数理解析研究所講究録
第 383 巻 1980 年 64-76

Vector bundle 上の H^p 空間について

秋田大学 教育学部

坂 光一

序．ユークリッド空間上の H^p 空間の理論は近年，E．M. Stein and G. Weiss [1]，E．M．Stein [2]，C. Fefferman and E．M．Stein [3] 等により実解析的視点から研究され，その理論は A．W．Korányi and S．Vági [4]，R.R. Coifman and G．Weiss [5] 等の研究により，homogeneous type の空間や compact Lie group 等の他の空間上へ拡張できることを示唆している。そこでは，たとえば，一般コーシー・リーマン方程式とリース変換の関係にみられるよう，Singular integral の理論が中心的役割をはたしている。勿論 Singular integral の理論自身 maximal function 等他に重要な役割をはたすのであるが，Singular integral と微分方程式の関係に注目し，それを理論の出発点とした場合どうなるか考察したい。微分方程式として，E．M．Stein and G.Weiss [6] が指摘したように

ある種の変換群に対し不変な解をもつ一階線形微分方程式系を考えたい。このような微分方程式を考える場合この理論はもはやH^p空間の範囲をこえてしまうが，I. M. Gel'fand，R. A. Minlos and Z. Ya. Shapiro [7] にみられるよう物理学に現われる多くの重要な微分方程式がこのような微分方程式であるという事実によって，研究に価する興味ある問題と思われる。今から試みるこの考察は，この研究の一部であり完全なものでない。

第一節　準備．Gを locally compact group satisfying 2nd countable axiom で semidirect product group $G=NK$ とする。ここに，Nは normal abelian closed subgroup，Kを compact subgroup とする。このような group Gの例は K. I. Gross and R. A. Kunze [8], R. L. Lipsman [9] 等参照して下さい。$\hat{N}$をNの dual group，$\hat{N}$とKの semidirect product group を$\tilde{G}=\hat{N}K$とする。ただし，KのNの上への action を $k(n)=knk^{-1}$, $k\in K$, $n\in N$ とすれば Kの$\hat{N}$の上への action $k(\xi)=k\xi k^{-1}$, $k\in K$, $\xi\in\hat{N}$ を $\langle k(\xi), n\rangle=\langle \xi, k^{-1}(n)\rangle$ で定義する。いま(λ, E)をKの irreducible unitary representation とし，λによって induce される homogeneous vector bundle をそれぞれ $\mathbb{E}=G\times_\lambda E$,

$\tilde{\mathbb{E}} = \tilde{G} \times_\lambda E$ とする。このとき $\mathbb{E}$ 上の L^2 cross section $L^2(\mathbb{E})$ は N 上の E-valued L^2 function $L^2(N;E)$ でその G-action は $\pi(n_0 k_0) f(n) = \lambda(k_0) f(k_0^{-1}(n_0^{-1} n))$ となる。さらに $L^2(\mathbb{E}) = L^2(N;E) \cong L^2_\lambda(G;E) \equiv \{ f \in L^2(G;E) : f(gk) = \lambda(k^{-1}) f(g),\ g \in G,\ k \in K \}$ となる。同様に $L^2(\tilde{\mathbb{E}}) = L^2(\hat{N};E) \cong L^2_\lambda(\tilde{G};E) \equiv \{ f \in L^2(\tilde{G}:E) : f(\xi k) = \lambda(k^{-1}) f(\xi),\ \xi \in \tilde{G},\ k \in K \}$ となる。

$L^2(N;E) \cong L^2_\lambda(G;E)$ の同型写像は $f(n) \to \hat{f}(g)$, $\hat{f}(g) = \lambda(k^{-1}) f(n)$, $g = nk$ で与えられる。以後これらの空間は区別しないで用いる。

<u>定義1</u> $f \in L^1(N;E)$ または $f \in L^1_\lambda(G;E)$ の Fourier 変換を $\mathcal{F}f(\xi) = \int_N \langle \xi, \overline{n} \rangle f(n)\,dn$ または $\mathcal{F}f(\xi k) = \int_N \langle \xi, \overline{n} \rangle \lambda(k^{-1}) f(n)\,dn$ と定義する。ただし, $\langle\ \overline{\ }\ \rangle$ は複素共役を意味する。$\xi \in \hat{N}$.

$\tau(k)$ を $k \in K$ の left regular representation, つまり $\tau(k) f(g) = f(k^{-1} g)$, $f \in L^2_\lambda(G;E)$, また $\tau(n)$ を N による left regular representation, つまり $\tau(n) f(g) = f(n^{-1} g)$, $f \in L^2_\lambda(G;E)$ とする。

<u>Lemma 1</u> (i) $f \in L^1_\lambda(G;E)$,

$\mathcal{F}(\tau(n_0) f)(\xi k) = \langle \xi, \overline{n_0} \rangle \mathcal{F}f(\xi k)$

(ii) $\tau(k_0) \mathcal{F} = \mathcal{F} \tau(k_0)$

Lemma 2 (Plancherel and Parseval formula)

h, $f \in L^2(N;E) \cap L^1(N;E)$ とする。

(i) $\int_N \langle f(n), h(n) \rangle dn = \int_{\hat{N}} \langle \mathcal{F}f(\xi), \mathcal{F}h(\xi) \rangle d\xi$

(ii) $\int_N |f(n)|^2 dn = \int_{\hat{N}} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi$

Lemma 2 により $\mathcal{F}$ を $L^2(N;E)$ に拡張する。それも同じく $\mathcal{F}$ とかくことにする。

Lemma 3 (Multiplier theorem)

$T: L^2(N;E) \to L^2(N;E)$ bounded linear operator

N-action invariant

$\Updownarrow$

$\mathcal{F}(Tf)(\xi) = \sum_i m_i(\xi)\hat{f}_i(\xi)v_i$, となる $m_i \in L^\infty(\hat{N})$ が存在する。ただし $f(n) = \sum_i f_i(n)v_i$, $\{v_i\}$ は E の basis $\hat{f}_i$ は f_i の Fourier transform とする。

$\tau(k)$ $(k \in K)$ による $L^2(\mathbb{E})$, $L^2(\tilde{\mathbb{E}})$ の primary representation decomposition をそれぞれ, $L^2(\mathbb{E}) = \sum_{\pi \in \hat{K}} \mathcal{H}_\pi$, $L^2(\tilde{\mathbb{E}}) = \sum_{\pi \in \hat{K}} \tilde{\mathcal{H}}_\pi$ とする。ここに, $\hat{K}$ は K の irreducible unitary representation の equivalence class とする。このとき,

$\mathcal{H}_\pi = \{ \int_K \chi_\pi(k) f(k^{-1}g) dk \ ; \ f \in L^2_\lambda(G;E) \}$

$= \{ \int_K \chi_\pi(k)\lambda(k) f(k^{-1}(n)) dk \ ; \ f \in L^2(N;E) \}$

$\tilde{\mathcal{H}}_\pi = \{ \int_K \chi_\pi(k) f(k^{-1}\tilde{g}) dk \ ; \ f \in L^2_\lambda(\tilde{G};E) \}$

$= \{\int_K \chi_\pi(k)\,\lambda(k) f(k^{-1}(\xi))\,dk \;;\; f \in L^2(\hat{N}\,;\,E)\}$ となる。χ_π は $\pi \in \hat{K}$ の character とする。

$P_\pi : L^2(\mathbb{E}) \to \mathcal{H}_\pi$, $P_\pi f(g) = \int_K \chi_\pi(k) f(k^{-1}g)\,dk$,

$\tilde{P}_\pi : L^2(\hat{\mathbb{E}}) \to \tilde{\mathcal{H}}_\pi$, $\tilde{P}_\pi f(\hat{g}) = \int_K \chi_\pi(k) f(k^{-1}\hat{g})\,dk$

はそれぞれ projection map になる。

<u>Lemma 4</u> $\mathcal{F} : \mathcal{H}_\pi \to \tilde{\mathcal{H}}_\pi$ は unitary isomorphism となり，$\mathcal{F}P_\pi = \tilde{P}_\pi \mathcal{F}$ である。

<u>定義2</u> $K \supset K_0$ closed subgroup, $N_0 = \{n \in N :$ $k(n) = n,\ \forall k \in K_0\}$, $N_0 \supset C$ subset, $K_0 = \{k \in K ;$ $k(r) = r\}$, $\forall r \in C$ となるものとする。$\Sigma = K/K_0$ とおく。もし，$\Sigma \times C \to N$ $(kK_0, r) \to k(r)$ が one-to-one, onto open subset N' such that its complement in N has Haar measure zero のとき，(Σ, C) を N の polar decomposition ということにする。同様に $\hat{N}$ の polar decomposition も定義できる。以後 $N, \hat{N}$ の polar decomposition (Σ, C), $(\Sigma, \tilde{C})$ を一つ固定して考える。

<u>Lemma 5</u> $f \in L^1(N\,;\,E)$ なら

$$\int_N f(n)\,dn = \int_C \left(\int_\Sigma f(k(r))\,dk\right) dr = \int_C \left(\int_K f(k(r))\,dk\right) dr$$

となる measure dk, dr が存在する。

λのK_0への制限をλ_0とし，λ_0から induce される Σ上の homogeneous vector bundle を$\mathbb{E}_0 = K \times_{\lambda_0} E$とする。$K$の left regular representation による primary representation decomposition を $L^2(\mathbb{E}_0) = \sum_{\pi \in \hat{K}} \mathcal{H}_\pi$ とする。前にも述べたように $L^2(\mathbb{E}_0) \cong L^2_{\lambda_0}(K; E) \equiv \{f \in L^2(K; E) : f(kk_0) = \lambda_0(k_0^{-1})f(k), k \in K, k_0 \in K_0\}$ は区別しない。

<u>Lemma 6</u> $f(k_1(r)k) = f_1(r)\,\lambda(k^{-1}k_1)f_2(k_1)$ $(k_1, k \in K, r \in C)$, $f_1 \in L^2(C, dr)$, $f_2 \in \mathcal{H}_\pi$ の形の $f \in L^2(G; E)$ 全体はK_πを生成する。

(λ_0, E)をK_0の表現として irreducible unitary representation decomposition する。それを

$(\lambda_0, E) = (\lambda_1, E_1) \oplus \cdots \oplus (\lambda_p, E_p)$ とする。

<u>Lemma 7</u> 上の decomposition によって次の自然な decomposition がある。

(i) $L^2_{\lambda_0}(K; E) = L^2_{\lambda_1}(K; E_1) \oplus \cdots \oplus L^2_{\lambda_p}(K; E_p)$

(ii) $\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_{\pi 1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{\pi p}$

(iii) $L^2_{\lambda_i}(K; E_i) = \sum_{\pi \in \hat{K}} \mathcal{H}_{\pi i}$

Lemma 7によってλ_0を irreducible unitary representation of K_0としてよい。以後の節はことわらない限り同じ記号を用いる。

第二節 Spherical harmonic の一般化　$\pi \in \hat{K}$ の K_0 への制限を π_0 とする。いま λ_0 は irreducible と仮定する。λ_0 の π_0 における multiplicity を $m(\pi)$ とし，$\dim H_\pi = d(\pi)$, $\dim E = d(\lambda)$ とおく。$\{e_j\}$, $\{v_j\}$ をそれぞれ H_π, E の orthonormal basis とし，これらは compatible とする。(H_π は π の表現空間)

$t^\pi_{ij}(k) = (e_i, \pi(k)e_j)$, $k \in K$, $i, j = 1, \dots, d(\pi)$ とおく。

定理1　$Y^\pi_{ni}(k) = c \sum_{l=1}^{d(\lambda)} t^\pi_{n i_l}(k) v_l$,　$c = \sqrt{\dfrac{d(\pi)}{d(\lambda)}}$,

$n = 1, \dots, d(\pi)$,　$i = 1, \dots, m(\pi)$,　$i_l = (i-1)d(\lambda) + l$

は $\mathcal{H}_\pi$ の orthonormal basis である。

系　λ_0 が一般の場合，つまり，$\lambda_0 = \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_p$ (既約分解)のとき $L^2_{\lambda_t}(K; E_t)$ の orthonormal basis は

$\{Y^{\pi t}_{ni}\}_{\pi \in \hat{K}}$, $n = 1, \dots, d(\pi)$,　$i = 1, \dots, m_t(\pi)$,

$Y^{\pi t}_{ni}(k) = c_t \sum_{l=1}^{d(\lambda_t)} t^\pi_{n i_l}(k) v_{l(t)}$, $m_t(\pi)$ は λ_t の π_0 における multiplicity

$\dim E_t = d(\lambda_t)$, $c_t = \sqrt{\dfrac{d(\pi)}{d(\lambda_t)}}$, $\{v_{l(t)}\}$ は E_t o.n. basis。従って $L^2_{\lambda_0}(K; E)$ の orthonormal basis は $\{Y^{\pi t}_{ni}\}_{\pi \in \hat{K},\, t = 1, \dots, p,\, n = 1, \dots, d(\pi)}^{i = 1, \dots, m_t(\pi)}$ である。

注意　$N = \mathbb{R}^n$ (n次元ユークリッド空間), $K = SO(n)$, $K_0 = SO(n-1)$　$(n \geq 3)$ のとき $\lambda =$ trivial representation とすれば上の Y^π_{ni} は spherical harmonics である。

Lemma 8　$f(k_1(r)k) = f_1(r)\lambda(k^{-1}k_1)Y^{\pi t}_{ni}(k_1)$,

$f_1 \in L^2(C)$, $t = 1, \dots, p$, $n = 1, \dots, d(\pi)$, $i = 1, \dots, m_t(\pi)$

の形の $f \in L^2(G;E)$ は $\mathcal{H}_\pi$ を生成する。

Lemma 9 (i) $Y^\pi_{ni}(k_1k_2) = \sum_{l=1}^{d(\pi)} t^\pi_{nl}(k_1) Y^\pi_{li}(k_2)$

(ii) $\int_K \langle Y^{\pi t}_{ni}(k'k), Y^{\pi t}_{mi}(k)\rangle dk = c\, t^\pi_{nm}(k')$

Lemma 10 $\lambda_0 = \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_p$ (既約分解), $F_n \in L^2_{\lambda_0}(K;E)$ $n=1,\cdots,d(\pi)$ で $F_n(k_1k_2) = \sum_{i=1}^{d(\pi)} t^\pi_{ni}(k_1) F_i(k_2)$ とする。このとき $F_n(k) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m_j(\pi)} A^j_i Y^{\pi j}_{ni}(k)$, ここに $A^j_i = (d(\lambda_j)d(\pi))^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{d(\lambda_j)} f^{i_l}_{l(j)}$, $F_n(k) = \sum_{j=1}^{p} F^j_n(k)$, $F^j_n \in L_{\lambda_j}(K;E_j)$ $F^j_n(e) = \sum_{m=1}^{d(\lambda_j)} f^n_{m(j)} v_{m(j)}$, $\{v_{m(j)}\}$ は E_j の orthonormal basis, となる。e は K の単位元。

定理2 (Bochner の定理の一般化). $f_1 \in L^2(C)$ で $f(n) \equiv f(k_1(r)) \equiv f_1(r)\lambda(k_1) Y^{\pi t}_{ns}(k_1)$ のとき、$\mathcal{F}f(\xi) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m_j(\pi)} f^\pi_{ji}(\xi_0)\lambda(k_2) Y^{\pi j}_{ni}(k_2)$, $\xi = k_2(\xi_0)$ となる。ただし、$f^\pi_{ji}(\xi_0) = \int_C f_1(r) A^j_i(\xi_0, r)dr$ で $A^j_i = (d(\pi)d(\lambda_j))^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{d(\lambda_j)}\sum_{m=1}^{d(\lambda_t)} \int_K \overline{\langle \xi_0, k_1(r)\rangle}\, t^\pi_{i_l s_m}(k_1)$ $\overline{t^\lambda_{l(j)m(t)}}(k_1)dk_1$ とする。

注意. $N = \mathbb{R}^n$, $K = SO(n)$, $K_0 = SO(n-1)$, $n \geq 3$, $\lambda_1 =$ trivial のとき $p=1$, $d(\lambda)=1$, $m(\pi)=1$ (π class 1 表現とする) から上の定理2は良く知られた Bochner の定理である。特に $A(t,r) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i rt\langle 1,\xi\rangle} t^\pi_{11}(\xi)d\xi$ $= c\int_{-1}^{1} e^{-2\pi i rts} P^{(n-2)/2}(s)(1-s^2)^{(n-3)/2}ds$ (P $= c\, J_{k+\frac{n-2}{2}}(2\pi tr)$, P^λ_k Gegenbauer polynomial,

J_k Bessel function となり $f^*(t) = \int_0^\infty f_1(r) A(t, r) r^{n/2} dr$
$= c \int_0^\infty f_1(r) J_{k+\frac{n-2}{2}}(2\pi t r) r^{n/2} dr$，となる。

第三節　Boundary 上の関数に対する Multiplier 定理

Lemma 11　$L : L^2_{\lambda_0}(K;E) \to L^2_{\lambda_0}(K;E)$ は $L\tau(k) = \tau(k)L$ となる linear operator とする。このとき $L : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_\pi$ でさらに $(LY^{\pi t}_{ni})(k) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{s=1}^{m_j(\pi)} A^{\pi tj}_{is} Y^{\pi j}_{ns}(k)$ となる。ここに，$(LY^{\pi t}_{ni})(k) = \sum_{j=1}^{p} F^j_n(k)$，$F^j_n \in L^2_{\lambda_j}(K;E_j)$，$F^j_n(e) = \sum_{m=1}^{d(\lambda_j)} f^n_{m(j)} v_{m(j)}$，$A^{\pi tj}_{is} = (d(\lambda_j)d(\pi))^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{d(\lambda_j)} f^{s_l}_{l(j)}$ とする。逆に matrix $(A^{\pi tj}) = (A^{\pi tj}_{is})^{\pi tj}_{is}$ を与えたとき，$LY^{\pi t}_{ni}(k) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{s=1}^{m_j(\pi)} A^{\pi tj}_{is} Y^{\pi j}_{ns}(k)$ によって定まる，linear operator $L : L^2_{\lambda_0}(K;E) \to L^2_{\lambda_0}(K;E)$ は $L\tau(k) = \tau(k)L$ となる。

定義 3　$f \in L^2_{\lambda_0}(K;E)$，$\pi \in \hat{K}$ に対し Fourier 変換を
$(\mathcal{F}_j f(\pi))_{ni} = \int_K \langle f(k), Y^{\pi j}_{ni}(k) \rangle dk$，$j = 1, \cdots, p$，
$n = 1, \cdots, d(\pi)$，$i = 1, \cdots, m_j(\pi)$，
$\mathcal{F}_j f(\pi) = ((\mathcal{F}_j f(\pi))_{ni})_{n=1,\cdots,d(\pi);\, i=1,\cdots,m_j(\pi)}$ matrix
$\mathcal{F} f(\pi) = (\mathcal{F}_j f(\pi))_{j=1,\cdots,p}$ matrix と定義する。

Lemma 12　$L : L^2_{\lambda_0}(K;E) \to L^2_{\lambda_0}(K;E)$ で $\tau(k)L = L\tau(k)$ となる linear operator とする。さらに
$LY^{\pi t}_{ni}(k) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{s=1}^{m_j(\pi)} A^{\pi tj}_{is} Y^{\pi j}_{ns}(k)$ とおき，$A^{\pi tj} = (A^{\pi tj}_{is})_{i,s}$
$i = 1, \cdots, m_0(\pi)$，$s = 1, \cdots, m_j(\pi)$ matrix，$A^\pi = (A^{\pi tj})_{t,j}$

$t=1,\cdots,p;\ j=1,\cdots,p$ matrix とおけば $\mathfrak{F}_j Lf(\pi)=\sum_{t=1}^{p}(\mathfrak{F}_t f(\pi))A^{\pi tj}$, $\mathfrak{F}Lf(\pi) = \mathfrak{F}f(\pi)A^{\pi}$, $f\in L^2_{\lambda_0}(K;E)$ となる。

Lemma 13 $L: L^2_{\lambda_0}(K;E)\to L^2_{\lambda_0}(K;E)$, $\tau(k)L = L\tau(k)$ となる linear operator とする。$LY_{ni}^{\pi t}(k)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{s=1}^{m_j(\pi)}A_{is}^{\pi tj}Y_{ns}^{\pi j}$ とおく。
L bounded $\Leftrightarrow \sup_{\pi,t,i}\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{s=1}^{m_j(\pi)}|A_{is}^{\pi tj}|^2\right)^{1/2}<\infty$

Lemma 14 linear operator $L: L^2_{\lambda_0}(K;E)\to L^2_{\lambda_0}(K;E)$ が $L\tau(k)=\tau(k)L$ である必要十分条件は各 $\pi\in\hat{K}$ に対して $Lf(k)=\int_K h_\pi(k')f(kk'^{-1})dk' = h_\pi * f$, $\forall f\in\mathcal{H}_\pi$ となる $h_\pi\in L^2(K;\mathcal{L}(E))$ が存在することである。ここに, $\mathcal{L}(E)$は Eから Eへの linear operator 全体の空間とする。さらに, このとき, $LY^{\pi t}_{ni}=\sum_{j=1}^{p}\sum_{s=1}^{m_j(\pi)}A_{is}^{\pi tj}Y_{ns}^{\pi j}$ とおけば
$\langle h_\pi(k)v_{u(t)}, v_{u(j)}\rangle = \sum_{s=1}^{m_j(\pi)} c_t c_j A_{is}^{\pi tj}\, t^{\pi}_{i_u s_u}(k)$ となる。

定理3 $L: L^2_{\lambda_0}(K;E)\to L^2_{\lambda_0}(K;E)$ 線形写像で $\tau(k)L=L\tau(k)$を満し, さらに $L: L^2_{\lambda_j}(K;E_j)\to L^2_{\lambda_j}(K;E_j)$ $j=1,\cdots,p$ とする。このとき, $Lf(k)=h_\pi*f(k)=\int_K h_\pi(k')f(kk'^{-1})dk'$, $\forall f\in\mathcal{H}_\pi$ となる。ここに, $LY^{\pi j}_{ni}(k) = \sum_{s=1}^{m_j(\pi)}A^{\pi j}_{is}Y^{\pi j}_{ns}(k)$ とおけば, $h_\pi(k)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m_j(\pi)}\sum_{s=1}^{m_j(\pi)}A^{\pi j}_{is}h^{\pi j}_{si}(k)$, $h^{\pi j}_{is}(k)=d(\pi)\sum_{\ell=1}^{d(\lambda_j)} t^{\pi}_{i_\ell s_\ell}(k)$, $i,s=1,\cdots,m_j(\pi)$, $j=1,\cdots,p$ とする。
逆に各$\pi\in\hat{K}$に対し $Lf(k)=h_\pi*f(k)$, $\forall f\in\mathcal{H}_\pi$ $h_\pi\in L^2(K)$ の形の linear operator $L: L^2_{\lambda_0}(K;E)\to L^2_{\lambda_0}(K;E)$ は $\tau(k)L=L\tau(k)$ で $L: L^2_{\lambda_j}(K;E_j)\to L^2_{\lambda_j}(K;E_j)$

$j=1,\cdots,p$ を満す。

例 $K=SO(3)$, $K_0=SO(2)$, $N=E=\mathbb{R}^3$, $\lambda(k)=k:E\to E$, $k\in K$ とする。このとき，$\lambda_0=1+\lambda_1$（既約分解）は 1 trivial表現，$\lambda_1(k_0)=k_0:E_1\to E_1$, $k_0\in K_0$, $E_1=\mathbb{R}^2$ となる。$L^2_{\lambda_0}(K;E)=L^2(S^2)+L^2_{\lambda_1}(K;E_1)$, S^2 unit sphere で $\hat{K}$ の元は highest weight $m=0,1,\cdots$ によって定まる。それを $\pi(m)$ とかく。$L^2_{\lambda_0}(K;E)$ の orthonormal basis は $Y_n^{\pi(m)0}(k)=c_0 t_{n0}^{\pi(m)}v_0$, $Y_n^{\pi(m)1}(k)=c_1(t_{n1}^{\pi(m)}v_1+t_{n2}^{\pi(m)}v_2)$ となる。定理3の kernel function $h_{\pi(m)}\equiv h_m$ として $h_m(k)=d(\pi(m))\sum_{l=0}^{2}t_{ll}^{\pi(m)}(k)$ をとれば $\sum_{m=0}^{\infty}|n|^m h_m(k)=p(n,k)$, $|n|<1$ は poisson kernel の拡張になっている。つまり，$k=k(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ Euler angular 表示とすれば $t_{00}^{\pi(m)}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)=c\,P_m(\cos\theta)$ Legendre polynomial, $t_{11}^{\pi(m)}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)=e^{-i\varphi_2}P_{11}^{m}(\cos\theta)e^{-i\varphi_1}$, $t_{22}^{\pi(m)}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)=e^{i\varphi_2}P_{11}^{m}(\cos\theta)e^{i\varphi_1}$, $P_{11}^{m}(\mu)=K(1+\mu)P_{m-1}^{02}(\mu)$ (Jacobi polynomial) で $\sum_{m=0}^{\infty}|n|^m h_m(k)$
$=c\sum_{m=0}^{\infty}|n|^m(2m+1)P_m(\cos\theta)+K(1+\cos\theta)e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}\sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)|n|^m P_{m-1}^{02}(\cos\theta)+K(1+\cos\theta)e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\sum_{m=1}^{\infty}|n|^m(2m+1)P_{m-1}^{02}(\cos\theta)$ となる。$\sum_{m=1}^{\infty}|n|^m(2m+1)P_m(\cos\theta)$ は通常の Poisson kernel で，λ が trivial ならこの項のみである。

引用文献

[1] E. M. Stein and G. Weiss : On the theory of harmonic functions of several variables I, Acta Math., 103, 25-62 (1960)

[2] E. M. Stein : On the theory of harmonic functions of several variables II, Acta Math., 106, 137-174 (1961)

[3] C. Fefferman and E. M. Stein : H^p spaces of several variables, Acta Math., 129, 137-193 (1972)

[4] A. W. Korányi and S. Vági, Singular integrals in homogeneous spaces and some problems of classical analysis, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Math. 25, 575-648, (1971).

[5] R. R. Coifman and G. Weiss : Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogenes, Lecture Notes in Math. 242, Springer (1971)

[6]. E. M. Stein and G. Weiss : Generalization of the Cauchy-Riemann equations and representations

of the rotation group, Amer. J. Math. 90, 163-196 (1968)

[7] I.M. Gelfand, R.A. Minlos and Z. Ya. Shapiro: Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications (translation) Pergamon Press (1963)

[8] K.I. Gross and R.A. Kunze: Bessel functions and representation theory I, J. Functional Analy. 22, 73-105 (1976)

[9] R.L. Lipsman: Group representations, Lecture notes in Math. 388, Springer-Verlag (1974).