数理解析研究所講究録
第 386 巻 1980 年 89-108

劣微分作用素の差の項を持つ発展方程式の解の漸近挙動について

東海大 理·数　大谷 光春

§1. 序

H を実ヒルベルト空間とし、その内積·ノルムを、夫々 $(\cdot,\cdot)_H$, $|\cdot|_H$ であらわす。 $\Phi(H)$ を H から $(-\infty,+\infty]$ への下半連続凸関数で $\not\equiv +\infty$ なるものの全体とする。定義より $\varphi\in\Phi(H)$ に対して、φ の有効領域 $D(\varphi):=\{u\in H \mid \varphi(u)<+\infty\}$ は、空にならない。又、φ の劣微分 $\partial\varphi$ を

$$\begin{cases} \partial\varphi(u)=\{f\in H \mid \varphi(v)-\varphi(u)\geq (f,v-u)_H \text{ for } \forall v\in D(\varphi)\}, \\ D(\partial\varphi)=\{u\in H \mid \partial\varphi(u)\neq\phi\} \end{cases}$$

で定義すると $\partial\varphi$ は H から H への、一般には多価の極大単調作用素となる (See Brézis[2])。 この小論では、$\varphi^i\in\Phi(H)$ に対して、簡単のために $\varphi^i\geq 0$ かつ $\partial\varphi^i$ は一価として $(i=1,2)$、次の H に於ける抽象 Cauchy 問題を考える。

$$(\text{C.P.})\begin{cases} (1)\quad \frac{du}{dt}(t)+\partial\varphi^1(u(t))-\partial\varphi^2(u(t))=0, \quad t>0, \\ (2)\quad u(0)=a. \end{cases}$$

例えば、Ω を $\mathbb{R}^n$ 内の滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とし、

$$\varphi^1(u) = \begin{cases} \frac{1}{p}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p dx & \text{if } u \in W_0^{1,p}(\Omega), (p \geq 2), \\ +\infty & \text{if } u \in L^2(\Omega) \setminus W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

$$\varphi^2(u) = \begin{cases} \frac{1}{2+\alpha}\int_\Omega |u(x)|^{2+\alpha} dx & \text{if } u \in L^{2+\alpha}(\Omega), (\alpha \geq 0), \\ +\infty & \text{if } u \in L^2(\Omega) \setminus L^{2+\alpha}(\Omega), \end{cases}$$

と置けば $\varphi^1, \varphi^2 \in \Phi(L^2(\Omega))$ となり、(C.P.) は次の非線型初期値・境界値問題 (Pr.NH) と同等となる。

$$(\text{Pr.NH}) \begin{cases} (3) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta_p u(x,t) + |u|^\alpha u(x,t), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ (4) \quad u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ (5) \quad u(x,0) = a(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

ここで、$\partial\varphi^1(u) = -\Delta_p u := -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ で $p=2$ の場合には Δ_p は通常のラプラシアンに一致する。

以下で問題とするのは、(C.P.) の強解の $t \to +\infty$ とした時の漸近挙動である。ここでいう強解とは次の意味である。

<u>定義 1</u> $u(t) \in C([0,T]; H)$ が <u>$[0,T]$ に於ける (C.P.) の強解</u>であるとは、$du(t)/dt$ かつ $\partial\varphi^i(u(t))$ $(i=1,2)$ が $L^2(0,T; H)$ に属し、$u(t)$ が (1) - (2) を満す時をいう。

<u>今迄の結果</u>: (Pr.NH) や (C.P.) の漸近挙動を考える上でまず注意しなければならない事は、初期値がある条件を満す時には、その解のある種のノルムが有限時間で ∞ になる(<u>爆発する</u>)

場合があり、一方、初期値がある意味で充分小さければ、解は爆発せずに大域的に存在する場合がある事である。
これ等の現象について、今迄に多くの研究がなされている。まず、(P.NH) について、$p=2$ の場合には、Ito [5], Kaplan[6], Fujita[3], ……, Matano [9], Alikakos [1] ; $p \geq 2$ の場合には、Tsutsumi [13], Levine-Payne [8] (共に弱解について), 又、(C.P.) についてはKoi-Watanabe [7], Ishii [4], 拙論 [10] などがある。
これ等のうち、爆発現象を扱ったものをその方法論的見地から分類すれば、次の4つになる (堤氏の分類に依る)。

1) 比較定理法: 文字通り比較定理を用いるもので、考える方程式の半線型性がフルに活用される。[5], [9] がこれに当る。

2) Kaplan-Fujitaの方法: $-\Delta$ の最小固有値に対応する固有関数 ϕ_0 の正値性と Jensen の不等式を巧みに利用する方法で、$(u(x,t), \phi_0)_{L^2(\Omega)}$ の爆発が示される。[6], [3] がこれである。

3) Energy 法: [13] に於いて初めて提案された、Energy 不等式と Sobolev の不等式を組み合せて活用する方法で、[4], [1] がこの系統である。

4) Concavity 法: Levine に依って提案された方法で、Energy 不等式が本質的な役割をする点で、3) の方法の variant とも言えるが、テクニカルな部分で 3) のものとは、かなり異なる。[8] がその典型である。

ここで、我々が問題とするのは、次の２つの問題である。

(I) 各爆発現象間の相互関係(同等性など)を調べよ。

一口に爆発といっても、色々な位相での爆発が考えられる訳で(maximum-norm ([5],[9]), L^2-norm ([13],[1]), $W_0^{1,p}$ or L^q $(q>2)$ -norm ([4],[8]) の爆発など)、これ等の相互関係、同等性について考えよ、という事である。この種の研究は(筆者の知る限りでは)極めて少なく、最近 Alikakos [1] が (Pr.NH) の $p=2$ の場合について $L^{2+\alpha}$-norm での爆発と L^2-norm でのそれとの同等性を、初期値に適当な条件を課して調べている。

(II) 可能な漸近挙動をすべて決定せよ。

例えば、[4]では「初期値 a が stable set W に入っていれば、解は 0 に decay し、blowing-up set V に入っていれば、ある位相で爆発する。」という様に、$a \in W \cup V$ に対しての挙動はわかっているが、その他の初期値 ($H \setminus (W \cup V)$ は充分多くの内点を持つ) に対する、解の漸近挙動については、まだ研究されていない訳で、その場合の可能な挙動をすべて決定せよ、という事である。この種の問題に関しては、Matano [9] の (Pr.NH) で $p=2$, 空間次元 $n=1$, 非線型項 $|u|^{\alpha}u$ がもっと一般的な形である場合についての詳しい研究がある。

これ等の問題に対する我々の方法は、標語的に言えば、"Energy-Compactness法 + φ^1, φ^2の凸性の利用" という事になろう。

§2. Local existence

(C.P.) の強解の(小域的)存在については、既に [7], [4], [10,11] で研究されているが、ここでは [10,11] の結果を証明なしで、述べる事にする。まず、次の仮定を導入しよう。

(A.1) 任意の $L<+\infty$ に対して、$\{u\in H \mid |u|_H+\varphi^1(u)\le L\}$ は H でコンパクト。

(A.2) $D(\partial\varphi^1)\subset D(\partial\varphi^2)$ かつ 次を満す $k\in[0,1)$ と $M(\cdot)\in\mathcal{M}$ が存在する。

(6) $|\partial\varphi^2(u)|_H \le k|\partial\varphi^1(u)|_H + M(\varphi^1(u)+|u|_H)$ for $\forall u\in D(\partial\varphi^1)$,

ここで、(この小論を通じて) $\mathcal{M}$ は $[0,\infty)$ で定義された、単調増加関数の全体、をあらわすものとする。

定理 1　(A.1), (A.2) の仮定のもとに、任意の初期値 $a\in D(\varphi^1)$ に対して $|a|_H+\varphi^1(a)$ のみに依る(単調減少的に依存)正数 T が存在して、(C.P.) は $[0,T]$ で強解をもつ。更に、(C.P.) の $[0,T]$ に於ける任意の強解 $u(t)$ に対して、$\varphi^T(u(T))\le M(|a|_H+\varphi^1(a)+T)$ となる様な関数 $M(\cdot)\in\mathcal{M}$ が存在する。

注意 1.　先の例 (P.NH) に於いて、(i) $p=2$ の場合: $\alpha<+\infty$ if $n=1,2$, $\alpha<4/(n-2)$ if $n\geq 3$; (ii) $p>2$ の場合: $\alpha<+\infty$ if $n\le p$, $\alpha\le\{n(p-2)+2p\}/2(n-p)$ if $n>p$ を仮定すれば (A.2) は満足される。

§3. 漸近挙動

(Pr.NH) を念頭に置いて、ここでは次の（少々制限的な）場合（これは [4] の状況とほぼ同じものである。）を考える。

(A.3) φ^i は d_i (>1) 次の斉次関数, i.e., $\varphi^i(\lambda u) = \lambda^{d_i}\varphi^i(u)$ for $\forall\lambda>0$, $\forall u\in D(\varphi^i)$, $(i=1,2)$.

(A.4) 次を満す正定数 C_1, C_2 が存在する。

(7) $C_1|u|_H \leqq |\varphi^2(u)|^{1/d_2} \leqq C_2|\varphi^1(u)|^{1/d_1}$ for $\forall u\in D(\varphi^1)$.

注意2. (Pr.NH) に於いて (A.4) が満足される為には、$0\leqq\alpha<+\infty$ if $n\leqq p$, $0\leqq\alpha\leqq\{n(p-2)+2p\}/(n-p)$ if $n>p$ で十分。

3.1. Energy 等式

$u(t)$ を $[0,T]$ に於ける (C.P.) の強解とすれば、$du(t)/dt$, $\partial\varphi^i(u(t))\in L^2(0,T;H)$ であったから $(\partial\varphi^i(u(t)), du(t)/dt)_H = d\varphi^i(u(t))/dt$ for a.e. $t\in[0,T]$ となるから ([2, Lemma 3.3]), (1) 式と $du(t)/dt$ との H-内積をとって、次を得る。

(8) $\left|\frac{du}{dt}(t)\right|_H^2 + \frac{d}{dt}J(u(t)) = 0$ for a.e. $t\in[0,T]$,

ここで $J(u) = \varphi^1(u) - \varphi^2(u)$ とおいた。これより直ちに、$J(u(t))$ は t の単調減少関数である事がわかる。

更に、φ が α (>1) 次の斉次関数であれば $(\partial\varphi(u), u)_H = \alpha\varphi(u)$ for $\forall u\in D(\partial\varphi)$ となる事に注目して、(1) と $u(t)$ との内積をとれば、次式を得る。

(9) $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_H^2 = j(u(t))$ for a.e. $t\in[0,T]$.

ここで、$j(u) = \alpha_2\varphi^2(u) - \alpha_1\varphi^1(u)$ とおいた。

3.2. 解の爆発と増大

ここで、(C.P.) の強解の幾つかのタイプの Blowing up(爆発) と Growing up (増大) を導入する。これらは、我々の abstract setting ((8),(9) 式参照) から自然に導かれるものである。

<u>定義 2.</u> $u(t)$ を $[0,T)$ (resp. $[0,+\infty)$) 内の任意の区間 $[0,S]$ $S\in[0,T)$ (resp. $[0,+\infty)$) に於ける (C.P.) の強解とした時、$u(t)$ が $t=T$ (resp. $t=+\infty$) に於いて ① φ^1- B.U. (resp. ①′ φ^1- G.U.); ② φ^2- B.U. (resp. ②′ φ^2- G.U.); ③ j- B.U. (resp. ③′ j- G.U.); ④ J- B.U. (resp. ④′ J- G.U.); ⑤ H- B.U. (resp. ⑤′ H- G.U.) であるとは、夫々 $t\uparrow T-0$ (resp. $t\to+\infty$) の時 $\varphi^1(u(t))\to+\infty$; $\varphi^2(u(t))\to+\infty$; $j(u(t))\to+\infty$; $J(u(t))\to-\infty$; $|u(t)|_H\to+\infty$ となる事をいう。

これ等の相互関係について、まず次の結果が成立する。

<u>定理 2.</u> $\alpha_2>\alpha_1$, $\alpha_2>2$ かつ (A.3), (A.4) が満されている時 ①′~⑤′ の現象は起り得ない。更に ①~⑤ の相互関係は (爆発時刻はすべて同じとして) ① ↔ ② ↔ ③ ← ④ ← ⑤ となる。更に、次の (A.2)′ を仮定すれば ① から ⑤ は同値となる。

(A.2)′ $D(\partial\varphi^1)\subset D(\partial\varphi^2)$ かつ 次を満す $M(\cdot)\in\mathfrak{M}$ が存在する。

(10) $|\partial\varphi^2(u)|_H^2 \leq |\partial\varphi^1(u)|_H^2 + M(|u|_H)\{|\varphi^1(u)|+1\}^2$ for $\forall u\in D(\partial\varphi^1)$.

（証明） まず (A.4) より、⑤ → ② → ① かつ ⑤′ → ②′ → ①′ は明らか。又、$J(u(t))$ は単調減少であったから

$$(11) \quad \varphi^1(u(t)) \leq \varphi^2(u(t)) + J(a) \quad \text{for } \forall t \in [0,T] .$$

よって、① ⟷ ② かつ ①′ ⟷ ②′。ここで、もし ②′ が成立したとすると、(9), (11) より、適当な $T_0 < +\infty$ が存在して

$$(12) \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_H^2 \geqq (\alpha_2 - \alpha_1)\varphi^2(u(t)) - \alpha_1 J(a)$$

$$\geqq \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)\varphi^2(u(t)) \geqq \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)\cdot C_1^{\alpha_2} |u(t)|_H^{\alpha_2} \quad \text{for a.e. } t \in [T_0, +\infty)$$

となるから、これより直ちに ⑤ が導かれ（② が起きる事となり）矛盾。よって、①′, ②′, ⑤′ は起り得ない。

次に (8) を $[0,t]$ で積分すると

$$(13) \quad -J(u(t)) + J(a) = \int_0^t \left|\frac{du}{ds}(s)\right|_H^2 ds \geqq \frac{1}{t}\cdot\left(\int_0^t \left|\frac{du}{ds}(s)\right|_H ds\right)^2$$

$$\geqq \frac{1}{t}\left(|u(t)|_H - |a|_H\right)^2$$

よって ⑤ → ④。更に、(7) の $\varphi^1 - \varphi^2$ 間の不等式により（図1参照）、直ちに ③ or ④ → ① and ② ; ③′ or ④′ → ①′ and ②′ が従う。よって、③′, ④′ も起り得ない事がわかる。② → ③ を見るには

$j(u(t)) \geqq (\alpha_2 - \alpha_1)\varphi^2(u(t)) - \alpha_1 J(a)$ なる関係に注意すれば良い。

(A.2)′ のもとに ① から ⑤ が同等である事を示すには、上の事実より ① → ⑤ を示せば十分である。$|u(t)|_H$ が $[0,T)$ で有界であるとすれば、(12) を $[0,T]$ で積分する事により、$\int_0^T \varphi^2(u(t))\,dt < +\infty$、更に (11) より $\int_0^T \varphi^1(u(t))\,dt < +\infty$ を得る。

次に、(1) と $\partial\varphi^1(u(t))$ との内積をとれば、(10) より

$$|\partial\varphi^1(u(t))|_H^2 + \frac{d}{dt}\varphi^1(u(t)) \leq |\partial\varphi^1(u(t))|_H |\partial\varphi^2(u(t))|_H$$

$$\leq |\partial\varphi^1(u(t))|_H^2 + M(|u(t)|_H)\cdot\{\varphi^1(u(t))+1\}^2$$

これより、$|u(t)|_H$ と $\int_0^T \varphi^1(u(t))dt$ の有界性に注意して、Gronwall の不等式を適用すれば $\sup_{0\leq t<T}\varphi^1(u(t)) < +\infty$ が得られ、①→⑤ が示せた事となる。 [Q.E.D.]

3.3. 有界解について

(C.P.) の解の有界性を探る為に、まず次の補題を準備する。

補題 1. (A.1), (A.2), (A.3), (A.4) の仮定のもとに $u(t)$ を $[0,+\infty)$ に於ける (C.P.) の大域的強解とし、$\limsup_{t_n\to+\infty}\varphi^1(u(t_n)) < +\infty$ となる点列 $\{t_n\}$ が存在するとすれば、次の (i)-(iii) が成立する。

(i) $J(u(t)) \downarrow C_0 > -\infty$ as $t\to+\infty$,

(ii) $j(u(t_n)) \to 0$ as $t_n\to+\infty$,

(iii) $\{t_n\}$ のある部分列 $\{t_{n'}\}$ が存在して、$u(t_{n'}) \to u_\infty \in S := \{u \in D(\partial\varphi^1) \mid \partial\varphi^1(u) = \partial\varphi^2(u)\}$ in H as $t_{n'}\to+\infty$.

よって、$\alpha_1 \neq \alpha_2$ であれば、C_0 のみに依る定数 k_i $(i=1,2)$ が存在して、$\varphi^i(u(t_n)) \to k_i$ as $t_n\to+\infty$ かつ $\alpha_1 k_1 = \alpha_2 k_2$ となる。

(証明) $\varphi^1(u(t_n))$ は有界であるから、(A.4) より $\varphi^2(u(t))$ も有界、よって $J(u(t_n))$ は下から有界。$J(u(t))$ は単調減少であったから、明らかに $J(u(t)) \downarrow C_0 > -\infty$ as $t\to+\infty$ となる。

よって、$u_t(s) := \{u(t+s) \mid 0\leq s\leq 1\} \in C([0,1];H)$ とおけば、

(8) より $|du_t(s)/ds|_{L^2(0,1;H)} \to 0$ as $t \to +\infty$, また (A.2) より $\partial\varphi^i(u_{t_n}(s))$ は $L^2(0,1;H)$ で有界となる ($i=1,2$)。以上より $\{u_{t_n}(s)\}_n$ は $[0,1]$ 上で同等連続かつ H でのコンパクト集合を成す ((A.1)より) から Ascoli の定理により適当な点列 $\{t_{n'}\} \subset \{t_n\}$ が存在して、

$$\begin{cases} u_{t_{n'}}(s) \to u(s) \equiv u_\infty \in S \quad \text{strongly in } C([0,1];H) \text{ as } t_{n'} \to +\infty, \\ \partial\varphi^i(u_{t_{n'}}(s)) \rightharpoonup g(s) \equiv g \quad \text{weakly in } L^2(0,1;H) \text{ as } t_{n'} \to +\infty \ (i=1,2) \end{cases}$$

となる事が容易にわかる。この時、φ^i の斉次性より

$$\frac{1}{\tau}\left(u_{t_{n'}}(s), \partial\varphi^i(u_{t_{n'}}(s))\right)_{L^2(0,\tau;H)} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \alpha_i \varphi^i(u_{t_{n'}}(s))ds \to (u_\infty, g)_H$$

for $^\forall \tau > 0$, $i=1,2$ as $t_{n'} \to +\infty$, 即ち $j(u(t_{n'})) \to 0$ as $t_{n'} \to +\infty$ となり、以上の議論は部分列 $\{t_{n'}\}$ の選び方に依らないから、(ii) が示される。 [Q.E.D.]

ここで、$u(t)$ を $[0,T)$ に於ける (C.P.) の強解とした時、$\liminf_{t \uparrow T-0} \varphi^1(u(t)) < +\infty$ かつ $\limsup_{t \uparrow T-0} \varphi^1(u(t)) = +\infty$ となる事があり得るかどうかを考えよう。まず、$T<+\infty$ の場合には、起り得ない事は、定理1より明らかであろう。$T=+\infty$, $\alpha_2>\alpha_1$ の場合にも起り得ない事が、次の定理で保証される。

<u>定理3</u>. $\alpha_2>\alpha_1$, $\alpha_2>2$ かつ (A.1), (A.2), (A.3), (A.4) が満されているとし、$u(t)$ を $[0,+\infty)$ に於ける (C.P.) の大域的強解とすれば $\varphi^1(u(t))$ は有界、即ち $\sup_{0 \le t < +\infty} \varphi^1(u(t)) < +\infty$ となる。(従って $\varphi^2(u(t))$, $J(u(t))$, $j(u(t))$, $|u(t)|_H$ も有界となる。)

（証明）まず $u(t)$ が大域解である事より、定理２によって、

$J(u(t)) \downarrow C_0 > -\infty$ as $t \to +\infty$。よって (8) より $du(s)/ds \in L^2(0,+\infty;H)$

となるから $\varepsilon(t) = |du(s)/ds|_{L^2(t,+\infty;H)}$ とおけば $t \to +\infty$ の時

$\varepsilon(t) \to 0$ であり、次を満す。

(14) $\displaystyle\int_t^{t+\Delta} |\tfrac{du}{ds}(s)|_H\, ds \le \sqrt{\Delta}\cdot\varepsilon(t)$.

ここで、$\varphi^1(u(t))$ が有界でないとすると、定理２より

$\liminf_{t\to+\infty} \varphi^1(u(t)) < +\infty$ かつ $\limsup_{t\to+\infty} \varphi^1(u(t)) = +\infty$ となるから

$J(u(t))$ が有界である事、補題１の (ii) 及び (7) 式より（図１参照）、次の (15)–(18) を満す点列 $\{t_n\}$, $\{{}^*t_n\}$ $\{t_n^*\}$ が存在する：

(15) $\varphi^1(u(t_n)) \to +\infty$ as $t_n \to +\infty$,

(16) $\varphi^1(u({}^*t_n)) \le C$, $\varphi^1(u(t_n^*)) \le C$ for all ${}^*t_n$ and t_n^*,

(17) $d_1\varphi^1(u(t)) - \frac{d_1+d_2}{2}\varphi^2(u(t)) \le 0$ for $\forall t \in [{}^*t_n, t_n^*]$,

(18) $0 < \delta \le \varphi^2(u(t))$ for $\forall t \in [{}^*t_n, t_n^*]$, ${}^*t_n \le t_n \le t_n^*$,

まず (17) と (9) より $|u(t)|_H$ は $[{}^*t_n, t_n^*]$ で単調増加となるから、(7) と (16) から

(19) $|u(t)|_H \le C$ for $\forall t \in [{}^*t_n, t_n^*]$.

次に

$|d_2\varphi^2(u(t)) - d_1\varphi^1(u(t))| = |(\partial\varphi^2(u(t)) - \partial\varphi^1(u(t)), u(t))_H| \le |\frac{du}{dt}(t)|_H \cdot |u(t)|_H$

であるから、これを $[t_n, t_n^*]$ で積分すれば、(14), (17), (18), (19) によって、$\Delta_n = t_n^* - t_n$ とおいて、次式を得る。

$\frac{d_2-d_1}{2}\delta\Delta_n \le \displaystyle\int_{t_n}^{t_n^*}\{d_2\varphi^2(u(s)) - d_1\varphi^1(u(s))\}ds \le C\cdot\sqrt{\Delta_n}\cdot\varepsilon(t_n)$.

ここで、$t_n \to +\infty$ とすれば、$\varepsilon(t_n) \to 0$ であったから、$\Delta_n \to 0$ が従う。しかし、これは (15), (16) かつ 定理1 の事実と矛盾する。 [Q.E.D.]

一般的には (C.P.) の強解の一意性は期待できないから、その漸近挙動も、初期値 a によって一意的に定まる事は、期待できないが、a が $D(\varphi^1)$ のある部分集合に属する場合は、その漸近挙動が一意的に決定される場合がある。即ち、定理 2,3 より [13], [4] と類似の次の命題を得る事ができる。

命題1. 定理3と同じ仮定のもとに、$d = \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 C_2}\right)^{\alpha_1/(\alpha_2-\alpha_1)}$,
$W = \{u\in D(\varphi^1) \mid J(u)\le d,\ j(u)<0\}$, $V = \{u\in D(\varphi^1) \mid J(u)\le d,\ j(u)>0\}$
とおけば、次の (i), (ii) が成立する。

(i) $a\in W$ の時、(C.P.) の強解 $u(t)$ はいつも大域的に延長する事ができ、$t\to+\infty$ の時 $\varphi^1(u(t))\to 0$, $\varphi^2(u(t))\to 0$, $|u(t)|_H \to 0$ となる。

(ii) $a\in V$ の時、(C.P.) の強解は、爆発現象 ①, ②, ③ を起す。

(証明) $\mathcal{W} = \{(\varphi^2(u),\varphi^1(u)) \mid u\in W\}$, $\mathcal{V} = \{(\varphi^2(u),\varphi^1(u)) \mid u\in V\}$,
$\mathcal{S} = \{(\varphi^2(u),\varphi^1(u)) \mid u\in S\} = \{(\varphi^2(u),\varphi^1(u)) \mid j(u) = \alpha_2\varphi^2(u) - \alpha_1\varphi^1(u) = 0\}$
とおけば $\mathcal{W}$ と $\mathcal{V}$ は $(\varphi^2(u),\varphi^1(u))$-平面での連結集合となり、(A.4) から $\mathcal{W}\cap\mathcal{S} = \{(0,0)\}$ かつ $\mathcal{V}\cap\mathcal{S}=\phi$ となる(図1参照)。
ここで、$J(u(t))$ が単調減少である事より $a\in W$ (resp. $a\in V$) ならば、いつも $u(t)\in W$ (resp. $u(t)\in V$) となる。よって、まず $a\in W$ の時、$\mathcal{W}$ は有界であるから補題1より、$(\varphi^2(u(t)), \varphi^1(u(t)))$ は

$\{(0,0)\}$ に収束しなければならない。又 $\lambda \in V$ の時には、補題1及び定理2,3より、爆発現象①〜③が起る事がわかる。[Q.E.D.]

注意3. 上の (i) の場合、$|u(t)|_H$, $\varphi^i(u(t))$ の decay の order を評価する事もできる。([4] 参照)

3.4. 漸近挙動の分類

以上の準備のもとに、(C.P.) の強解の可能なすべての漸近挙動を分類する事ができる。以下、仮定 (A.1) から (A.4) はいつも満されているものとして話を進める。

[I] $\alpha_2 > \alpha_1$, $\alpha_2 > 2$ の場合: 定理2,3と補題1より、可能な漸近挙動は、次の2つに限る事がわかる。

(T_1) $\varphi^1(u(t))$, $\varphi^2(u(t))$, $|u(t)|_H$ は (一様に) 有界であり、$u(t)$ の ω-limiting set $\Omega(u(t)) := \bigcap_{t>0} \overline{\{u(t) \mid s \geqq t\}}^H$ は S (定常解集合) に含まれ、$t \to +\infty$ の時、$J(u(t)) \downarrow K \geqq 0$, $\varphi^1(u(t)) \to \frac{\alpha_2 K}{\alpha_2 - \alpha_1}$, $\varphi^2(u(t)) \to \frac{\alpha_1 K}{\alpha_2 - \alpha_1}$.

(T_2) $u(t)$ は爆発する; 即ち ある有限時刻 T があって $t \uparrow T-0$ の時 $\varphi^1(u(t)) \to +\infty$, $\varphi^2(u(t)) \to +\infty$, $J(u(t)) \to +\infty$ となる。

注意4. (i) (T_2) の場合において、更に $(A.2)'$ が満されている時には、H-B.U., J-B.U. も起きている (定理2後半)。よって、$a \notin V$ に対する解 $u(t)$ が爆発する場合には、$u(t)$ が (有限時間内に) V に属した後に爆発する事がわかる。

(ii) Alikakos [1] は (Pr.NH) で $p=2$ の場合について、

$0<\alpha<\frac{4}{n}$ if $n\le 4$, $0<\alpha\le\frac{2}{n-2}$ if $n\ge 5$ かつ $a\neq 0$, $J(a)\le 0$ (a: 初期値) なる仮定のもとに、その解が $L^{2+\alpha}(\Omega)$-norm で爆発すれば、$L^2(\Omega)$-norm でも爆発する事を示しているが、我々の結果では、α に関して "$0<\alpha\le\frac{4}{n}$" (定理2の $(A.2)'$ に相当) だけを仮定すれば良い。よって、命題1より、$0<\alpha\le\frac{4}{n}$ かつ $a\in V$ ("$J(a)\le 0$, $a\neq 0$" の条件よりゆるい) ならば $u(t)$ の $L^2(\Omega)$-norm は爆発する事がわかる。

[II] $\alpha_2<\alpha_1$ の場合: 図2より明らかな様に、$u(t)$ の trajectory は、いつも有界であるから、前出の (T_1) の場合しか起り得ない。但し、この場合には、$J(u(t))\downarrow K\in[d,0]$ $(-\infty<d<0)$ となる。

[III] $\alpha_2=\alpha_1$ の場合: 条件 (A.4) に現われる定数 C_2 の値によって、次の2つの場合を考える。

(i) $0<C_2<1$ の場合: 図3から明らかな様に、$u(t)$ の trajectory は、いつも有界となり、(T_1) の場合しか起り得ないが、この場合には、$\mathcal{S}$ は自明定常解 0 のみからなるから、$t\to+\infty$ の時、$\varphi^1(u(t))\to 0$, $\varphi^2(u(t))\to 0$, $|u(t)|_H\to 0$ となる。

(ii) $1\le C_2$ の場合: 有界性条件として (A.2) だけでは、一般的な事はあまり言えない (H-B.U. が起り得ない事は示せる。) が、有界性の条件を強めれば (注意5の(i)参照)、次の結果が成立する。(証明は紙面の都合で割愛する。)

定理4. $\alpha_2=\alpha_1$ とし、(A.1), (A.3), (A.4) 及び次の $(A.2)''$ を仮定する。

$(A.2)''$ $D(\partial\varphi^1)\subset D(\partial\varphi^2)$ かつ次を満す $\gamma\in(0,1)$ と $M(\cdot)\in\mathfrak{M}$ が存在する。

$$|\partial\varphi^2(u)|_H\leq M(|u|_H)\{|\partial\varphi^1(u)|_H^{1-\gamma}+|\varphi^1(u)|^{1-\gamma}+1\}\quad \text{for } \forall u\in D(\partial\varphi^1).$$

この時、任意の $a\in D(\varphi^1)$ に対して (C.P.) は、大域的強解を持ち、更に (C.P.) の強解の可能な漸近挙動は、次の2つに限られ、それぞれの各性質は、同値となる。

(T_3) $J(u(t))\downarrow 0$ as $t\to+\infty$ $\leftrightarrow$ $|u(t)|_H$ は有界 $\leftrightarrow$ $\varphi^1(u(t))$ は有界 $\leftrightarrow$ $\varphi^2(u(t))$ は有界. (この時, 当然 $\Omega(u(t))<\delta$ が成立)

(T_4) $J(u(t))\downarrow K\in[-\infty,0)$ as $t\to+\infty$ $\leftrightarrow$ φ^1-G.U. $\leftrightarrow$ φ^2-G.U. $\leftrightarrow$ H-G.U.

注意5. (i) (Pr.NH) に於いて $\alpha_1=\alpha_2$ に相当する場合は $p=2+\alpha$ の場合であるから、$(A.2)''$ が満足されるには、注意1で (A.2) を保証する為に与えた条件があれば十分である。即ち、(Pr.NH) に関する限り) $\alpha_1=\alpha_2$ の場合には $(A.2)''$ は (A.2) とほぼ同じ程度の条件となっている。

(ii) 定理4の場合に於いて、初期値 a が $J(a)<0$ を満せば (図4の集合 $\mathcal{G}$ に属せば)、$J(u(t))$ の単調性より、その解 $u(t)$ は、必ず Grow up する事がわかる。

§4. 定常解について

4.1. 非自明定常解の存在について

$u=0$ は明らかに $S=\{u\in D(\partial\varphi^1) \mid \partial\varphi^1(u)=\partial\varphi^2(u)\}$ の元であるが、自明解以外の定常解の存在に関して、次の結果が成立する。

定理5. $\alpha_2 \neq \alpha_1$ とし、(A.3), (A.4) の仮定のもとに
$C_b = \inf\limits_{u\neq 0} \dfrac{\{\varphi^2(u)\}^{1/\alpha_2}}{\{\varphi^1(u)\}^{1/\alpha_1}}$ とした時、u_0 が

(i) $u_0 \in D(\partial\varphi^2)\cap D(\varphi^1)$,

(ii) $\{\varphi^2(u_0)\}^{1/\alpha_2} = C_b\{\varphi^1(u)\}^{1/\alpha_1}$,

(iii) $\alpha_1\varphi^1(u_0) = \alpha_2\varphi^2(u_0)$,

を満せば、u_0 は $\partial\varphi^1(u)=\partial\varphi^2(u)$ の非自明(定常)解である。

(証明) $u_0\in S$ を示すには

(20) $(\partial\varphi^2(u_0), v-u_0)_H \leq \varphi^1(v)-\varphi^1(u_0)$ for $\forall v\in D(\varphi^1)$

を示せば良い。まず、$R_1=(\alpha_1/\alpha_2 C_b)^{\alpha_1/(\alpha_2-\alpha_1)}>0$ とおけば、

(21) $\varphi^2(u_0) = \max\limits_{\varphi^1(u)=R_1} \varphi^2(u)$

となる事に注意する。($\alpha_2>\alpha_1$ の時は図5参照, $\alpha_2<\alpha_1$ の時も同様)

(1) $v=0$ の時 ((A.4)より $\varphi^1(v)=0$ と同値): 条件 (iii) より

$$(\partial\varphi^2(u_0), 0-u_0)_H = -\alpha_2\varphi^2(u_0) = -\alpha_1\varphi^1(u_0) < -\varphi^1(u_0)+\varphi^1(v)$$

となるから、(20) は満される。

(2) $v\neq 0$ ($\varphi^1(v)\neq 0$) の時: $\lambda = \{R_1/\varphi^1(v)\}^{1/\alpha_1}>0$ とおけば
$\varphi^1(\lambda v)=R_1$ であるから (21) より $\varphi^2(\lambda v)\leq\varphi^2(u_0)$。よって

$(\partial\varphi^2(u_0), \lambda v-u_0)_H \leq \varphi^2(\lambda v)-\varphi^2(u_0)\leq 0$ となる。これより、

$$\varphi^1(v) - \varphi^1(u_0) - (\partial\varphi^2(u_0), v - u_0)_H$$
$$= R_1\lambda^{-\alpha_1} - R_1 - \frac{1}{\lambda}(\partial\varphi^2(u_0), \lambda v - u_0)_H - \frac{1-\lambda}{\lambda}(\partial\varphi^2(u_0), u_0)_H$$
$$\geqq R_1\lambda^{-\alpha_1} - R_1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}R_1\cdot\alpha_1 = R_1\left(\lambda^{-\alpha_1} - 1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}\alpha_1\right)$$

となる。ところが、$\alpha_1 > 1$ であるから、簡単な計算によって

$$\left(\lambda^{-\alpha_1} - 1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}\alpha_1\right) \geqq 0 \quad \text{for } \forall\lambda > 0 \quad (\text{等号は } \lambda = 1 \text{ の時のみ})$$

がわかるから、(20) が示せた事になる。　　[Q.E.D.]

<u>注意 6.</u> (i) (Pr.NH) に対する定常問題： $\Delta_p u + |u|^\alpha u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ の解は、$p > 2$ の場合、$u(x)$ が最大となる点で、この方程式を考えてみれば、容易にわかる様に $C^2(\Omega)$-級になり得ない。この事実と定理5から、Sobolev 型不等式

$$|u|_{L^q(\Omega)} \leqq C_b\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (p \neq q,\ p > 2,\ q > 1),$$

の等号を成立させる関数は $C^2(\Omega)$-級となり得ない事がわかる。

(ii) 蛇足ながら、(Pr.NH) 自身に対しても上と類似の Shock 現象が起る，即ち，$p > 2$ の場合 (Pr.NH) の解 $u(x,t)$ は、初期値 $a(x)$ が $C_0^\infty(\Omega)$ に属しても、$|u(\cdot,t)|_{L^2(\Omega)} \to 0$ as $t \to +\infty$ ならば (これには、命題1より $a(x)$ が充分小さければ良い)、ある時刻 $T > 0$ が存在して $u(x,T) \notin C^2(\Omega)$ となる。

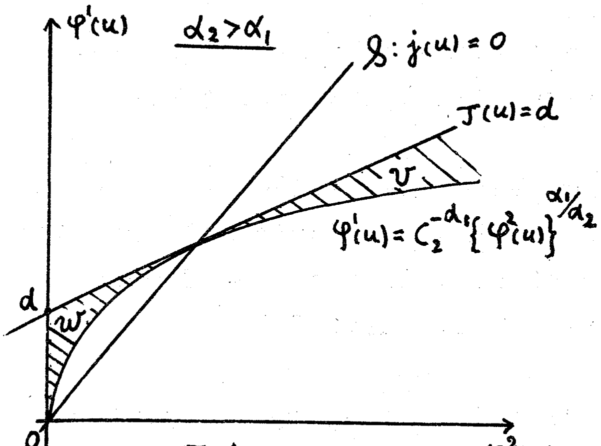
<u>4.2. 定常解の安定性に関する注意</u>

(i) $\alpha_2 > \alpha_1$, $\alpha_2 > 2$ の場合、まず自明定常解は、命題1で述べた意味で (局所的に) 安定であるが、他の定常解は、次の意味ですべて不安定である。即ち、$u \in S \setminus \{0\}$ に対して

$J(\lambda u) < J(u)$ for all $\lambda>0, \lambda\neq 1$,（図5参照）であるから、λu を初期値とする (C.P.) の強解 $u(t)$ は、$J(u(t))$ の単調性より $J(u(t)) < J(u)$ を満すから、有限時間で爆発するか、他の定常解に近づくかのどちらかである（$\Omega(u(t)) \not\ni u$）。特に、図5の $(\varphi^2(u), \varphi^1(u)) = (R_2, R_1)$ の位置にある定常解 u_0（例えば、定理5で与えたもの）に対しては、$\lambda u_0 \in W$ for $0<\lambda<1$, $\lambda u_0 \in V$ for $1<\lambda$ となるから、命題1より、λu_0, $1<\lambda$, から出発する解は有限時間で爆発し、λu_0, $0<\lambda<1$, からのそれは、0に収束する。よって、具体的な方程式 (Pr.NH) などで、比較定理が、成立する場合には、初期値が0と u_0 との間にある時は0に収束し、u_0 より上にある時には爆発する事がわかる。

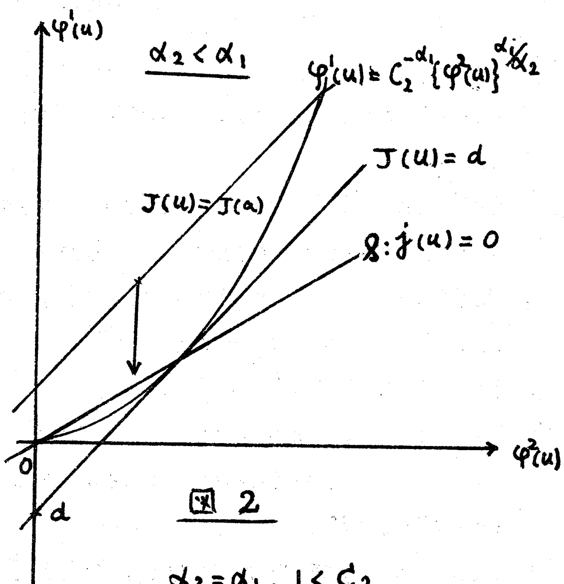
(ii) $\alpha_2<\alpha_1$ の場合、自明定常解は不安定となる。即ち、0のどんな H-近傍内にも $J(a)<0$ となる元 a が存在するから、（図2参照）a から出発する解 $u(t)$ は $J(u(t)) \leq J(a) < 0$ を満すから、他の非自明定常解に近づかなくてはならない。（この事実からも、非自明定常解の存在が言える。）

(iii) $\alpha_2=\alpha_1$ の場合、$0<C_2<1$ の時、定常解は自明解のみで、それは（大域的に）安定である。（図3参照）
$1<C_2$ の時、(ii) の場合と同様にして、自明解は不安定となる。（この事情は、(Pr.NH) に於いて $p=2$, $\alpha=0$ の場合を考えれば、良く理解されよう。）



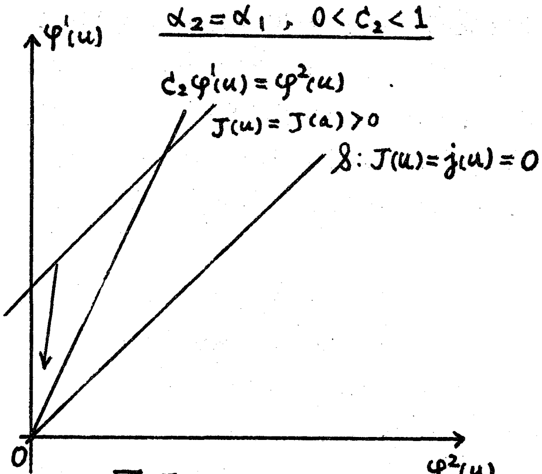
$\varphi^1(u)$
$\alpha_2 > \alpha_1$
$\mathcal{S}: j(u) = 0$
$J(u) = d$
v
$\varphi^1(u) = C_2^{-\alpha_1}\{\varphi^2(u)\}^{\alpha_1/\alpha_2}$
d
w
0
$\varphi^2(u)$

図 1



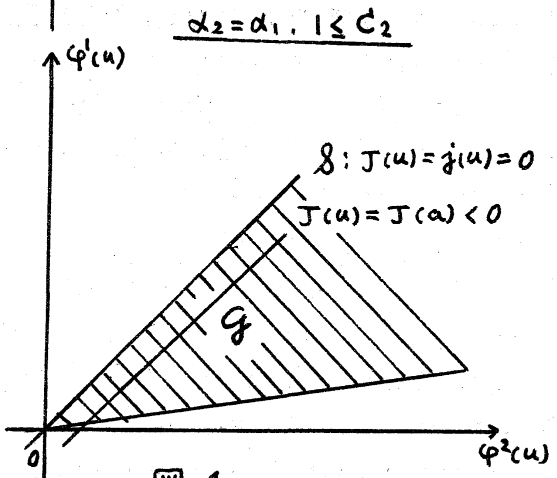
$\varphi^1(u)$
$\alpha_2 < \alpha_1$
$\varphi^1(u) = C_2^{-\alpha_1}\{\varphi^2(u)\}^{\alpha_1/\alpha_2}$
$J(u) = d$
$J(u) = J(a)$
$\mathcal{S}: j(u) = 0$
0
d
$\varphi^2(u)$

図 2



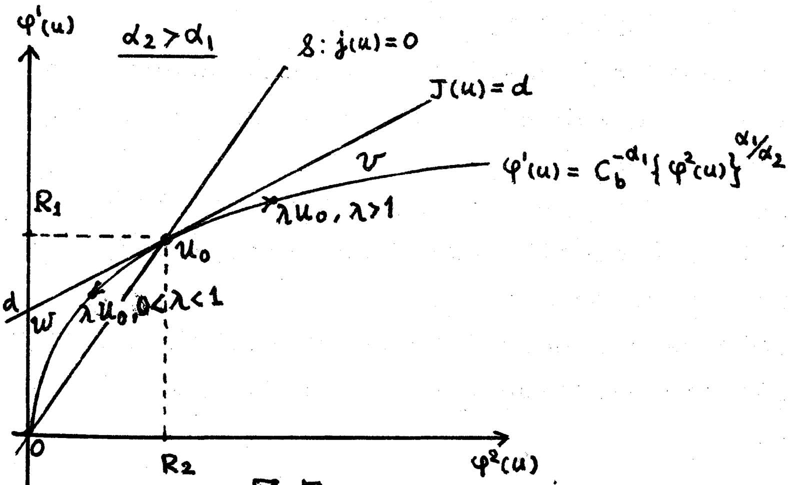
$\varphi^1(u)$
$\alpha_2 = \alpha_1 \ , \ 0 < C_2 < 1$
$C_2\varphi^1(u) = \varphi^2(u)$
$J(u) = J(a) > 0$
$\mathcal{S}: J(u) = j(u) = 0$
0
$\varphi^2(u)$

図 3



$\varphi^1(u)$
$\alpha_2 = \alpha_1 \ . \ 1 \leq C_2$
$\mathcal{S}: J(u) = j(u) = 0$
$J(u) = J(a) < 0$
g
0
$\varphi^2(u)$

図 4



$\varphi^1(u)$
$\alpha_2 > \alpha_1$
$\mathcal{S}: j(u) = 0$
$J(u) = d$
v
$\varphi^1(u) = C_b^{-\alpha_1}\{\varphi^2(u)\}^{\alpha_1/\alpha_2}$
R_1
$\lambda u_0 , \lambda > 1$
u_0
d
w
$\lambda u_0, 0 < \lambda < 1$
0
R_2
$\varphi^2(u)$

図 5

REFERENCES

[1] Alikakos, N.D., L^p bounds of solutions of reaction-diffusion equations, Comm. Partial Differential Equations, 4 (1979), 827-868.

[2] Brézis, H., Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert, North-Holland, 1973.

[3] Fujita, H., On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 13 (1966), 109-124.

[4] Ishii, H., Asymptotic stability and blowing up of solutions of some nonlinear equations, J. Differential Equations, 26 (1977), 291-319.

[5] Ito, S. 半線型放物型偏微分方程式の解の爆発について, 数学, 18巻(1966), 44-47.

[6] Kaplan, S., On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 16 (1963), 305-330.

[7] Koi, Y. and J. Watanabe, On nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials, Proc. Japan Acad. 52 (1976), 413-416.

[8] Levine, H.A. and L.E.Payne, Nonexistence of global weak solutions for classes of nonlinear wave and parabolic equations, J. Math. Anal. Appl., 55 (1976), 329-334.

[9] Matano, H., Convergence of solutions of one-dimensional semilinear parabolic equations, J. Math. Kyoto Univ. 18(1978), 221-227.

[10] Ôtani, M., On existence of strong solutions for $du(t)/dt + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t)$, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, 24(1977), 575-605.

[11] Ôtani, M., Non-monotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, I: Cauchy problems, to appear.

[12] Ôtani, M., Existence and asymptotic stability of strong solutions of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials, to appear.

[13] Tsutsumi, M., Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 8 (1972), 211-229.