数理解析研究所講究録
第386巻 1980年 30-41

ステファン問題の古典解

東北大 理 半沢英一

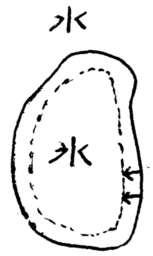
1．（一相）ステファン問題は氷の溶解の数学的モデルでその方程式は次のような考えのもとにたてられます。

(1) unknown は氷の形状の変化とする。

(2) 氷の温度は$0°C$とする。（氷の温度分布まで考えるのが二相問題）

(3) 水温$u°C$は拡散方程式$(\partial_t - \Delta)u = 0$に従う。

(4) 氷の境界は水温の法線方向勾配に比例した速さで溶けていく。



これは一つの典型的な自由境界問題で約90年の歴史をもち，今日まで多くの研究がなされています。その研究状況においていちぢるしいと思われることは，空間2次元以上の場合古典的な意味での解の存在（もちろん時間局所的）が証明されていなかったことです。現実にわれわれがみる氷の溶解は

3次元ステファン問題に対応しているわけですから，素朴な未解決問題がここにあるわけです。ここに古典的というのは，(4)から氷の表面が少くとも一階の微係数をもつということです。弱解がリプシッツ連続となることは多くの場合にいえて，ゆえに上の問題は"not so open"という人がいますが，リプシッツ連続では古典的な意味での解とはいえません。

筆者はナッシュの陰関数定理を用いることによって2次元以上のステファン問題についても古典解が存在することを証明しました．ここでは技術的細部にたちいることはやめ，ナッシュの陰関数定理とステファン問題との関連ということに焦点をしぼり，次の三つの問を設定しそれに答えるという形で解説をします。

問1　ナッシュの陰関数定理とは何か？

問2　なぜ2次元以上のステファン問題にナッシュの陰関数定理が必要なのか？

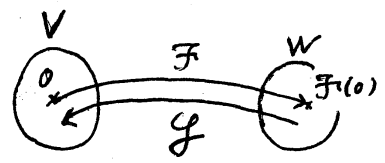
問3　ナッシュの陰関数定理を使用することがステファン問題の性格をどのように明らかにしているか？

問3はそれが単なる形式的な応用ではなく発見法的にはたらいたことをいいたいための設問です。

2．陰関数定理の説明からはじめます。次の定理は大学の

教養課程で学ぶものです。

陰関数定理. $\mathbb{R}^d$をd次元ユークリッド空間, Vを$\mathbb{R}^d$での0の近傍, $\mathcal{F}$はVから$\mathbb{R}^d$への写像で, ①連続的微分可能, ② $\det(\partial \mathcal{F}_i/\partial x_j) \neq 0$ on V, なるものとする。このとき$\mathcal{F}(0)$の近傍Wと$\varphi: W \longrightarrow V$がとれて$\mathcal{F}\circ\varphi = id.$とできる。



上記の定理は全く努力を要さず無限次元バナッハ空間に拡張され, 多くの関数方程式の解がそれによって求まるということは周知のことです。この場合$\mathcal{F}$をバナッハ空間Eでの0の近傍Vからバナッハ空間Fへの写像, ①を線型化可能 i.e. フレッシェ微分可能, ②を$\rho\in V$, $\delta G\in F$に対して線型化方程式$D\mathcal{F}(\rho)\delta\rho = \delta G$が解$\delta\rho\in E$をもつということになおしたとき, $\mathcal{F}(0)$が十分小さいならば$\mathcal{F}(\rho)=0$の解$\rho\in V$の存在が保証されるわけです。こうしてみると上記の定理は非線型方程式の可解性を線型化方程式のEでの可解性に帰着せしめる原理ともいえます。

上の「Eでの」という限定をおとせないでしょうか。というのは具体的な問題で

$$V\subset C^m,\quad \mathcal{F}: V \longrightarrow C^{m-k},\quad 当然\ D\mathcal{F}(\rho): C^m \longrightarrow C^{m-k}$$

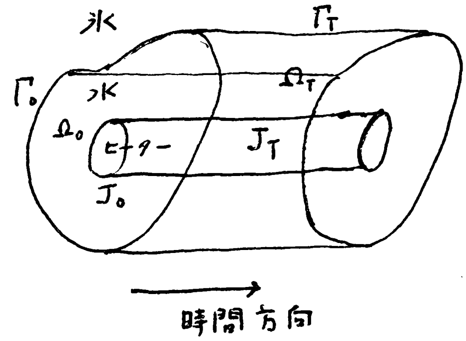
であり, $D\mathcal{F}(\rho)\delta\rho=\delta G$も解けるのだが, 解$\delta\rho$が$C^m$で求まらずよりregularityの悪いところでしかえられない i.e.

$$[D\mathfrak{F}(\rho)]^{-1}: C^{m-k} \longrightarrow C^{m-l}, \quad l>0$$

でしかないということがおこるからです。このような現象を derivative loss といいます。ナッシュは derivative loss がおこっているときでも陰関数定理が成立することを証明しました。つまり $\mathfrak{F}(0)$が十分小さいとき，一般に $\mathfrak{F}(\rho)=0$ の可解性は $D\mathfrak{F}(\rho)\delta\rho=\delta G$ の可解性に帰着されます。derivative loss の無い場合は通常の，ある場合はナッシュの陰関数定理によってです。ここで注意しますが，ナッシュの陰関数定理をみられた方はそれがもっと複雑なものであったといわれるでしょう。確かにそれは検証がそれ程容易でないいくつかの仮定を要求します。ただそれらの検証は，応用する問題の特殊性と独立に，使う関数空間たついての技術的議論によって可能と思われます。（ここは専門家が体系だてなければならないところ） したがいここでは上のようにいいきります。これが問1の答です。

こうしてみると，問2は「ステファン問題を線型化して解こうとするとき，なぜ1次元では derivative loss がおこらず，2次元以上ではおこるか？」ということですし，問3はおおげさな話ではなく「ステファン問題を線型化して微分することにより何がわかるか？」という高校数学的設問であることがわかります。

3. ステファン問題を数学的に定式化します。以下でてくる領域の境界や関数は適当なだけなめらかとします。氷を外側にとって次のような設定で考えます。



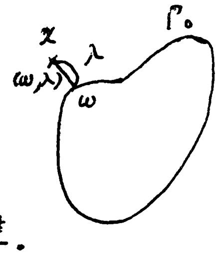
Ω_0; R^nの有界領域，最初の水の部分を表す。

J_0; Ω_0の内部境界，ヒーターの表面を表す。

Γ_0; Ω_0の外部境界，氷の表面を表す。

$T>0$として，$\Omega_T=\Omega_0\times[0,T]$，$J_T=J_0\times[0,T]$，$\Gamma_T=\Gamma_0\times[0,T]$とする。

Γ_0の近傍の点xにはR^nの標準座標$(x_1,\cdots,x_n)$の他に次のように(ω,λ)座標を導入します。



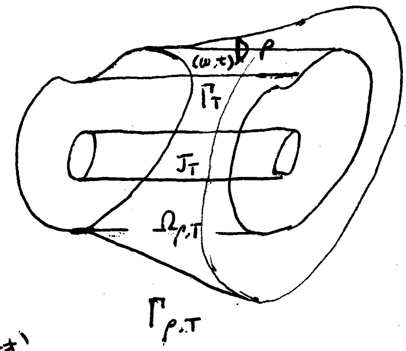
$\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_{n-1})$; xに最も近いΓ_0上の点のΓ_0での局所座標。

λ; xに最も近いΓ_0上の点とxとの距離。

ステファン問題のunknownは氷の形状の変化でした。それは数学的にはΓ_T上の十分小さい関数ρで$\rho|_{t=0}=0$となるものにより

$$\Gamma_{\rho,T}=\{(\omega,\rho(\omega,t),t)\,;\,(\omega,t)\in\Gamma_T\}$$

と表されます。ここに$(\omega,\rho(\omega,t))$は上記の(ω,λ)座標です。



そこでこのようなρをわれわれの問題の unknown とします。また次のように領域$\Omega_{\rho,T}$とΓ_Tの近傍での関数Φ_ρを導入します。

$\Omega_{\rho,T}$; $\Gamma_{\rho,T}$とJ_Tとで囲まれる領域.

Φ_ρ ; $\Phi_\rho(x,t)=\lambda(x)-\rho(\omega(x),t)$, ここに$(\omega(x),\lambda(x))$は$x$の$(\omega,\lambda)$座標.

$\Gamma_{\rho,T}$は$\Phi_\rho(x,t)=0$という方程式で表されます。

以上の準備をすると, ρの運動を記述する方程式は, 序文でいったことを数式でかいて次のようになります。

$$\begin{cases} \text{I}. & (\partial_t-\Delta)u=0 \text{ in } \Omega_{\rho,T}. \\ \text{II}. & u|_{t=0}=a_0, \text{ ここに } a_0 \text{ は } \Omega_0 \text{ 上の非負値関数}. \\ \text{III}. & u=b_0 \text{ on } J_T, \text{ ここに } b_0 \text{ は } J_T \text{ 上の非負値関数}. \\ \text{IV}. & u=0 \text{ on } \Gamma_{\rho,T}. \\ \text{V}. & \partial_t\Phi_\rho - c_0\langle \operatorname{grad}\Phi_\rho, \operatorname{grad}u\rangle = 0 \text{ on } \Gamma_{\rho,T}, \\ & \text{ここに } c_0 \text{ は正定数}, \langle\ ,\ \rangle \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ での標準内積}. \end{cases}$$

II, IIIはそれぞれ最初の水温とヒーターからの温度供与がデータとして与えられていることの数式化です。ここにa_0とb_0は適当な compatibility condition をみたしているとします。上の系でuも unknown といえるわけですが, uはI〜IVからρで決まる関数ともみなせ, ρのみが unknown ともいえ

るわけです。以下この見方をとります。今，Γ_T 上の十分小さく初期値が 0 の関数 ρ に，Γ_T 上の関数

$$(\omega, t) \longmapsto [\partial_t \Phi_\rho - c_0 \langle \mathrm{grad}\, \Phi_\rho, \mathrm{grad}\, u \rangle](\omega, \rho(\omega, t), t)$$

を対応させる非線型作用素 $\mathcal{F}$ を考えると，I ～ V は $\mathcal{F}(\rho) = 0$ とかけます。

4. 適当な仮定と適当な関数空間の設定のもとで，T が十分小さいとき $\mathcal{F}(0)$ は小さいとできます。したがい $\mathcal{F}(\rho) = 0$ の解の存在をいうには，通常のものにせよナッシュのものにせよ陰関数定理によって，線型化方程式 $D\mathcal{F}(\rho)\,\delta\rho = \delta G$ が解けることをいえばよいわけです。線型化方程式が具体的にはどんな形をしているかというと，ある程度直観的にわかるのですが，次のような系になります。信用して下さい。

$$\begin{cases} \text{I}'. & (\partial_t - \Delta)\,\delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_{\rho,T}. \\ \text{II}'. & \delta u|_{t=0} = 0. \\ \text{III}'. & \delta u = 0 \quad \text{on } J_T. \\ \text{IV}'. & \delta u + (\partial_\lambda u)\,\delta\rho = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\rho,T}. \\ \text{V}'. & \mathcal{H}\,\delta\rho = -c_0 S\, \partial_\lambda \delta u + \delta G \quad \text{on } \Gamma_{\rho,T}, \\ & \text{ここに } \mathcal{H} \text{ は } \Gamma_{\rho,T} \text{ 上の } \partial_t + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\omega, t)\,\partial_{\omega_i} + a_0(\omega, t) \\ & \text{という形の微分作用素，} S \text{ は } \Gamma_{\rho,T} \text{ 上の正値関数.} \end{cases}$$

上記の系において，$\Gamma_{\rho,T}$ の座標として Γ_T の座標を使っていま

す。そのことから $\delta\rho$, δG は $\Gamma_{\rho,T}$ の上の関数とみなしています。V′の右辺に δu の ∂_{ω_i} 微分がないようにできるのは，Ⅳの $u=0$ on $\Gamma_{\rho,T}$ からⅤの右辺に u の ∂_{ω_i} 微分がないとみなせるからです。Ⅰ〜Ⅴのときと同様，δu はⅠ′〜Ⅳ′から $\delta\rho$ で決まる関数とみなしています。

Ⅰ′〜Ⅴ′を解くために，これを $\delta\rho$ と δu の連立方程式と考え，中学数学的に未知数を一つ消します。単独一階線型偏微分方程式は特性曲線上で線型常微方程式となるから，Ⅴ′は

$$\text{V}''.\quad \delta\rho = -c_0\mathcal{H}^{-1}S\partial_\lambda\delta u + \mathcal{H}^{-1}\delta G$$

とかきなおせます。ここに $\mathcal{H}^{-1}$ は初期値 0 の解を対応させているとします。V″をⅣ′に代入すると次の δu のみの系がえられます。

$$\begin{cases} \text{I}''.\ (\partial_t-\Delta)\delta u = 0 \ \text{ in } \Omega_{\rho,T}. \\ \text{II}''.\ \delta u|_{t=0} = 0. \\ \text{III}''.\ \delta u = 0 \ \text{ on } J_T. \\ \text{IV}''.\ \delta u - c_0(\partial_\lambda u)\mathcal{H}^{-1}S\partial_\lambda\delta u = -(\partial_\lambda u)\mathcal{H}^{-1}\delta G \ \text{ on } \Gamma_{\rho,T}. \end{cases}$$

こうして $D\mathcal{F}(\rho)\delta\rho = \delta G$ を解くことは上記のⅠ″〜Ⅳ″を解くことに帰着されました。ここが証明の技術的難関で，解法をみていくことはできませんが以下のことを信用して下さい。

方程式の tangential part i.e. S のついている部分のみを問題とします。ノルムは放物型方程式のシャウダー評価で使

う，時間方向の regularity を通常の2倍に weight づけたヘルダー・ノルムとします。そのとき I'〜IV'は次のように解けます。

(1) 一般に $\delta G \longmapsto \delta u$ は regularity をあげもさげもしないで保つ作用素となる。

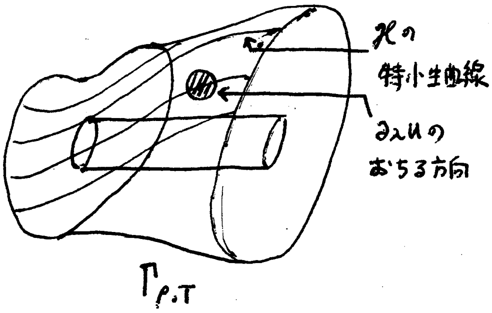
(2) $n=1$ のときは $\delta G \longmapsto \delta u$ は2だけ regularity をあげる。

なぜ(1)と(2)で差異が生じるかは，$n=1$ のとき $\mathcal{H}$ が $\partial_t + a_0(t)$ となり $\mathcal{H}^{-1}$ が regularity を2あげている（weight に注意）ことから納得してもらえると思います。この δu を V'に代入することによって

$$[D\mathfrak{F}(\rho)]^{-1} : \delta G \longmapsto \delta\rho$$

をえます。

5．こうして，1次元ステファン問題では derivative loss がおこらず，2次元以上ではおこる理由がわかります。$\mathfrak{F}$は regularity を2おとしているので，derivative loss がないということは $\delta G \mapsto \delta\rho$ が regularity を2あげているということです。2次元以上の場合は $\delta G \longmapsto \delta\rho$ が regularity をあげるどころかおとしていることが，V'の中の $\mathcal{H}^{-1}[S\partial_\lambda \delta u]$



$\Gamma_{\rho,T}$

の形からわかります。そこではδGに対してδuであがりさがりがなく，$\partial_\lambda \delta u$で1おち，$\mathcal{H}^{-1}$で$\mathcal{H}$の特性曲線にそってあがるのですが，$\partial_\lambda \delta u$のおち方は$\mathcal{H}$の特性曲線にそっておちているのではないので，ここに本質的な*loss*が生じているわけです。1次元の場合はδGに対してδuで2あがり，$\partial \delta u$で1さがり，$\mathcal{H}^{-1}$で2あがるので，結局3あがり，*loss*は生じません。これで問2の答がえられました。

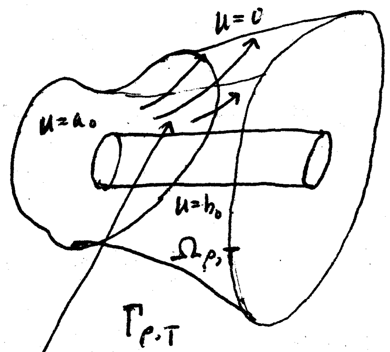
6．ステファン問題を線型化することによって何がわかったかを考えます。前節の考察がその一つの答です。そこで2次元以上のステファン問題の難しさの性格が明らかになっています。つまり領域内の拡散方程式と境界上の一階方程式がどちらから解いても（ここでは一方からしか解いてないが，もう一方は明らか）他方が非有界部分としてあらわれ，その結果*derivative loss*が生じています。（このことはどんな類の問題にナッシュの陰関数定理が有効かを暗示している。）

最後にもう一ついっておきたいのは，これが証明の中で一番面白いと本人は思ったところですが，I″～IV″をとく際に，単に物理的な限定条件，せいぜい数学的には氷の単調減少を保証する程度の条件と思われた$a_0 \geq 0$，$b_0 \geq 0$が，I″～IV″が可解であるための条件となっていることがわかったことです。

ちょっと説明すると，Ⅰ'〜Ⅳ'を解く過程で，Ⅳ'の左辺の形式的変形

$$\delta u - c_0(\partial_\lambda u)\mathcal{H}^{-1}S\partial_\lambda\delta u = S^{-1}[\mathcal{H}-c_0S(\partial_\lambda u)\partial_\lambda]\mathcal{H}^{-1}\delta u$$

の中に現れる作用素 $\mathcal{H}-c_0S(\partial_\lambda u)\partial_\lambda$ を $\Omega_{\rho,T}$ に拡張して，$t=0$ で初期条件が与えられているコーシー問題をとかなければならない局面に出会います。この場合 $t=0$ で Ω_0 から出発する特性曲線の族が $\Omega_{\rho,T}$ をカバーしていなければなりません。それは $-c_0S(\partial_\lambda u)$ が $\Gamma_{\rho,T}$ で非負だと保証されます。c_0 は正定数，Sは正値関数だから，$\partial_\lambda u\leq 0$ on $\Gamma_{\rho,T}$ ということです。これは $u=0$ on $\Gamma_{\rho,T}$ ですから，$a_0\geq 0$, $b_0\geq 0$ と拡散方程式の最大値原理からいえます。この考察はステファン問題の方程式が数学的になかなかよくできていることを示しているようにも思えます。上記のことがらが問3の答になっていることを希望します。



$\mathcal{H}-c_0S(\partial_\lambda u)\partial_\lambda$の特性曲線

参考文献.

(1) 山口昌哉・野木達夫，ステファン問題，産業図書，数理解析とその周辺シリーズ17.

(2) Ei-ichi Hanzawa, Classical solutions of the Stefan problem, to appear in Tohoku Math. J..