

ある Reaction-diffusion 方程式について

東大・教養 増田久弥

1. 2種の生物の、互に影響を及ぼしあうの増殖を記述する常微分方程式の Kolmogorov 型は、

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = U M(U, V) \\ \frac{dV}{dt} = V N(U, V) \end{cases} \quad (1)$$

である。変数 U, V は、各個体群の統数を表わす。 U, V が、空間領域 Ω に連続的に分布しているとき、 U, V に対応する空間密度 u, v が興味の対象になる。それは、

$$U(t) = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} u(x, t) dx ; \quad V(t) = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} v(x, t) dx$$

によつて、 U, V と関係づけられる。もし2つの母集団が単純な拡散を受けているとすれば、次の偏微分方程式系を満たす：

$$\begin{cases} u_t = v_1 \Delta u + u M(u, v) \\ v_t = v_2 \Delta v + v N(u, v) \end{cases}, x \in \Omega, t > 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0) = a(x), \quad v(x, 0) = b(x) \quad (2')$$

ここで、 v_1, v_2 は非負の定数である。さらに、 $a(x), b(x)$ は整合条件を満たす十分滑らかな非負関数、境界条件は

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad t > 0, x \in \partial \Omega \quad (3)$$

を課する。この境界条件は Ω の境界を越えては移住がないと解釈される。

この報告は、解の存在から、十分大きい時間の経過後の解の挙動をとりあつて、数学的である。生態系の観点の興味からいえば、基礎的なことにはすぎない。(生態系についての詳細は、

[1] R.M. May, Stability and Complexity in Model Ecosystems, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1973)

[2] J. Maynard Smith, Models in Ecology, Cambridge (1974)

を参照して下さい。)

ここでは、(2) をさらに限定しよう。まず次の2つの方程式を考へる。

2. Rosenzweig-MacArthur 方程式,

方程式 (2) の非線形項を次の如く分ける。

$$u M(u, v) = f(u) - \phi(u, v)$$

$$v N(u, v) = g(v) + \psi(u, v)$$

$$\therefore \text{②} \quad f(u) = u M(u, 0);$$

$$\phi(u, v) = -u (M(u, v) - M(u, 0));$$

$$g(v) = v N(0, v);$$

$$\psi(u, v) = v (N(u, v) - N(0, v)).$$

f, g, ϕ, ψ に対し ②, ③ の仮定を仮定する。

$$\text{仮定 1.} \quad \phi_u(u, v) > 0, \quad \psi_v(u, v) < 0 \quad (\forall u, v > 0)$$

$$\text{仮定 2.} \quad \exists c > 0 \text{ s.t. } f(u) = 0 \quad (\forall u > c)$$

$$\text{仮定 3.} \quad \sup_{v > 0} v N(0, v) < 0$$

$$\text{仮定 4.} \quad \exists k > 0; \quad k \phi(u, v) = \psi(u, v)$$

(仮定 4 が特徴的である。)

このように仮定を満たす非線形項をもつ方程式 (2) を、

Rosenzweig-MacArthur 方程式と云う。

④ \Rightarrow ②, Conway-Smoller は [SIAM J. A.M. 33 (1977), 673-686] で研究した。更に、Alikakos は [Comm. P.D.E. 4 (1979), 827-868] で次の結果を示した。

仮定 5. $\exists \sigma (\geq 1)$; $\phi(u, v) \leq p(u) v^\sigma$

($p(u)$ は u につき単調関数)

仮定 6. ν_1, ν_2 は正数

とする。

Alibakos の結果; 上の仮定 1 ~ 6 を仮定する。これら上、

$$\sigma < \frac{m+2}{m} \quad (m: \text{空間次元}) \quad (4)$$

を仮定するならば、(2) の大域解は存在し、有界である。すなわち、

$$\sup_{x,t} u(x,t) < +\infty, \quad \sup_{x,t} v(x,t) < +\infty.$$

しかし、上の σ に対する条件 (4) はいかにも強い。実際、

(4) は必要ないことが示し得た。

定理 1. 仮定 1 ~ 6 の下で (2) の有界な大域解が存在する。

3. Martin の問題

これは Ecology で大切な次の方程式を考えた。

$$\begin{cases} u_t = \nu_1 \Delta u + u^\beta v \\ v_t = \nu_2 \Delta v - u^\beta v \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 ν_1, ν_2 は正定数、 β は正定数 ≥ 1 。

"(5), (2), (3) の有界な大域解の存在を示せ" というのが、

11) の Martin の問題である。この n に対し、Alikakos は $\beta < \frac{n+2}{n}$ のとき、解はない (しかし、我々は次の定理の成立を知り):

定理 2. 任意の $\beta \geq 1$ に対し、(5), (2'), (3) は有界な大域解をもたない ($L^\infty(\Omega)$ の相対性)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} (a(x) + b(x)) dx$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$$