \dots \end{array} \right) \quad (2)$$

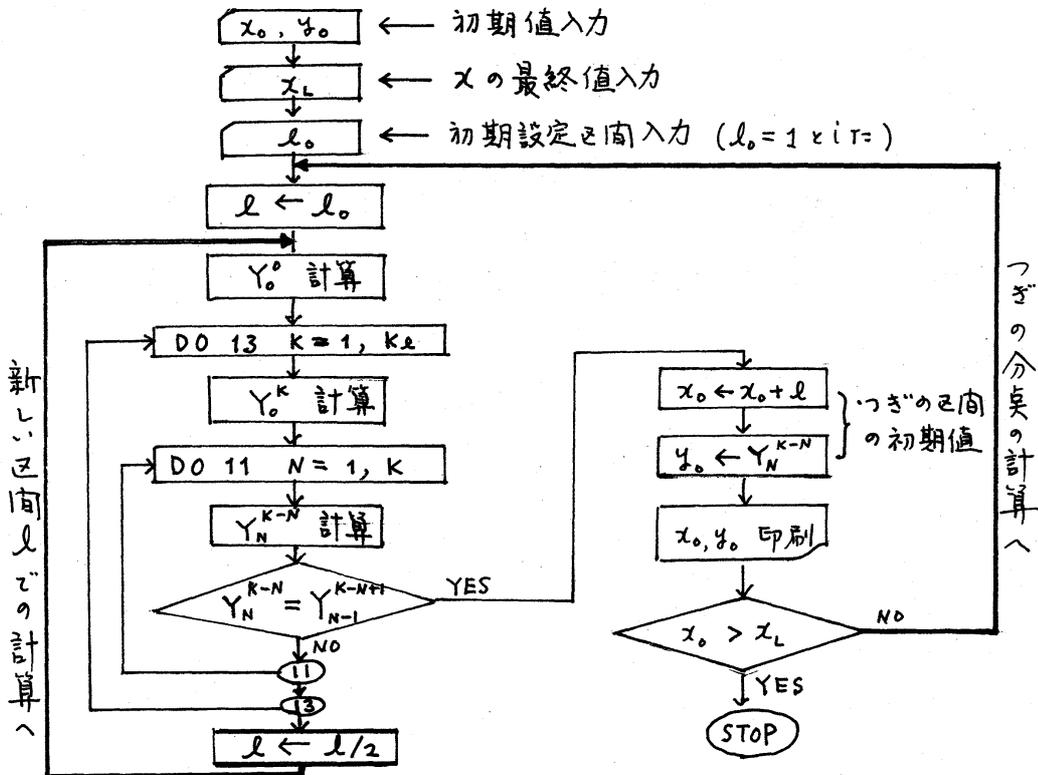
とし、 $Y_0^0, Y_0^1, Y_1^0, Y_0^2, Y_1^1, Y_2^0, Y_0^3$ の順に計算する。

(表3 参照)

5. l_0 は最初 1 と設定し、計算桁数に応じて補外の段数を決め、その範囲内で $Y_{n+1}^{k-1} = Y_n^k$ を満たせば収束した (この根拠については 8. 参照) とし、つぎに進む。

収束しない場合は l_0 を $l_0/2, l_0/2^2$ と順次細かくして収束するまで反復する。詳しくは流れ図参照。

NIM法の流れ図



6. 一般に Y_n^k はつぎのようになる。

$$Y_n^k = a_0 + \frac{2^{\sum_{l=1}^n p_l}}{\prod_{l=1}^n (2^{p_l} - 1)} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \prod_{l=1}^n (2^{-p_{n+s}} - 2^{-p_l}) \right\} \cdot 2^{-k p_{n+s}} \cdot a_{n+s} l_0^{p_{n+s}} \quad (3)$$

Y_n^k の打ち切り誤差を Δ_n^k とすると, $\Delta_n^k = Y_n^k - a_0$ とする。

i) オイラ-法における Δ_n^k の第1項 ($n \geq 1$) は

$$(-1)^n \cdot 2^{-\frac{(n+1)(n+2k)}{2}} \cdot a_{n+1} l_0^{n+1}$$

ii) 中実法での Δ_n^k の第1項 ($n \geq 1$) は

$$(-1)^n \cdot 2^{-(n+1)(n+2k+2)} \cdot a_{n+1} l_0^{2(n+1)}$$

iii) R-K 法での Δ_n^k の第1項 ($n \geq 1$) は

$$(-1)^n \cdot 2^{-\frac{(n+4)(n+2k+3)}{4}} \cdot \frac{(2-1)(2^2-1)(2^3-1)}{(2^{-(n+3)}-1)(2^{-(n+2)}-1)(2^{-(n+1)}-1)} \cdot a_{n+1} l_0^{n+4}$$

ii), iii) における $a_{n+1} l_0^k$ の係数を表1, 表2に示す。

表1 中実法の $a_{n+1} l_0^k$ の係数

刻み幅	中実法	補外 1段	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\times a_1 l_0^2$	$\times a_2 l_0^4$	$\times a_3 l_0^6$	$\times a_4 l_0^8$	$\times a_5 l_0^{10}$	$\times a_6 l_0^{12}$	$\times a_7 l_0^{14}$	$\times a_8 l_0^{16}$	$\times a_9 l_0^{18}$	$\times a_{10} l_0^{20}$	$\times a_{11} l_0^{22}$
$2^{-1} l_0$	2^{-2}										
$2^{-2} l_0$	2^{-4}	2^{-6}									
$2^{-3} l_0$	2^{-6}	2^{-10}	2^{-12}								
$2^{-4} l_0$	2^{-8}	2^{-14}	2^{-18}	2^{-20}							
$2^{-5} l_0$	2^{-10}	2^{-18}	2^{-24}	2^{-28}	2^{-30}						
$2^{-6} l_0$	2^{-12}	2^{-22}	2^{-30}	2^{-36}	2^{-40}	2^{-42}					
$2^{-7} l_0$	2^{-14}	2^{-26}	2^{-36}	2^{-44}	2^{-50}	2^{-54}	2^{-56}				
$2^{-8} l_0$	2^{-16}	2^{-30}	2^{-42}	2^{-52}	2^{-60}	2^{-66}	2^{-70}	2^{-72}			
$2^{-9} l_0$	2^{-18}	2^{-34}	2^{-48}	2^{-60}	2^{-70}	2^{-78}	2^{-84}	2^{-88}	2^{-90}		
$2^{-10} l_0$	2^{-20}	2^{-38}	2^{-54}	2^{-68}	2^{-80}	2^{-90}	2^{-98}	2^{-104}	2^{-108}	2^{-110}	
$2^{-11} l_0$	2^{-22}	2^{-42}	2^{-60}	2^{-76}	2^{-90}	2^{-102}	2^{-112}	2^{-120}	2^{-126}	2^{-130}	2^{-132}

単精度限界

2倍精度限界

4倍精度限界

表2 R-K法の $a_{n+1}l_0^k$ の係数

刻 み 中 間	R-K法	補外 1段	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$\times a_1 l_0^4$	$\times a_2 l_0^5$	$\times a_3 l_0^6$	$\times a_4 l_0^7$	$\times a_5 l_0^8$	$\times a_6 l_0^9$	$\times a_7 l_0^{10}$	$\times a_8 l_0^{11}$	$\times a_9 l_0^{12}$	$\times a_{10} l_0^{13}$	$\times a_{11} l_0^{14}$	$\times a_{12} l_0^{15}$	$\times a_{13} l_0^{16}$
l_0	2^0												
$2^{-1}l_0$	2^{-4}	2^{-5}											
$2^{-2}l_0$	2^{-8}	2^{-10}	2^{-10}										
$2^{-3}l_0$	2^{-12}	2^{-15}	2^{-16}	2^{-16}									
$2^{-4}l_0$	2^{-16}	2^{-20}	2^{-22}	2^{-23}	2^{-24}								
$2^{-5}l_0$	2^{-20}	2^{-25}	2^{-28}	2^{-30}	2^{-32}	2^{-32}							
$2^{-6}l_0$	2^{-24}	2^{-30}	2^{-34}	2^{-37}	2^{-40}	2^{-41}	2^{-41}						
$2^{-7}l_0$	2^{-28}	2^{-35}	2^{-40}	2^{-44}	2^{-48}	2^{-50}	2^{-51}	2^{-51}					
$2^{-8}l_0$	2^{-32}	2^{-40}	2^{-46}	2^{-51}	2^{-56}	2^{-59}	2^{-61}	2^{-62}	2^{-62}				
$2^{-9}l_0$	2^{-36}	2^{-45}	2^{-52}	2^{-58}	2^{-64}	2^{-68}	2^{-71}	2^{-73}	2^{-74}	2^{-74}			
$2^{-10}l_0$	2^{-40}	2^{-50}	2^{-58}	2^{-65}	2^{-72}	2^{-77}	2^{-81}	2^{-84}	2^{-86}	2^{-87}	2^{-87}		
$2^{-11}l_0$	2^{-44}	2^{-55}	2^{-64}	2^{-72}	2^{-80}	2^{-86}	2^{-91}	2^{-95}	2^{-98}	2^{-100}	2^{-101}	2^{-101}	
$2^{-12}l_0$	2^{-48}	2^{-60}	2^{-70}	2^{-79}	2^{-88}	2^{-95}	2^{-101}	2^{-106}	2^{-110}	2^{-113}	2^{-115}	2^{-116}	2^{-116}
$2^{-13}l_0$	2^{-52}	2^{-65}	2^{-76}	2^{-86}	2^{-96}	2^{-104}	2^{-111}	2^{-117}	2^{-122}	2^{-126}	2^{-129}	2^{-131}	2^{-132}

単精度限界

倍精度限界

4倍精度限界

7. 中実法で初期系列値を求めたとき、 Y_0^k に含まれる

丸め誤差 R_0^k とすると、 Y_n^k に伝播する丸め誤差 R_n^k は

$$R_n^k = \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{R_0^{n+k-i}}{\prod_{\substack{m=0 \\ m \neq n-i}}^{n-2i} (1-4^{-n+i+m})} \right\} \quad (4)$$

となる。これを具体的に示せば、下記の通りとなる。

$$R_1^k = 1.333 R_0^{k+1} - 0.3333 R_0^k$$

$$R_2^k = 1.422 R_0^{k+2} - 0.4444 R_0^{k+1} + 0.0222 R_0^k$$

$$R_3^k = 1.444 R_0^{k+3} - 0.4740 R_0^{k+2} + 0.0296 R_0^{k+1} - 0.00035 R_0^k$$

$$R_4^k = 1.450 R_0^{k+4} - 0.4815 R_0^{k+3} + 0.0316 R_0^{k+2} - 0.00047 R_0^{k+1} + 0.000001 R_0^k$$

ここで R_0^k は演算回数が増加すれば、それに伴い丸め誤差も増大するから、 $k < k'$ なら $|R_0^k| < |R_0^{k'}|$ と考えられるので、 T_n^k に最も影響を与える丸め誤差は R_0^{n+k} であることがわかる。

8. 一定値ラインと収束判定 数値解 Y_n^k は、差分解の誤差すなわち局所打ち切り誤差が集積された集積打ち切り誤差 Δ_n^k と、集積丸め誤差 R_n^k が厳密解 y に加わり

$$Y_n^k = y + \Delta_n^k + R_n^k$$

となる。最も精度よい数値解は Δ_n^k が Y_n^k の計算桁末尾程度となるものである。

ところで補外計算で刻み幅を小さくし、また補外を重ねてゆくと Y_n^k は Δ_n^k を含まなくなり、表3の補外表に示す通り Y_n^k は誤差が Δ_n^k を含む打ち切り誤差領域と Δ_n^k を含まず丸め誤差だけの丸め誤差領域に分れる。そして最適解はその境界上に存在する。ところで離散値における数値解は丸め誤差領域に入った時真で、同じ行の Y_n^k と Y_{n-1}^{k+1} が一致して境界線を放せてくれる。このように同じ行に一定値が並んだものを一定値ラインという。一定値ライン上の数値解は丸め誤差領域に入っているので、必ずしも最適解とはならないが、その上の数値解には、どのくらい打ち切り誤差が含まれているかわからず、時にはその絶対値が大きいときもあるので、少々精度が悪くなるが

表3 補外表

刻み幅	初期 系列 (中絶法)	補外 1段	2	3	4	5
$2^{-1}l_0$	Y_0^0					
$2^{-2}l_0$	Y_0^1	Y_1^0				(打ち切り誤差領域)
$2^{-3}l_0$	Y_0^2	Y_1^1	Y_2^0			
$2^{-4}l_0$	Y_0^3	Y_1^2	Y_2^1	Y_3^0		
$2^{-5}l_0$	Y_0^4	Y_1^3	$Y_2^2 = Y_3^1 = Y_4^0$			
$2^{-6}l_0$	Y_0^5	Y_1^4	Y_2^3	Y_3^2	Y_4^1	Y_5^0
			(丸め誤差領域)			

領域に分れる。そして最適解はその境界上に存在する。ところで離散値における数値解は丸め誤差領域に入った時真で、同じ行の Y_n^k と Y_{n-1}^{k+1} が一致して境界線を放せてくれる。このように同じ行に一定値が並んだものを一定値ラインという。一定値ライン上の数値解は丸め誤差領域に入っているので、必ずしも最適解とはならないが、その上の数値解には、どのくらい打ち切り誤差が含まれているかわからず、時にはその絶対値が大きいときもあるので、少々精度が悪くなるが

ここで一定値ラインの数値と区間上の最適解として採用することにして、収束判定は

$$Y_{n+1}^{k-1} = Y_n^k \quad (5)$$

となつたら、 Y_{n+1}^{k-1} を数値解とする。

ここで一定値ラインが出現する様子を調べてみる。

いま Y_n^{k-1} が打ち切り誤差領域、 Y_n^k が丸め誤差領域の数値解とすると、それぞれに含まれている数値は次式であらわされる。ただし y は厳密解とする。

$$\left. \begin{aligned} Y_n^{k-1} &= y + \Delta_n^{k-1} + R_n^{k-1} \\ Y_n^k &= y + R_n^k \end{aligned} \right\} (6)$$

$|\Delta_n^k| < \rho$ (ρ は y の最終単位)

ここで補外計算を行うと

$$Y_{n+1}^{k-1} = Y_n^k + \frac{Y_n^k - Y_n^{k-1}}{4^{n+1} - 1} = Y_n^k + \frac{R_n^k - \Delta_n^{k-1} - R_n^{k-1}}{4^{n+1} - 1} \quad (7)$$

となる。ここで丸め誤差 R_n^k を考えると (4) 式より

$$R_n^k < 1.5 R_0^{n+k}$$

となる。 R_0^{n+k} は $h = 2^{-(n+k+1)}$ の中点法による Y_0^{n+k} の丸め誤差であるから、各ステップで y の最終桁 (ρ) に丸め誤差が入ったとして

$$|R_0^{n+k}| \leq 2^{-(n+k+1)} \cdot \rho$$

となるので

$$\left| \frac{R_n^k}{4^{n+1} - 1} \right| \leq \left| \frac{R_n^k}{4^{n+1}} \right| < \frac{1.5}{2^{n-k+1}} \rho \quad (8)$$

となる。 $|R_n^{k-1}| < |R_n^k|$ より (8) 式の関係を 이용すると

$$n-k \geq 0 \text{ の場合 } \left| \frac{R_n^k - R_n^{k-1}}{4^{n+1} - 1} \right| \ll \rho \quad (9)$$

$n-k < 0$ の場合でも $|R_0^{n+k}|$ はそれほど大きくなりな
るので、 n が適当に大きくなると (9) 式は成立す
る。

つぎに打ち切り誤差 Δ_n^k は (3) 式よりつぎのようになる。

$$\Delta_n^k = a_{n+1}^{(n+1)} \left(\frac{l_0}{2^{n+k}} \right)^{2(n+1)} + a_{n+1}^{(n+2)} \left(\frac{l_0}{2^{n+k}} \right)^{2(n+2)} + \dots, \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

より才1項が優越しているときは、(6) 式より

$$\left| \frac{\Delta_n^{k-1}}{4^{n+1} - 1} \right| \doteq \left| \frac{\Delta_n^{k-1}}{4^{n+1}} \right| \doteq |\Delta_n^k| < \rho \quad (11)$$

となる。(9) 式, (11) 式より (7) 式の才2項は計算桁から外

$$\text{れ} \quad Y_{n+1}^{k-1} = Y_n^k \quad (12)$$

となる。

9. 数値実験例

ここでは解が単調増加または単調減少し零臭は通らない以下の問題について、NIM法における初期系列の計算式と精度ならびに補外段数と計算桁数との関係と数値実験によって示す。

例題 I. $y' = -y$, $y(0) = 1$; 解 $y(x) = e^{-x}$, $x = 0 \sim 170$

例題 II. $y' = -10y$, $y(0) = 1$; " $y(x) = e^{-10x}$, $x = 0 \sim 17$

例題 III. $y' = 10y$, $y(0) = 1$; " $y(x) = e^{10x}$, $x = 0 \sim 17$

例題 IV. $y' = 1 - y$, $y(0) = 0$; 解 $y(x) = 1 - e^{-x}$, $x = 0 \sim 17$

例題 V. $y' = 1 - y^2$, $y(0) = 0$; $y(x) = \tanh x$, $x = 0 \sim 100$

例題 VI. $y' = -2xy^2$, $y(0) = 1$; $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x = 0 \sim 1500$

例題 VII. $y' = x - y^2$, $y(10) = 0$; $x \rightarrow \infty$ で $y = \sqrt{x}$ に下から近接

数値例に入るまえに記法について説明する。

MP ; 中実法 $Y_0^k = y_{2^k}$

ただし $h_k = l_0 / 2^{k+1}$ とし

$y_1 = y_0 + h_k \cdot f(x_0, y_0)$, 【オイラ-法】

$y_{m+1} = y_m + 2h_k f(x_m, y_m)$, ($m=1, 2, \dots, 2^k-1$)

【中実法】

M-MP ; 修正中実法, 中実法の最後の y_{2^k} , $y_{2^{k-1}}$ あり

$Y_0^k = \frac{1}{2} \{ y_{2^k} + y_{2^{k-1}} + h_k \cdot f(x_{2^k}, y_{2^k}) \}$

MP-Meller; MP の各 y_m 計算で補正值 $2h_k \cdot f(x_m, y_m)$ を加えるとき丸め誤差の補正を行う。

R-K ; Y_0^k は刻み幅 $h_k = l_0 / 2^k$ の R-K 法の単区間 l_0 の最終値

R-K-G ; Y_0^k は刻み幅 $h_k = l_0 / 2^k$ の R-K-G 法の単区間 l_0 の最終値

また, x_N は積分区間 x の最終値, y_N は $y(x_N)$ の数値解, $rE(y_N)$ は数値解 y_N の相対誤差とする。

9.1. Y_0^k の計算式を変えたときの最終値 x_N での精度を単精度計算, 倍精度計算によって比較する。

表4 NIM法, 補外4段, $l_0=1$ (単精度計算, 16進6桁)

微分方程式		MP	M-MP	MP-Meller	R-K	R-K-G
I. $y' = -y, y_0 = 1$	x_N	170.125	170.375	170.5	170.75	170.0
	y_N	1.30 ⁻⁷⁴	1.02 ⁻⁷⁴	8.97 ⁻⁷⁵	6.98 ⁻⁷⁵	1.48 ⁻⁷⁴
	$rE(y_N)$	-5.4 ⁻⁴	-6.8 ⁻⁴	-1.3 ⁻⁴	-3.0 ⁻⁴	-7.3 ⁻⁵
II. $y' = -10y, y_0 = 1$	x_N	17.0	17.0078...	17.03125	16.75	16.75
	y_N	6.77 ⁻⁷⁴	1.37 ⁻⁷⁴	1.08 ⁻⁷⁴	1.80 ⁻⁷³	1.80 ⁻⁷³
	$rE(y_N)$	-5.1 ⁻⁴	-8.1 ⁻⁴	-1.3 ⁻⁴	-1.1 ⁻⁴	-4.0 ⁻⁵
III. $y' = 10y, y_0 = 1$	x_N	17.0	17.0	17.125	17.0	17.0
	y_N	6.75 ⁺⁷³	6.75 ⁺⁷³	2.36 ⁺⁷⁴	6.75 ⁺⁷³	6.75 ⁺⁷³
	$rE(y_N)$	-4.8 ⁻⁴	-4.4 ⁻⁴	-1.2 ⁻⁴	-2.8 ⁻⁴	-9.1 ⁻⁵
IV. $y' = 1-y, y_0 = 0$	x_N	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0
	y_N	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	$rE(y_N)$	0	-4.8 ⁻⁷	-5.9 ⁻⁸	-1.2 ⁻⁸	0
V. $y' = 1-y^2, y_0 = 0$	x_N	101.0	17.0	101.0	17.0	17.0
	y_N	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	$rE(y_N)$	0	-4.2 ⁻⁷	0	-1.2 ⁻⁷	0
VI. $y' = -2xy^2, y_0 = 1$	x_N	1500.75	1500.25	1500.5	1500.5	1500.0
	y_N	4.44 ⁻⁰⁷				
	$rE(y_N)$	-2.0 ⁻⁴	-4.7 ⁻⁴	2.4 ⁻⁵	-1.5 ⁻⁴	-5.5 ⁻⁵

表5 NIM法, 補外8段, $l_0=1$ (倍精度計算, 16進14桁)

微分方程式		MP	M-MP	MP-Meller	R-K	R-K-G
I. $y' = -y, y_0 = 1$	x_N	151.0	151.0	147.0	151.0	147.0
	y_N	2.64 ⁻⁶⁶	2.64 ⁻⁶⁶	1.95 ⁻⁶⁵	2.64 ⁻⁶⁶	1.95 ⁻⁶⁵
	$rE(y_N)$	-7.0 ⁻¹³	-7.2 ⁻¹³	5.0 ⁻¹⁵	5.0 ⁻¹³	-3.9 ⁻¹⁴
II. $y' = -10y, y_0 = 1$	x_N	14.75	14.75	14.75	15.0	14.5
	y_N	8.76 ⁻⁶⁵	8.76 ⁻⁶⁵	8.76 ⁻⁶⁵	7.17 ⁻⁶⁶	1.06 ⁻⁶³
	$rE(y_N)$	-7.5 ⁻¹³	-6.0 ⁻¹³	-3.7 ⁻¹³	-5.0 ⁻¹³	-7.6 ⁻¹⁵
III. $y' = 10y, y_0 = 1$	x_N	16.25	16.5	16.25	16.875	16.25
	y_N	3.74 ⁺⁷¹	4.55 ⁺⁷³	3.74 ⁺⁷¹	2.00 ⁺⁷⁰	3.74 ⁺⁷¹
	$rE(y_N)$	-4.0 ⁻¹³	-4.0 ⁻¹³	-2.6 ⁻¹⁴	-7.7 ⁻¹³	-2.2 ⁻¹⁴
IV. $y' = 1-y, y_0 = 0$	x_N	18.0	18.0	18.0	17.0	17.0
	y_N	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	$rE(y_N)$	2.1 ⁻¹⁶	4.9 ⁻¹⁶	2.1 ⁻¹⁶	2.5 ⁻¹⁶	0
V. $y' = 1-y^2, y_0 = 0$	x_N	21.0	20.0	18.0	17.0	17.0
	y_N	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	$rE(y_N)$	-1.4 ⁻¹⁷	-1.1 ⁻¹⁶	4.2 ⁻¹⁷	-1.4 ⁻¹⁷	0
VI. $y' = -2xy^2, y_0 = 1$	x_N	1500.0	1500.0	1500.0	1500.0	1500.0
	y_N	4.44 ⁻⁰⁷				
	$rE(y_N)$	-1.7 ⁻¹³	-2.2 ⁻¹³	-1.9 ⁻¹⁴	-9.6 ⁻¹⁴	-3.5 ⁻¹⁴

単精度, 倍精度計算ともMP系列とR-K系列においては,

精度の差はあまり見られない。ところが丸め誤差の補正を行ったものと、そうでないものとの間には1桁程度の精度差が見られる。

つぎに例題 I, II, III, VI について, 補外8段階精度計算の x_0 から x_N までの相対誤差を図1, 図2, 図3, 図4に示す。

図1. $y' = -y, y_0 = 1$

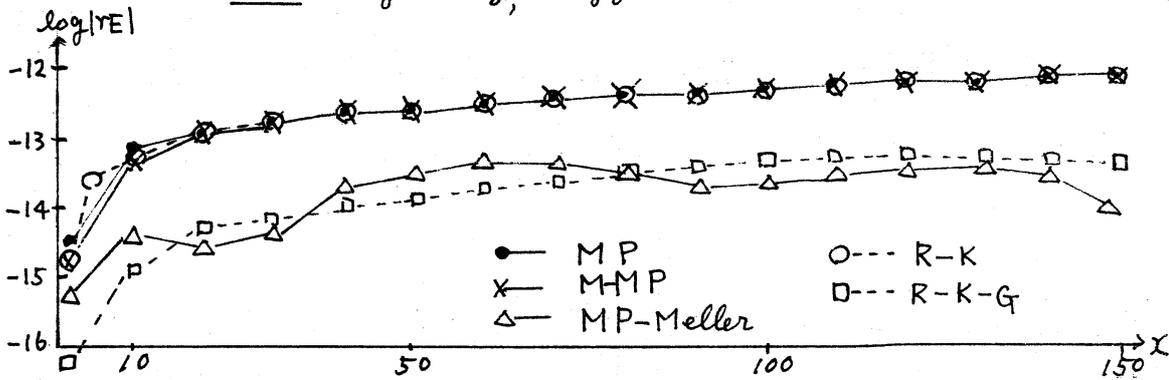


図2. $y' = -10y, y_0 = 1$

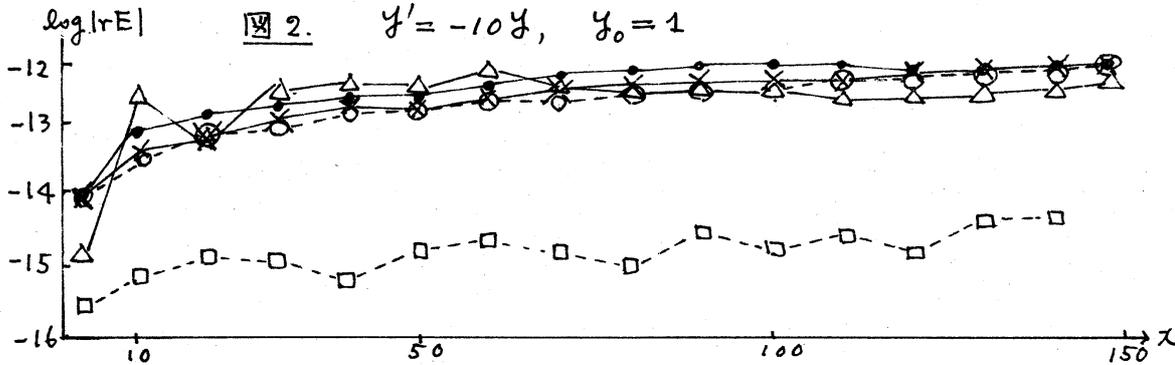
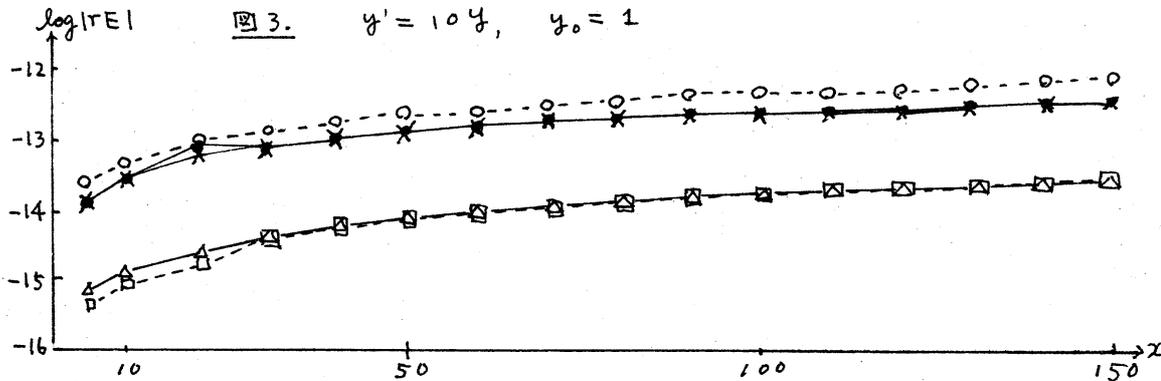
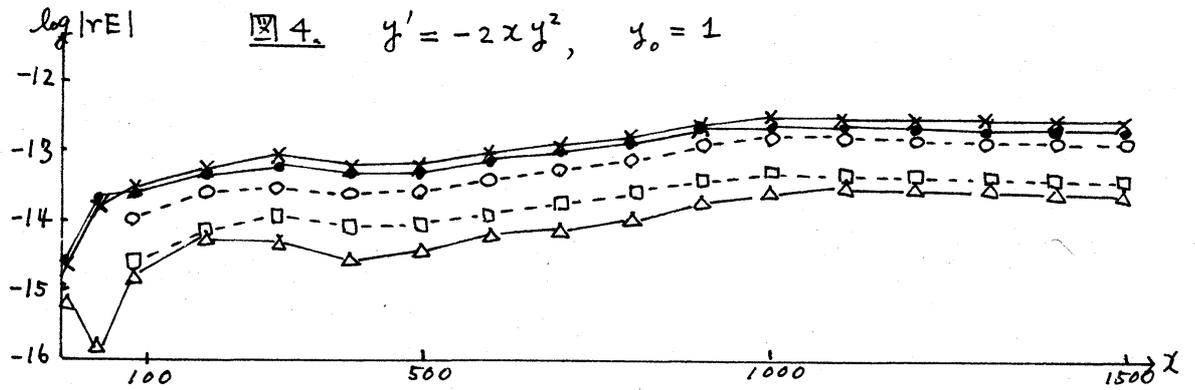


図3. $y' = 10y, y_0 = 1$





この傾向は補外4段単精度計算でも同じである。

9.2. y_0^k を R-K法で補外8段, 4段にしたときの比較を表6に示す。

表6.

微分方程式	補外段数	最終値 x_N	$rE(y_N)$	分割数	CPU時間
I. $y' = -y, y_0 = 1$	8 段	151.0	-5.0 -13	170	5.9 秒
	4 段	151.0	-5.4 -13	600	28.8
II. $y' = -10y, y_0 = 1$	8 段	15.0	-5.0 -13	77	16.3
	4 段	15.0293...	7.9 -13	1208	56.3
III. $y' = 10y, y_0 = 1$	8 段	15.0625	-7.0 -13	64	16.3
	4 段	15.0078...	-7.9 -13	1151	51.3
IV. $y' = 1-y, y_0 = 0$	8 段	17.0	2.5 -16	17	0.8
	4 段	17.84375	1.9 -16	49	3.1
V. $y' = 1-y^2, y_0 = 0$	8 段	10.0	4.2 -17	100	1.3
	4 段	10.0	4.2 -17	186	4.0
VI. $y' = -2xy^2, y_0 = 1$	8 段	1500.0	-9.5 -14	1503	10.9
	4 段	1500.0	-9.5 -14	1634	14.6

補外段数 8 段と 4 段では精度的には大差はないが、4 段の単区間では 8 段のに比し小さくならざるを得ないので時間がかかるから時間的に 8 段の方が有利である。

10. あとがき

i) 補外段数は表 1, 表 2 より打ち切り誤差が計算桁から外れない範囲にしたいので、単精度計算では 4 段、倍精度計算では 8 段とした。しかし方程式の性質により a_n が変わるので、表 1, 表 2 に示した境界線は打ち切り誤差値と丸め誤差領域の境界とはならない。両誤差領域の境界は、一定値ラインの出現によって数値的に見出し、 ϵ_0 が適切のときは、最初の一定値ラインの数値によって最適解もしくは、これに近い数値解が得られる。

つぎに単精度計算で 4 段で発散するが、3 段では x の大きいところまで安定してくる例題 VII の結果を表 7 に示す。この例は、R-K 法で $h=0.125$ で計算すると $x=134$ で振動が始まり、 $x=206$ をこえると計算値は正負交互の値を取り、その絶対値は増大するところが吹田氏によって指摘されている。

ii) §9.2. の数値実験例からわかるように、段数を多くすると単区間では大きくなり時間がかかからない。しかし i) の補外段数 3 段の場合のように、収束値が丸め誤差領域の下

の行になつて精度が悪くなる恐れがあるので、少々の時間がかかっても段数は小さくしておいた方がよい。

iii) 補外計算式は、(2)式を用いる

$$Y_n^k = \frac{2^{p_k} Y_{n-1}^{k+1} - Y_{n-1}^k}{2^{p_k} - 1}$$

で計算すると割り算で丸め誤差が入り、一定値ラインに到達したとき $Y_{n+1}^{k-1} \doteq Y_n^k$ (末尾で丸め誤差) となり、 $Y_{n+1}^{k+1} = Y_n^k$ とならないので注意しなければならない。ここであげた数値例は、すべて(2)式で計算したので $Y_{n+1}^{k-1} = Y_n^k$ で収束している。

iv) 単精度計算と倍精度計算では、中真法系列とR-K法系列の Y_0^k では、時間的にも精度的にも大差ないが表1、表2から4倍精度計算では中真法系列の方が有利になるのではないかと思われる。

表7. $y' = x - y^2$, $y(10) = 0$ の計算結果

Y_0^k 計算式と補外段数	ϵ_0	x_N	$(y_N - \sqrt{x_N}) / \sqrt{x_N}$	CPU 時間	使用計算機
MP 3段	0.25	3050.0039	7.6 -6	5分	HITAC 8700
	0.50	1900.0078	-2.7 -6	5	"
MP 4段	1.0	262.75 (以後 $-\infty$)	-5.6 -4	1	"
M-MP 4段	1.0	1050.0 (以後 $-\infty$)	-2.5 -4	1	"
R-K 4段	1.0	1200.0	-5.7 -6	10	FACOM 230-38
R-K-G 4段	1.0	1900.0	-2.8 -6	10	"

参考文献

- [I] STETTER, H. J. ; Analysis of discretization method of O. D. E. (Springer)
- [II] GRAGG, W. B. ; On Extrapolation Algorithms of O. I. V. P. (J. SIAM, Vol. 2, No. 3, '65)
- [III] BULIRSCH, R. & STOER, J. ; Numerical Treatment of O. D. E. by Ext. Methods, (Num. Math. 8, '66)