数理解析研究所講究録
第 384 巻 1980 年 92-99

生命表と死因について

福島県立医科大学　　南條 善治

1. はじめに

ある死因による死亡数が全く除去されたとすると寿命はどの位延長するかを論ずるのに，生命表を用いて全死因に対する平均余命と，ある死因による死亡数が全くなくなったと仮定して計算された平均余命との差を求めることが多い。そのための計算法としては Greville その他（[1]，[2]，[6]）によるものが知られている。しかしこれら従来の方法を用いるとき，およそ次のことが問題になる。

(1) ある死因Aが除去されたとして計算された場合の平均余命の延長を d_A とし，死因Bが除去されたとして計算された平均余命の延長を d_B とする。次に死因Aと死因Bが同時に除去された場合の平均余命の延長を d_{A+B} とすると，一般に

$$d_A + d_B < d_{A+B}$$

となり，等号は成立しない。すなわち，平均余命の延長で

は２つの死因の間に加法性がない。いくつかの死因を考えても同様である。

(2) 今迄の方法では、ある死因による死亡数がすべて除去された場合を論じているが、これは現実的なものでない。むしろ、いくつかの死因による死亡数のうち、その何％かが減少する場合を論ずるのに関心がある。

そして、この場合、ある死因ｅによる死亡が除去された場合の従来の計算法による寿命の延びの、例えば、100分の1で、その死因ｅの1％が除去された場合の寿命の延びとすることは出来ない。

(3) いくつかの死因の独立性を仮定している。之は計算上やむを得ない仮定であった。

我々の場合も(3)の仮定を除くわけにはいかないが、

Keyfitz [4] は仮定(1)，(2)に関して次の様に考えた。すなわち、彼はある死因による死亡数がごくわずか減少した時寿命がどの位延長するかを測るためのあるパラメターを作った。このパラメターはいくつかの死因の間で加法性をもっている。

我々の方法は Keyfitz の考えの一般化であって、ある死因による死亡数が、各年令階級に必ずしも一様でなく、何％か

が減った時寿命がどの位延長するかを，前以って作成しておいたパラメターの表を用いることにより，容易に計算出来る様にした。

2. Keyfitz の結果の一般化，

先ず Keyfitz（[4]，[5]）の考えを簡単に説明しよう。

x 才に達した人が次の dx 年の間に死ぬ確率は $\mu(x)dx$ であるとき，之が $\mu^*(x)dx=\mu(x)(1+\delta)dx$ に変ったとする．ここで δ は負の小さな量である。例えば，$\delta=-0.01$ ならば，これはすべての年令階級で，すべての死因による死亡数が1％だけ減少した場合を意味する。このとき x 才まで生きる確率は

$$l(x)=\exp\left[-\int_0^x \mu(x)\,dx\right]$$

から

$$l^*(x)=\exp\left[-\int_0^x \mu(x)(1+\delta)\,dx\right]=l(x)^{1+\delta}$$

になる。この最後の式は、Taylor の定理により $\delta=0$ の近傍で近似的に

$$l(x)\,(1+\delta\log l(x))$$

に等しい。また出生時の平均余命は　$\mathring{e}_0=\int_0^\omega l(x)\,dx$

から

$$\mathring{e}_0^*=\int_0^\omega l^*(x)\,dx$$

に変る。従って

$$(\mathring{e}_0^* - \mathring{e}_0)/\mathring{e}_0 = \int_0^\omega (l^*(x) - l(x))\,dx \Big/ \int_0^\omega l(x)\,dx$$

$$= -\delta\left(\int_0^\omega -l^*(x)\log l(x)\,dx \Big/ \int_0^\omega l(x)\,dx\right)$$

$$= -\delta H,$$

すなわち，全死因による死亡数が/％減少するとき，$\mathring{e}_0$ は H％増加することを示している。同様に死因 i による死亡率が $\mu^{(i)}(x)$ から $\mu^{(i)}(x)(1+\delta)$ に変ったとすると，x才まで生きる確率は $l(x)$ から

$$l(x)[l^{(i)}(x)]^\delta \doteqdot l(x)[1+\delta\log l^{(i)}(x)]$$

に変る。こゝで $l^{(i)}(x)$ はx才まで生きる確率で，その生存者はすべて死因 i でいつかは死ぬ運命にある。云い変えれば，

はx才以上において死因 i でいつかは死ぬ確率である。

従って上と同じ方法で

$$(\mathring{e}_0^* - \mathring{e}_0)/\mathring{e}_0 = -\delta H^{(i)}$$

をうる。こゝに

$$H^{(i)} = -\int_0^\omega l(x)\log l^{(i)}(x)\,dx \Big/ \int_0^\omega l(x)\,dx$$

である。これは死因 i による死亡が/％減少した時 $\mathring{e}_0$ は $H^{(i)}$ ％増加することを示している。

以上で Keyfitz の考えの説明を終る。

さて死亡率が各年令階級で必ずしも一様に減少するとは限

らない我々の場合を説明する。Grevilleによれば生命表において死因iが全くなくなった場合x才の人が更にn年間生きる確率${}_np_x^{(-i)}$は近似的に

$${}_np_x^{(-i)} = {}_np_x^{\,1-{}_nr_x^{(i)}}$$

で表わされることが知られている。こゝに${}_np_x$すべての死因を考えた時の，x才の人が更にn年間生きる確率であり，また年令階級$(x, x-n+1)$における全死因および死因iによる死亡数をそれぞれ${}_nD_x$，${}_nD_x^{(i)}$とするとき${}_nr_x^{(i)} = {}_nD_x^{(i)}/{}_nD_x$である。

我々の場合は死因iによる死亡が年令階級$(x, x-n+1)$で$-100\,\delta_x$ %減少すると，この年令階級における生存確率は

$${}_np_x^{\,1+{}_nr_x^{(i)}\delta_x} \quad (\delta_x < 0)$$

で表わされる。

従って死因iからの死亡数が年令階級$0\sim4$，$5\sim9$，……，$80\sim84$，$85+$ でそれぞれ$-\delta_0, -\delta_5, \cdots, -\delta_{85}$だけ減少したとすれば，$x$才まで生きる確率は

$$\begin{aligned} l^*(x) &= {}_5p_0^{\,1+{}_5r_0^{(i)}\delta_0} \times {}_5p_5^{\,1+{}_5r_5^{(i)}\delta_5} \times \cdots\cdots \times {}_5p_{x-5}^{\,1+{}_5r_{x-5}^{(i)}\delta_{x-5}} \\ (2.1) \qquad &= ({}_5p_0\;{}_5p_5 \cdots\cdots {}_5p_{x-5})\left({}_5p_0^{\,{}_5r_0^{(i)}}\right)^{\delta_0}\left({}_5p_5^{\,{}_5r_5^{(i)}}\right)^{\delta_5} \cdots \left({}_5p_{x-5}^{\,{}_5r_{x-5}^{(i)}}\right)^{\delta_{x-5}} \end{aligned}$$

となる。

これはもし$\delta_0 = \delta_5 = \cdots = \delta$ の場合Keyfitzの式$l(x)(l^{(i)}(x))^{\delta}$に相当するものである。こゝでTaylorの定理を用いて

$$
\begin{aligned}
l^*(x) &= {}_5p_0\,{}_5p_5 \cdots {}_5p_{x-5}\,(1+\delta_0 \log_5 p_0^{{}_5r_0^{(i)}})(1+\delta_5 \log_5 p_5^{{}_5r_5^{(i)}})\cdots \\
&\qquad \times (1+\delta_{x-5} \log {}_5p_{x-5}^{{}_5r_{x-5}^{(i)}}) \\
&\fallingdotseq ({}_5p_0 \cdots {}_5p_{x-5})(1+\delta_0 \log_5 p_0^{{}_5r_0^{(i)}} + \cdots + \delta_{x-5} \log {}_5p_{x-5}^{{}_5r_{x-5}^{(i)}})
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

をうる。この式は　各 δ_K が十分小なるときよい近似式を与える。ゆえに

$$
\mathring{e}_0^* - \mathring{e}_0 = \int_0^{\omega} l^*(x)\,dx - \int_0^{\omega} l(x)\,dx \tag{2.3}
$$

は　$\delta_0, \delta_5, \cdots\cdots, \delta_{85}$ の一次式で表わされる：

$$
(-\delta_0)c_0^{(i)} + (-\delta_5)c_5^{(i)} + \cdots + (-\delta_{85})c_{85}^{(i)}.
$$

従ってこの式から死因 i に対し係数 $c_0^{(i)}, c_5^{(i)} \cdots,$　δ_{85} を前以って計算しておけば直ちに出生時における平均余命の延長 $\mathring{e}_0^* - \mathring{e}_0$ を求めることが出来る。$\mathring{e}_x^* - \mathring{e}_x$ に対しても同様である。

我々の方法は Keyfitz[3] による他の結果すなわち死亡率 ${}_nq_x$ が $\Delta {}_nq_x$ だけ変化した時の $\mathring{e}_0$ への影響を示す公式と殆んど同等なものであることを注意しよう。

3. 応用例といくつかの注意.

例として1970年日本男子の2つの死因 B 19（がん），および B30（脳血管疾患）に対する係数 $c_K^{(i)}$ の表の一部を次に示す。用いられたデータは1970年の厚生省による完全生命表と死亡統計である。この表の用い方を説明しよう。

まず B19 による死亡数又は死亡率がすべての年令階級で3％

Table. the coefficients $c_k^{(i)}$ for B19 and B30
Japanese males, 1970

Start of Age Interval	coeffi-cients	causes of death B19	B30
Total	c	2.02632	2.46930
0	c_0	0.02698	0.00530
5	c_5	0.01705	0.00148
10	c_{10}	0.01338	0.00158
15	c_{15}	0.01855	0.00352
20	c_{20}	0.02115	0.00448
25	c_{25}	0.02680	0.00958
30	c_{30}	0.03874	0.01798
35	c_{35}	0.05910	0.04426
40	c_{40}	0.08999	0.07757
45	c_{45}	0.13889	0.10699
50	c_{50}	0.19812	0.16027
55	c_{55}	0.26542	0.23360
60	c_{60}	0.31843	0.33045
65	c_{65}	0.32470	0.41371
70	c_{70}	0.25360	0.44192
75	c_{75}	0.14763	0.35570
80	c_{80}	0.05458	0.18977
85	c_{85}	0.01322	0.07116

B19: Malignant Neoplasms
B30: Cerebrovascular Disease

減少したとする場合には C に 0.03 をかけるだけで $\mathring{e}_0$ の増加量 0.061 をうる：

$$2.02632 \times 0.03 = 0.061.$$

もう一つの例としてB19による死亡率が50才以上で4%減少し、それ以外では2%減少したとするならば

$$0.02\times(c_0+\cdots+c_{45})+0.04\times(c_{50}+\cdots+c_{85})=0.072$$

が $\mathring{e}_0$ の増加量である。

またB30の死亡率が60才以上で3%減少したとすれば $\mathring{e}_0$ は

$$0.03\times(c_{60}+c_{65}+\cdots\cdots+c_{85})=0.054$$

だけ増加することになる。

もし上の2つの場合を同時に考えるときは，上の2つの結果を合計すればよい。すなわち

$$0.072 + 0.054 = 0.126 (年)$$

が $\mathring{e}_0$ の増加量となる。

我々の計算では死因の独立性を仮定している。ある死因による死亡数の減少が $\mathring{e}_0$ に及ぼす影響はかなり小さい。もし独立性の仮定がなされなければ，さらに小さくなるだろう。Keyfitz の方法でもしある死因の死亡が全くなくなると仮定した場合の影響は Greville の方法によるものにくらべ少し小さい。また我々の方法によるものは Keyfitz による影響よりごくわずか小さい。

もし死因の独立性を考慮に入れるとき，我々の方法による結果が平均余命にある死因による死亡が何%かが減少した時及ぼす影響の上限と考えることが出来る。

文献

[1] Greville, T.N.E. (1948), Mortality Tables analysed by Cause of Death. Record of the American Institute of Actuaries 37; 283-294.

[2] Greville, T.N.E. (1954), On the Formula for the L-Function in a Special Mortality Table Eliminating a Given Cause of Death. Transactions of the Society of Actuaries vol. 6:1, 1-5.

[3] Keyfitz, Nathan.(1968), Introduction to the Mathematics of Population. Addison-Wesley, Reading, Mass.

[4] Keyfitz, Nathan.(1977), What difference would it make if cancer were eradicated? An examination of the Taeuber Paradox. Demography 14; 411-418, 1977.

[5] Keyfitz, Nathan. (1977), Applied Mathematical Demography, John Wiley & Sons, New York.

[6] Preston, Samuel H., Keyfitz, Nathan, and Schoen, Robert. (1972), Causes of Death: Life Tables for National Populations. Studies in Population Series, Seminar Press, New York.