数理解析研究所講究録
第383巻 1980年 77-94

Lorentz-Zygmund 空間について.

筑波大学数学系　村松寿延

序. Zygmund空間 $L\log^+L$ と Lorentz空間とを含む函数空間を導入し，補間空間論による特徴づけを与え，いわゆる weak-type の補間定理を統一的に扱うことを目標とする.

1. 定義と基本的性質.

まず記号を説明する. 正値可測関数を重みの関数 (weight f.) と呼ぶ. φ を σ-有限測度空間 (Ω,μ) 上の重みの関数, $0<q\le\infty$, X を Banach空間とするとき $L_{q,\varphi}(\Omega,\mu;X)$ で X-値強可測で $\|f(\xi)\|_X\,\varphi(\xi)\in L_q(\Omega,\mu)$ となる f の全体を示す. 特に $\Omega=\mathbb{R}^+=\{t;\ t>0\}$, で測度が $t^{-1}dt$ のときは $L_q^*(\mathbb{R}^+;X)$ と書く.

定義1. $f(\xi)$ を (Ω,μ) 上の X-値強可測関数とするとき, $\|f(\xi)\|_X$ の再配置 (rearrangement) を $f^*(t)$ で表す.

φ を $\mathbb{R}^+$ 上の重み, $0<q\le\infty$, $0<r<\infty$ とする. このとき空間 $L_{(\varphi,q)}(\Omega,\mu;X)$ を $\varphi(t)f^*(t)\in L_q^*(\mathbb{R}^+)$ とな

る X-値強可測関数 $f(\xi)$ の全体とL準ノルムを

(1.1) $$\|f\|_{L_{(\varphi,q)}(\Omega,\mu;X)} = \|\varphi(t)f^*(t)\|_{L^*_q}$$

と定義する．また空間 $L_{(\varphi,q,r)}(\Omega,\mu,X)$ を $\varphi(t)t^{-1/r}\left(\int_0^t f^*(s)^r ds\right)^{1/r} \in L^*_q(\mathbb{R}^+)$ となる X-値強可測関数 $f(\xi)$ の全体とし，

(1.2) $$\|f\|_{L_{(\varphi,q,r)}(\Omega,\mu;X)} = \left\|\varphi(t)t^{-1/r}\left(\int_0^t f^*(s)^r ds\right)^{1/r}\right\|_{L^*_q}$$

と定義する．

特に $\varphi(t) = t^{1/p}$ $(0 < p \leqq \infty)$ のとき $L_{(\varphi,q)}$ は Lorentz空間 $L_{(p,q)}$ に一致する．

例．$\varphi(t) = t(1+\log^+(1/t))^\theta$ （ただし，$\log^+ x = \max(0, \log x)$）のとき $L_{(\varphi,1)}$ が $L(\log^+ L)^\theta$ に一致する．たとえば Bennett [2] に $\Omega = [0,1]$ の場合の証明が書いてある．

<u>注意1.</u> 上に定義した空間を Lorentz-Zygmund空間と呼ぶことを提唱したい．Bennett-Sharpley [4] は $\varphi(t) = t^\theta(1+|\log t|)^\sigma$ の場合をこの名称で述べているが，このように拡張して使うのが便利であろう．

再配置の性質，特に $\|f(\xi)\|_X$ と $f^*(t)$ とが equimeasurable であることを使うと簡単な計算により Lorentz-Zygmund 空間の基本的性質がわかる．すなわち，

<u>定理 1.</u>

(a) $\sup_{t>0} \dfrac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} = c < \infty$ ならば $L(\varphi, q)$ は完備準ノルム空間である.

(b) $L(\varphi, q, r)$ は完備準ノルム空間である. 特に $1 \leqq q \leqq \infty$, $1 \leqq r < \infty$ のとき $L(\varphi, q, r)$ は Banach 空間である.

(c) $L(\varphi, q, r) \hookrightarrow L(\varphi, q)$ (埋込は連続).

(d) $0 < p < r$ のとき $L(\varphi, q, r) \hookrightarrow L(\varphi, q, p)$.

(e) $0 < r \leqq q$ とし,

$$\sup_{t>0} \int_0^t \frac{\varphi(t)^r}{\varphi(s)^r} \frac{s}{t} \frac{ds}{s} < \infty \quad \sup_{s>0} \int_s^\infty \frac{\varphi(t)^r}{\varphi(s)^r} \cdot \frac{s}{t} \frac{dt}{t} < \infty$$

と仮定する. $q = \infty-$ のときはさらに

$$s_1 < s_2 < \cdots, \quad t_1 < t_2 < \cdots, \quad s_n \to \infty,\ t_n \to \infty,$$

$$\sup_{t \geqq t_n} \int_0^{s_n} \frac{\varphi(t)^r}{\varphi(s)^r} \frac{s}{t} \frac{ds}{s} \to 0$$

を仮定する. このとき $L(\varphi, q) = L(\varphi, q, r)$, 準ノルムは同値である.

(f) $0 < r < p \leqq \infty$ のとき $L_p = L(p, p) \neq L(t^{1/p}, p, r)$.

(g) $0 < p < \infty-$ のとき $L_p = L(t^{1/p}, \infty, p)$.

注意 2. (a) と (e) における条件は少し複雑であるが次項で述べる重みの指標を使うと簡単な十分条件が得られる. すなわち (e) の仮定が満される十分条件は "r-ind $\varphi < \frac{1}{r}$" である.

2. 函数をパラメーターとする補間空間

Lions-Peetre [10] の古典的な平均補間空間の定義において関数 t^{ξ_0} と t^{ξ_1} の代りに $\mathbb{R}^+$ 上の重み $\varphi_0(t)$ と $\varphi_1(t)$ を使うことにより補間空間 $S(\xi_0, \varphi_0, X_0 ; \xi_1, \varphi_1, X_1)$ が定義される. ただし, $0 < \xi_0 \leqq \infty$, $0 \leqq \xi_1 \leqq \infty$, X_0 と X_1 は完備準ノルム空間とする.

関数をパラメーターとする補間空間は Kalugina [9] が Peetre の K-method と J-method の一般化の形で定義しその性質を調べ Gustavsson [7] はそれを改良した結果を導いている. しかしこれらの研究で条件の述べ方や方法はやや複雑・冗長である. Bennett [3] が $\mathbb{R}^+$ 上の再配置不変なノルムを使って Peetre の方法を一般化した理論において, Boyd [5] による函数空間の指標を使ったようにこの場合にも対応する重みの関数の指標により条件が簡単明瞭に表現できる.

定理2. φ を $\mathbb{R}^+$ 上の重みの関数とする. $t > 0$ のとき

$$(2.1) \qquad \tilde{\varphi}(t) = \operatorname*{ess.sup}_{s>0} \frac{\varphi(st)}{\varphi(s)}$$

と定義する. すべての $t > 0$ について $\tilde{\varphi}(t)$ が有限のとき,

$$(2.2) \qquad \alpha = \lim_{t \to 0} \frac{\log \tilde{\varphi}(t)}{\log t} = \sup_{0<t<1} \frac{\log \tilde{\varphi}(t)}{\log t}$$

$$(2.3)\quad \beta = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \tilde{\varphi}(t)}{\log t} = \inf_{t>1} \frac{\log \tilde{\varphi}(t)}{\log t}$$

$$(2.4)\quad -\infty < \alpha \leqq \beta < \infty .$$

この定理は $\log \tilde{\varphi}(t)$ が $\tau = \log t$ に関して劣加法的であることから証明される.

定義 2. 上の α を φ の左指標 (left index), β を右指標 (right index) といい $l\text{-ind}\,\varphi$, $r\text{-ind}\,\varphi$ と表わす. 特にこの2数が一致するときそれを φ の指標, $\mathrm{ind}\,\varphi$, という.

例. $\varphi(t) = t^{\theta}(1+|\log t|)^{\sigma}$ の指標は θ, $\varphi(t) = t^{\theta}(1+\log^{+} 1/t)^{\sigma}$ の指標も θ である.

定義により

$$(2.5)\quad l\text{-ind}\,\varphi_1 + l\text{-ind}\,\varphi_2 \leqq l\text{-ind}(\varphi_1\varphi_2) \leqq r\text{-ind}(\varphi_1\varphi_2) \leqq r\text{-ind}\,\varphi_1 + r\text{-ind}\,\varphi_2,$$

$$(2.6)\quad l\text{-ind}\left(\frac{1}{\varphi}\right) = -r\text{-ind}\,\varphi,\quad r\text{-ind}\left(\frac{1}{\varphi}\right) = -l\text{-ind}\,\varphi$$

$l\text{-ind}\,\psi > 0$, φ と ψ が単調非減少ならば

$$(2.7)\quad l\text{-ind}\,\varphi\circ\psi \geqq (l\text{-ind}\,\varphi)(l\text{-ind}\,\psi),$$
$$r\text{-ind}\,\varphi\circ\psi \leqq (r\text{-ind}\,\varphi)(r\text{-ind}\,\psi).$$

この指標を使うと, 補間空間 $S(\xi_0, \varphi_0, X_0; \xi_1, \varphi_1, X_1)$ が定義されるための条件は

(2.8) $\quad l\text{-ind}\,\varphi_0 > 0 > r\text{-ind}\,\varphi_1$,

または $\quad l\text{-ind}\,\varphi_1 > 0 > r\text{-ind}\,\varphi_0$

である.

パラメーター変換の公式, 包含定理, 双対定理, 反復補間定理など古典的な平均補間の場合と同様な結果が成立する.

<u>注意.</u> $1 \leq q_0 = q_1 = q$, $\varphi_0(t) = \varphi(t)$, $\varphi_1(t) = t\varphi(t)$,
$r\text{-ind}\,\varphi < 0 < 1 + l\text{-ind}\,\varphi$ の場合 $S(q_0, \varphi_0, X_0; q_1, \varphi_1, X_1)$ は再配置不変なノルム $\|\cdot\|_{L^*_{q,\varphi}}$ に対する Bennett [3] の意味での補間空間に一致する. Peetre の定理により古典的な平均補間空間は Peetre の方法による補間空間に等しいことがわかっているが, 関数をパラメータとするときに同様に上記の場合に帰着できるかどうかはわかっていない. したがって我々の補間空間が Bennett [3] の理論の枠内にあるとはいえない.

<u>3. 補間定理.</u>

Lorentz-Zygmund 空間の補間空間を計算する. その応用として Lorentz-Zygmund 空間の補間空間論による特徴づけを与える.

<u>定理 3.</u> (Ω, μ) を σ-有限測度空間, $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ を $\mathbb{R}^+$ 上の重みの関数, φ_0, φ_1 の指標は有限, $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ は単調増加, $l\text{-ind}\,\varphi_1 > 0$, $l\text{-ind}\,(\varphi_0/\varphi_1) > 0$ とし,

$0 < q \leqq \infty$,　$0 < r_0 \leqq \infty$,　$0 < r_1 \leqq \infty$ と仮定する．
$r_1 = \infty$ のときは "$l\text{-}ind\,\varphi_1 > 0$" を省き，"$\sup_{0<t<1} \tilde{\varphi}_1(t) < \infty$" を仮定する．このとき

$$f \in S(q, \psi_0, L_{(\varphi_0, r_0)}(\Omega, \mu) ; q, \psi_1, L_{(\varphi_1, r_1)}(\Omega, \mu))$$

となるための必要十分条件は

$$(3.1)\quad \psi_0(t) \| f^*(s) \chi_{[0, \gamma(t))}(s) \varphi_0(s) \|_{L^*_{r_0}(\mathbb{R}^+_s)} + \psi_1(t) \| f^*(s) \chi_{[\gamma(t), \infty)}(s) \varphi_1(s) \|_{L^*_{r_1}(\mathbb{R}^+_s)} \in L^*_q$$

である．f の補間空間での準ノルムと (3.1) の左辺の L^*_q での準ノルムとは同値である．

ただし，$\gamma(t) = \alpha^{-1}(\psi_1(t)/\psi_0(t))$，$\alpha(s) = \varphi_0(s)/\varphi_1(s)$，
χ_A は集合 A の定義関数を表わす．

証明．(3.1) が十分条件であることを示すのには，

$$v_0(t, \xi) = \begin{cases} f(\xi) - f^*(\gamma(t)) \operatorname{sgn} f(\xi) & , \ |f(\xi)| > f^*(\gamma(t)) \text{ のとき}, \\ 0 & , \ \text{その他}, \end{cases}$$

$$v_1(t, \xi) = f(\xi) - v_0(t, \xi)$$

とおき，v_0 と v_1 の再配置を $v_0^*(t, s)$, $v_1^*(t, s)$ で表わすとき，

$$v_0^*(t, s) = \chi_{(0, \gamma(t))}(s) \{ f^*(s) - f^*(\gamma(t)) \}$$

$$v_1^*(t, s) = \chi_{(0, \gamma(t))} f^*(\gamma(t)) + \chi_{[\gamma(t), \infty)}(s) f^*(s)$$

となることを使えばよい．

次に (3.1) が必要条件であることを示す.

$f(\xi) = v_0(t, \xi) + v_1(t, \xi)$ a.e. ξ.

$\| v_0^*(t, s)\, \varphi_0(s) \|_{L^*_{r_0}} \psi_0(t) \in L^*_q$,

$\| v_1^*(t, s)\, \varphi_1(s) \|_{L^*_{r_1}} \psi_1(t) \in L^*_q$,

とする. よく知られた不等式

(3.2) $f^*(2s) \leqq v_0^*(t, s) + v_1^*(t, s)$

を使うと, $g_0(t, s) = \chi_{[0, \gamma(t))}(s)$, $g_1(t, s) = 1 - g_0(t, s)$

とおくとき,

$$\psi_0(t) \| f^*(2s)\, g_0(t, s)\, \varphi_0(s) \|_{L^*_{r_0}} + \psi_1(t) \| f^*(2s)\, g_1(t, s)\, \varphi_1(s) \|_{L^*_{r_1}}$$

$$\leqq \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} \psi_j(t) \| v_k^*(t, s)\, g_j(t, s)\, \varphi_j(s) \|_{L^*_{r_j}}$$

を得る. $l\text{-ind}\, \alpha > 0$, 再配置の単調非増加性, $l\text{-ind}\, \varphi_0 > 0$ からわかる不等式

(3.3) $\varphi_0(s) \leqq c_r \left(\int_0^s \varphi_0(\sigma)^r \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{1/r}$, $(0 < r < \infty-)$,

(3.4) $\varphi_0(s) \geqq c'_r \left(\int_0^s \varphi_0(\sigma)^r \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{1/r}$, $(0 < r < \infty-)$

を使うと,

$$\psi_0(t) \| v_1^*(t, s)\, g_0(t, s)\, \varphi_0(s) \|_{L^*_{r_0}} \leqq c\, \psi_1(t) \| v_1^*(t, s)\, \varphi_1(s) \|_{L^*_{r_1}},$$

$$\psi_1(t) \| v_0^*(t, s)\, g_1(t, s)\, \varphi_1(s) \|_{L^*_{r_1}} \leqq c\, \psi_0(t) \| v_0^*(t, s)\, \varphi_0(s) \|_{L^*_{r_0}}$$

を得る. したがって,

$\psi_0(t)\|f^*(2s)\,g_0(t,s)\,\varphi_0(s)\|_{L^*_{r_0}} + \psi_1(t)\,\|f^*(2s)\,g_1(t,s)\,\varphi_1(s)\|_{L^*_{r_1}}$

は L^*_q に属する. $f^*(2s)$ を $f^*(s)$ におきかえるためには

$\varphi_j(2s) \leqq \bar{\varphi}_j(2)\,\varphi_j(s) \quad (j=0,1)$, $g_0(t,2s) \leqq g_0(t,s)$,

$$\psi_1(t)\,\|f^*(s)\,\varphi_1(s)\{g_0(t,\tfrac{s}{2}) - g_0(t,s)\}\|_{L^*_{r_0}}$$
$$\leqq \psi_0(t)\,\|f^*(s)\,\varphi_0(s)\,\chi_{[\gamma(t),\,2\gamma(t)]}(s)\|_{L^*_{r_1}}$$
$$\leqq c\,\psi_0(t)\,\|f^*(s)\,\varphi_0(s)\|_{L^*_{r_1}}$$

を使えばよい. 証明終.

系. φ を $\mathbb{R}^+$ 上の重みの関数, $0<p<\infty$, $0<q\leqq\infty$ のとき $\psi_0(t)=t^{-1/p}\varphi(t)$, $\psi_1(t)=\varphi(t)$ とおくと,

$$S(q,\psi_0,L_p(\Omega,\mu);\,q,\psi_1,L_\infty(\Omega,\mu)) = L_{(\varphi,q,p)}$$

特に, $p<q$, $r\text{-ind}\,\varphi < 1/p$ のとき これは $L_{(\varphi,q)}$ に等しい.

証明. $\varphi_0(t)=t^{1/p}$, $\varphi_1(t)=1$, $r_0=p$, $r_1=\infty$ のとき, $\alpha(t)=t^{1/p}$, $\gamma(t)=\alpha^{-1}(\psi_1(t)/\psi_0(t))=t$ となり条件 (3.1) は

$$\varphi(t)\,t^{-1/p}\left(\int_0^t f^*(s)^p\,ds\right)^{1/p} \in L^*_q,$$
$$\varphi(t)\sup_{s\geq t} f^*(s) \in L^*_q,$$

となり, これは $f\in L_{(\varphi,q,p)}$ と同値である.

この系は直接証明することもできる.

φ_0/φ_1 について単調性がないとかなり複雑になるが，$r_0=r_1=r$ の場合について次の結果が証明できる．

定理 4. (Ω,μ) を σ-有限測度空間，$\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1$ を $\mathbb{R}^+$ 上の重みの関数とする．$0<r<\infty$，$0<q\leqq\infty$，と仮定する．

$$\Phi_j(s) = \left(\int_0^s \varphi_j(\sigma)^r \frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{1/r} \qquad (j=0,1)$$

と定め，

$$(3.5)\qquad \omega(t,s)=\begin{cases}\psi_0(t)\varphi_0(s), & \psi_0(t)\Phi_0(s)\leqq\psi_1(t)\Phi_1(s)\ \text{のとき}\\ \psi_1(t)\varphi_1(s), & \psi_0(t)\Phi_0(s)>\psi_1(t)\Phi_1(s)\ \text{のとき}\end{cases}$$

と定義する．このとき，

$$f\in S(q,\psi_0,L_{(\varphi_0,r)}(\Omega,\mu);q,\psi_1,L_{(\varphi_1,r)}(\Omega,\mu))$$

となるための必要十分条件は，

$$\int_0^\infty \{f^*(s)\,\omega(t,s)\}^r \frac{ds}{s} \quad\in L_q^*(\mathbb{R}_t^+)$$

である．

次項において定理3，定理4を使って具体例について補間空間を計算する．補間空間がわかれば作用素の補間定理により種々の type の補間定理が導かれるのである．

4. 補間空間の例

例 1. $\psi_0(t)=t^{-\theta}$，$\psi_1(t)=t^{1-\theta}$，$\varphi_0(t)=t$，$\varphi_1(t)=t(1+\log^+\frac{1}{t})$.

$r_0 = r_1 = 1$ のとき.

$$\Phi_0(t) = t \quad , \quad \Phi_1(t) = \begin{cases} 2t - t\log t & 0 < t \leqq 1 \\ t+1 & t \geqq 1 \end{cases}$$

$t^{-\theta}\Phi_0(s) \leqq t^{1-\theta}\Phi_1(s)$ を解くと,

$0 < t \leqq \frac{1}{2}$ のとき $1/(2-\log s) \leqq t$

$\frac{1}{2} \leqq t < 1$ のとき, $s/(1+s) \leqq t$.

ゆえに $$\gamma(t) = \begin{cases} e^{2-1/t} & 0 < t \leqq 1/2 \\ t/(1-t) & 1/2 \leqq t < 1. \end{cases}$$

したがって

$$f \in S(q, \psi_0, L(\varphi_0, 1) ; q, \psi_1, L(\varphi_1, 1))$$

となるための条件は

$$\chi_{(0,1)}(t)\left\{\int_0^{\beta(t)} t^{-\theta} f^*(s)\,ds + \int_{\beta(t)}^{\infty} t^{1-\theta} f^*(s)\left(1+\log^+\frac{1}{s}\right)\right\} + \chi_{[1,\infty)}\int_0^{\infty} t^{-\theta} f^*(s)\,ds \in L_q^*$$

となる. これを計算して,

$$S(q, \psi_0, L(\varphi_0, 1) ; q, \psi_1, L(\varphi_1, 1)) = L_1 \cap L(\varphi_{\theta, q}, q, 1)$$

を得る. ただし,

$$(4.1) \quad \varphi_{\theta,q}(t) = \begin{cases} t(1+\log^+ 1/t)^{\theta - 1/q} & , 0 < t < 1, \\ 0 & , \text{その他}, \end{cases}$$

である. 特に $q = 1$ のときは $L(t(1+\log^+ 1/t)^\theta, 1)$ に一致する. $\Omega = [0, 1]$ の時が Bennett [2] 定理 A である.

例1でも，また前項の議論でも次の補題1を使う．

補題1．(Ω_1, μ_1)，(Ω_2, μ_2) を σ-有限測度空間，$K(x, y)$ を $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上の可測関数で

$$\operatorname*{ess.sup}_{y} \left\{ \int |K(x, y)|^r d\mu_1(x) \right\}^{1/r} = C_1 < \infty,$$

$$\operatorname*{ess.sup}_{x} \left\{ \int |K(x, y)|^r d\mu_2(y) \right\}^{1/r} = C_2 < \infty,$$

$0 < r \leqq q \leqq \infty$，　$0 < r < \infty$，ならば，

$$\left\| \left\{ \int |K(x, y) f(y)|^r d\mu_2(y) \right\}^{1/r} \right\|_{L_q(\Omega_1, \mu_1)} \leqq C_1^{\alpha} C_2^{1-\alpha} \|f\|_{L_q(\Omega_2, \mu_2)}, \quad \left(\alpha = \frac{r}{q} \right)$$

である．

この補題の特別の場合が Hardy の不等式である．

次の例では次の補題2を使って評価する．この補題は $r \leqq q$ の場合は上の補題により直ちにわかる．$r > q$ の場合には不等式

$$(4.2) \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right)^{\sigma} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\sigma} \quad (0 < \sigma < 1)$$

を使えばわかる．

<u>補題2．</u> $\omega(t, s)$ を $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ 上の重みの関数，$\varphi(t)$ は $\mathbb{R}^+$ 上の重みの関数，$0 < r < \infty$，$0 < q \leqq \infty$，とし，

$$\operatorname*{ess.sup}_{t>0}\int \frac{\omega(t,s)^r}{\varphi(s)^r}\frac{ds}{s} = C_2^r < \infty, \quad \operatorname*{ess.sup}_{s>0}\int \frac{\omega(t,s)^r}{\varphi(s)^r}\frac{dt}{t} = C_1^r < \infty$$

とし，$0 < q < r$ のときはさらに，

$$\tilde{\varphi}(t) = \operatorname*{ess.sup}_{s>0}\frac{\varphi(ts)}{\varphi(s)}$$ が局所有界，

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(\int_1^a \frac{\omega(t,a^n s)^r}{\varphi(a^n s)^r}\frac{ds}{s}\right)^{q/r} = C_3^q < \infty$$

がある $a>1$ について成立するとする．このとき

$$\left\| \left[\int \{f^*(s)\,\omega(t,s)\}^r \frac{ds}{s}\right]^{1/r} \right\|_{L_q^*} \leqq C\|f^*(t)\,\varphi(t)\|_{L_q^*}$$

である．

系．$0<q\leqq\infty$，$0<r<\infty$，φ と ψ は擬有限の $\mathbb{R}^+$ 上の重みの関数とする．

(a) $r\text{-ind}\,\varphi<0$ のとき，

$$\left\|\varphi(t)\left(\int_0^t [f^*(s)\psi(s)]^r\frac{ds}{s}\right)^{1/r}\right\|_{L_q^*} \leqq C\,\|f^*(t)\varphi(t)\psi(t)\|_{L_q^*}.$$

(b) $l\text{-ind}\,\varphi>0$ のとき，

$$\left\|\varphi(t)\left(\int_t^\infty [f^*(s)\psi(s)]^r\frac{ds}{s}\right)^{1/r}\right\|_{L_q^*} \leqq C\,\|f^*(t)\varphi(t)\psi(t)\|_{L_q^*}.$$

系は Persson [12] Lemma 2.5 にほぼ対応している．証明をみれば ψ に関する条件は

$$\operatorname*{ess.sup}_{1\leqq t\leqq a}\left\{\operatorname*{ess.sup}_{s>0}\ \psi(st)/\psi(s)\right\} < \infty$$

よいことがわかる．この形では Persson の補題の拡張になっている．φ に関する Persson の仮定はほとんどその g のときと同じであるが，それより強くて少々複雑である．

この系により直ちに次の定理がわかる．

<u>定理5.</u> $r\text{-ind}\,\varphi < \frac{1}{r}$ ならば $L_{(\varphi, g, r)} = L_{(\varphi, g)}$.

<u>例2.</u> $0 < g_0 < \infty$, $0 < g_1 \leqq \infty$, φ と φ_0 と φ_1 は $\mathbb{R}^+$ 上の重みの関数で $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ が単調増加，

$$r\text{-ind}\,\varphi_1 < l\text{-ind}\,\varphi \leqq r\text{-ind}\,\varphi < l\text{-ind}\,\varphi_0$$

とする．$g_1 = \infty$ のときはさらに $\sup_{t>1} \tilde{\varphi}_1(t) < \infty$ を仮定する．このとき，$\psi_j(t) = \varphi(t)/\varphi_j(t)$ $(j=0,1)$ にとると，

$$S(g, \psi_0, L_{(\varphi_0, g_0)}; g, \psi_1, L_{(\varphi_1, g_1)}) = L_{(\varphi, g)}. \tag{4.3}$$

特に，$1 < p < \infty$, $1 \leqq g \leqq \infty$ とすれば，

$$(L_{(1,\infty)}, L_{(\infty,\infty)})_{\theta, g} = L_{(p, g)} \quad \left(\tfrac{1}{p} = 1-\theta\right). \tag{4.4}$$

（計算） $0 < g_1 < \infty$ の場合．定理3により

$$f \in S(g, \psi_0, L_{(\varphi_0, g_0)}; g, \psi_1, L_{(\varphi_1, g_1)})$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(a)} & \psi_0(t)\left(\int_0^t |f^*(s)\varphi_0(s)|^{g_0} \frac{ds}{s}\right)^{1/g_0} \in L^*_g \\ \text{(b)} & \psi_1(t)\left(\int_t^\infty |f^*(s)\varphi_1(s)|^{g_1} \frac{ds}{s}\right)^{1/g_1} \in L^*_g \end{cases}$$

であることがわかる．（$\because$ $\psi_1/\psi_0 = \varphi_0/\varphi_1$ により $\nearrow (t)$）

仮定および補題2系を使うとこの条件は $\psi f^* \in L^*_q$ と同値であることがわかる.

$q_1 = \infty$ のとき，上の条件(b)は

$$\psi_1(t)\ \operatorname*{ess.sup}_{s \geq t} f^*(s)\,\varphi_1(s) \in L^*_q$$

となる. $C = \sup_{t>1} \tilde{\varphi}_1(t)$ とおくと, $t \leqq s$ のとき

$$\varphi_1(s) \leqq \varphi_1(t)\,\tilde{\varphi}_1\!\left(\frac{s}{t}\right) \leqq C\varphi_1(t)$$

であり, f^* は非増加であるから $t \leqq s$ のとき

$$f^*(s)\,\varphi_1(s) \leqq C f^*(t)\,\varphi_1(t)$$

である. よって この場合も同じ結果を得る.

補間空間の定義と変数変換により，次の補題がわかる:

<u>補題3.</u> φ_0とφ_1を条件(2.8)を満たす$\mathbb{R}^+$上の重みの関数, $\alpha(t)$を$\mathbb{R}^+$上の関数で

(i) αは$\mathbb{R}^+$上の単調増加または単調減少の正値関数,

(ii) αは$\mathbb{R}^+$上の可算個の点を除き微分可能,

(iii) αは$\mathbb{R}^+$の各点で右導関数α'_+と左導関数α'_-を持ち, 定数c_1, c_2が存在して, すべての$t \in \mathbb{R}^+$で,

$$(4.5)\qquad 0 < c_1 \leqq \left|\frac{t\,\sigma'_+(t)}{\sigma(t)}\right|, \left|\frac{t\,\sigma'_-(t)}{\sigma(t)}\right| \leqq c_2$$

とする. $0 < q_0 \leqq \infty$, $0 < q_1 \leqq \infty$, X_0とX_1を準ノルム空間, $\psi_j(t) = \varphi_j(\alpha(t))$ $(j=0,1)$ とおくと,

$$S(q_0, \varphi_0, X_0; q_1, \varphi_1, X_1) = S(q_0, \psi_0, X_0; q_1, \psi_1, X_1)$$

である.

例 3. φ_0 と φ_1 を $\mathbb{R}^+$ 上の重みの関数とし, $\varphi_0/\varphi_1 = \alpha$ が補題 3 の条件をみたすとする.

$$0 < \theta < 1, \qquad \varphi = \varphi_0^{1-\theta}\varphi_1^{\theta}$$

にとり, $\psi_j = \varphi/\varphi_j$ $(j = 0, 1)$ とおく. $\psi_0 = \alpha^{-\theta}$, $\psi_1 = \alpha^{1-\theta}$ であるから, たとえば α が単調増加のときは例 2 により

$$(4.6) \qquad (L_{(\varphi_0, q_0)}, L_{(\varphi_1, q_1)})_{\theta, q} = L_{(\varphi, q)}$$

を得る. α が単調減少ならば φ_0 と φ_1 とを入れかえて考えれば同じ結果を得る.

特に $\varphi_0(t) = t(2 + \log^+ 1/t)$, $\varphi_1(t) = 1$ にとると, $\alpha(t) = t(2 + \log^+ 1/t)$ は補題 3 の条件をみたすから $L_{(\varphi_0, 1)} = L\log^+ L$ に注意して,

$$(4.7) \qquad (L\log^+ L, L_\infty)_{\theta, q} = L_{(\varphi_\theta, q)},$$

ただし, $\varphi_\theta(t) = t^{1-\theta}(2 + \log^+ 1/t)^{1-\theta}$,

を得る.

同様に, Bennett-Sharpley [4] で扱っている $L^{pq}(\log L)^{\alpha}$, すなわち我々の記号で $L_{(\varphi_{p,\alpha}, q)}$ $(\varphi_{p,\alpha}(t) = t^{1/p}(1 + |\log t|)^{\alpha})$ の補間空間が計算できる.

REFERENCES

[1] Bennett,C.; Estimates for weak-type operators, Bulletin Amer. Math. Soc.,79 (1973),933-935.

[2] Bennett,C.; Intermediate spaces and the class $L\log^+L$, Arkiv för Mat., 11(1973),215-228.

[3] Bennett, C.; Banach function spaces and interpolation methods. I. The abstract theory, J. Functiona Analysis, 17(1974),409-440. II. Interpolation of weak-type operators, "Linear Operators and Approximation," (Edited by P.L. Butzer and B. Sz.-Nagy), Birkhäuser, Basel, 1974,129-139. III. Hausdorf-Yong estimates, J. Approximation Theory, 13 (1975),267-275.

[4] Bennett, C. and Sharpley, R. C.; Weak-type inequalities in analysis, "Linear spaces and approximations"(edited by P. L. Butzer and B. Sz.-Nagy), Birkhäuser,Basel,1978,151-162.

[5] Boyd, D. W.; Indices of funcion spaces and their relationship to interpolation, Canad. J. Math., 21(1969),1245-1254.

[6] Fehér, F.; Interpolation und Indexbedingungen auf rearrangement-invarianten Funcionenräumen. I. Grundlagen und K-Methode, J. Functional Analysis, 25(1977),147-161. II. Die J-Methode und ihr Zusammenhang mit der K-Methode, J. Functional Analysis, 28(1978),21-32.

[7] Gustavsson, J.; A funcion parameter in connection with interpolation of Banach spaces, Math. Scand.,42(1978),289-305.

[8] Heinig, H. P. and Vaughan, D.; Interpolation in Orlicz spaces involving weights, J. Math.Analysis and Appl.,64(1978),79-95.

[9] Kalugina, T. F.; Interpolation of Banach spaces with a functional parameter. The reiteration theorem, Vesnik Moskov. Univ. Ser.1, Mat. Mech., 30(6)(1975), 68-77.

[10] Lions, J. L. et Peetre, J.; Sur une classe d'interpolation, Publ. Math. Inst. H. E. S., 19(1964), 5-68.

[11] Milman, M.; Interpolation of operators of mixed weak-strong type between rearrangement invariant spaces, Indiana Univ. Math. J., 28(1979), 985-992.

[12] Persson, L. E.; On weak-type theorem with applications, Proc. London Math. Soc. (3)38(1979),295-308.