数理解析研究所講究録
第 386 巻 1980 年 182-196

Broadwell モデルと Navier-Stokes モデルの大→∞での漸近関係

京大　工　数理　　川島　秀一

§1　序

気体分子運動を記述する Boltzmann 方程式の離散速度モデルの代表的なものに，Carleman の２速度モデル[3]，Broadwellの６速度モデル[1]，Gatignol の14速度モデル[5]等がある。これら離散速度モデルにおいては，Boltzmann 方程式の場合と同じく，大域解の存在や対応する流体力学方程式（Euler，Navier-Stokes 方程式）との関係等がこれまで調べられてきた。しかしその解析は Carleman モデル（空間１次元）を除いては，まだ完全には行なわれていない。例えば，大域解の存在に関しては空間が多次元の場合には何も知られていないし，流体力学方程式との関係づけの問題に関しても，Broadwellモデルと対応する Euler 方程式との関係が一部分解析されているにすぎない（[7]，[2]）。

以下では　比較的良く研究されてきた空間１次元 Broadwell モデルと対応するNavier－Stokesモデルとの関係について考察する。Broadwellモデル（空間3次元）とは，6通りの速度（$\pm v, 0, 0$），（$0, \pm v, 0$），（$0, 0, \pm v$）を持った同一粒子系の運動を記述する方程式系である（ここでvは正定数）。但し粒子どうしの衝突の仕方は次の通りである。"速度（$v, 0, 0$）の粒子は同じx軸上を逆向きの速度（$-v, 0, 0$）で運動する粒子とのみ衝突する。衝突後は確率$\frac{1}{3}$でx, y, z軸いずれかに沿って互いに逆向きの速度を持って動いて行く。そして同時に2個以上の粒子は衝突しない。y, z軸上を運動する粒子の衝突も同様である。"この衝突の前後で，質量（従ってエネルギー）と運動量が保存されることに注意したい。

このモデルで特に粒子の運動がy, z軸方向に関して一様であるとすれば，方程式系は次のような空間が1次元の場合に帰着される（[1]，[6]）。

$$
(1,1)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial F_1}{\partial t} + v\dfrac{\partial F_1}{\partial x} = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(F_2^2 - F_1F_3\right) \\[2ex]
\dfrac{\partial F_2}{\partial t} = -\dfrac{1}{2\varepsilon}\left(F_2^2 - F_1F_3\right) \\[2ex]
\dfrac{\partial F_3}{\partial t} - v\dfrac{\partial F_3}{\partial x} = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(F_2^2 - F_1F_3\right)
\end{cases}
$$

ここでF_1，F_3はそれぞれ速度（$v, 0, 0$），（$-v, 0, 0$）の粒子の質量密度である。速度（$0, \pm v, 0$），（$0, 0, \pm v$）の粒子の質量

密度は上の仮定から互いに等しくなるので，これをF_2で表わしている。またεは平均自由行程に対応する充分小さな正定数である。系(1.1)を空間1次元Broadwellモデルと呼ぶ。

系(1.1)で取り入れられた衝突のメカニズムから，粒子系に対する質量と運動量の保存則が期待できる。実際，粒子系の質量密度ρ，運動量mを

$$(1.2)\qquad \rho = F_1 + 4F_2 + F_3 \quad , \qquad m = v(F_1 - F_3)$$

で定義すれば，

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \rho_t + m_x = 0 \\ m_t + \{v^2(F_1 + F_3)\}_x = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。一般にF_1+F_3をρ，mを用いて表わすことができないので，(1.3)は閉じた系ではない。これを閉じた系で近似するために，Chapman-Enskog展開([4],[5])が考えられた。その第1近似は流体力学におけるEuler方程式に対応するもので

$$(1.4)\qquad \begin{cases} \rho_t + m_x = 0 \\ m_t + \{\rho\sigma(u)\}_x = 0 \end{cases} \qquad u = \frac{m}{\rho}$$

で与えられる([6])。但し，

$$\sigma(u)=\frac{v^2}{3}\left\{2\left(1+\frac{3u^2}{v^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\}$$

である。$u\to 0$ では $\rho\sigma(u)=\frac{v^2}{3}\rho+\rho u^2+O(\rho u^4)$ だから，系(1.4)は形式的に理想気体の等温変化を記述する方程式系（圧力は $p=\frac{v^2}{3}\rho$ で与えられる）であると見なせる。

Chapman－Enskog 展開の第2近似は 流体力学における Navier－Stokes 方程式に対応するもので，

$$(1.5)\qquad \begin{cases} \rho_t+m_x=0 \\ m_t+\{\rho\sigma(u)\}_x=\varepsilon\{\mu(u)u_x\}_x, \quad u=\frac{m}{\rho} \end{cases}$$

で与えられる（[4], [5]）。ここで

$$\mu(u)=\frac{4}{3}v^2\frac{2-\left(1+\frac{3u^2}{v^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{3u^2}{v^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

は粘性係数に相当する。

さて，Broadwell モデル(1.1)に対する初期値問題の解の（時間に関する）大域的存在は [15], [16], [7] 等で示された。[15]は初期値が ε に依存して充分小さい時に初めて大域解を得た。その結果を用いて，[16]は ε に関して一様に有界な初期値に対して大域解の存在を示した。しかし，その大域解が

εに関する一様評価を持つかどうかは，今のところわかっていない。この事が$\varepsilon\to 0$の極限で(1.1)と(1.4)又は(1.5)との関係を時間について大域的に論じることへの一つの大きな障害になっている。その他，(1.4)が滑らかな大域解を持たない事([12])，(1.5)がεに依らない有界な初期値に対して大域解を持つかどうかが未解決である事(なお[8]参照)等が，この問題を困難にしている原因であろう。この問題に関して現在唯一わかっているのは，(1.4)の解に衝撃波が現われるまでの有限時間内で，(1.1)の解が$\varepsilon\to 0$の極限で(1.4)を満たす事である([7],[2])。(1.1)と(1.5)の$\varepsilon\to 0$での関係については，時間が局所的な場合でさえ何もわかっていない。

以下では$\varepsilon\to 0$での漸近問題から離れて，(1.1)と(1.5)を両者の大域解の$t\to\infty$(εは固定)での漸近挙動を調べ比較することで，関係づけるのが目的である。(1.1)の大域解の漸近挙動に関しては，[7]で，定数平衡状態(Maxwell分布)が$L^2(R)$の意味で安定であることが明らかにされた。§2ではこの結果を用いて(1.1)の大域解の$t\to\infty$での漸近形を調べる。§3では[9],[13],[14]を参考にして，Navier-Stokesモデル(1.5)の大域解とその$t\to\infty$での漸近形を求める。§4で両者の漸近形を比較し，$t\to\infty$で(1.1)と(1.5)

が漸近していることを示す。これらの結果はすでに[10]で得られたものであり、詳しくはそちらを参照されたい。また Boltzmann 方程式で同様の問題が[11]で調べられている。

§2 Broadwellモデル

我々はBroadwellモデル(1.1)($\varepsilon=1$)をMaxwell分布 $M={}^t(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})$ の近傍で考える。初期値を

$$(2.1)\qquad F_j(0,x)=F_{0,j}(x)\quad,\quad j=1,2,3$$

(あるいはベクトル形式で $F(0,x)=F_0(x)$)で与えよう。この時[7]によれば次の定理が成り立つ。

<u>定理1</u>(Broadwellモデルの大域解の存在と減衰)

$F_0(x)-M\in H^k(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$,($k\geq 1$:整数)とし,

$$E_k=\|F_0-M\|_{H^k}+\|F_0-M\|_{L^1}$$

とおく。この時 E_k が充分小さいなら,初期値問題(1.1),(2.1)は一意的な大域解 $F(t)$ を持つ。そして次が成立する。

$$(2.2)\qquad \|F(t)-M\|_{H^k}\leq CE_k(1+t)^{-\frac{1}{4}}$$

即ち,Maxwell分布Mに $H^k(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$ の意味で充分近い初期値から出発する解は $t\to\infty$ で $H^k(\mathbb{R})$ の意味でMに $t^{-\frac{1}{4}}$ の

割合で減衰して行く。この定理の証明のためには，まず，系(1.1)をMaxwell分布Mで線形化した線形Broadwellモデルを考える。その線形系のスペクトルを調べることで，線形解の減衰則が得られる。この結果を用いれば，系(1.1)の漸近挙動(2.2)が線形系からの非線形摂動として得られる。

さて，減衰評価(2.2)を精密化しよう。そのためには若干準備を必要とする。まず R^3 における一組の双対基底 $\{\psi_j\}$, $\{\varphi_j\}$ を導入しておこう。

$$\psi_1 = (1, 4, 1),\quad \psi_2 = (v, 0, -v),\quad \psi_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$
$$\varphi_1 = M,\quad \varphi_2 = {}^t\left(\frac{1}{2v}, 0, -\frac{1}{2v}\right),\quad \varphi_3 = {}^t\left(1, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

ψ_1, ψ_2は任意の分布関数Fに対して，$\langle \psi_1, F\rangle$, $\langle \psi_2, F\rangle$がそれぞれFに対する質量密度，運動量になるように選んである。ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は R^3 の内積である。

次に半線形一様放物型方程式系

$$(2.3)\qquad \begin{cases} n_{N,t} + m_{N,x} = \frac{2}{3}v^2 n_{N,xx} \\ m_{N,t} + \left(\frac{v^2}{3}n_N + m_N^2\right)_x = \frac{2}{3}v^2 m_{N,xx} \end{cases}$$

に対する初期値問題を考えよう。初期値は

$$\begin{cases} n_N(0,x) = \langle \psi_1, F_0(x) - M\rangle \equiv \langle \psi_1, F_0(x)\rangle - 1 \end{cases}$$

$$\left\{ m_N(0,x) = \langle \psi_2, F_0(x) - M \rangle \equiv \langle \psi_2, F_0(x) \rangle \right.$$

で与える。この初期値問題は定理1の仮定のもとで一意的な大域解 $(n_N, m_N)(t)$ を持つ。そこで $f_N(t)$ を，双対基底 $\{\psi_j\}$，$\{\varphi_j\}$ に関する表現が

$$(2.4) \qquad f_N(t) = n_N(t)\varphi_1 + m_N(t)\varphi_2$$

となる量として定義する。この時，$M + f_N(t)$ が $F(t)$ の $t \to \infty$ での一つの漸近形である事を示すことができる（[10]）。

<u>定理2</u>（減衰則の精密化）

定理1の仮定のもと次の減衰評価が成り立つ。

$$(2.5) \qquad \| F(t) - (M + f_N(t)) \|_{H^k} \le C E_k (1+t)^{-\frac{1}{2}}$$

$F_0(x) - M \in H^k(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ で E_k が充分小さい任意の初期値に対して，減衰評価

$$(2.6) \qquad \| f_N(t) \|_{H^k} \le C E_k (1+t)^{-\frac{1}{4}}$$

が成り立つが，更に

$$\sum_{j=1}^{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi_j, F_0(x) - M \rangle \, dx \right| \ne 0$$

であれば，$\| f_N(t) \|_{H^k} = O(t^{-\frac{1}{4}})$，$t \to \infty$，を示すことがで

きる（[10]）。従って (2.5) は $t\to\infty$ での漸近関係としては意味をもつ。定理2は，$F(t)-M$ と $f_N(t)$ の差を減衰則 (2.2) と (2.6) を用いて評価することで得られるが，ここでは述べない。

§3 Navier－Stokes モデル

この節では，Navier－Stokes モデル (1.5)（$\varepsilon=1$）を Maxwell 分布 M に対応する定数状態 $(\rho, m)=(1, 0)$ の近傍で考える。(1.1) と (1.5) を比較するためには，初期値を

$$
(3.1)\qquad \begin{cases} \rho(0,x)=\langle \psi_1, F_0(x)\rangle \equiv 1+\langle \psi_1, F_0(x)-M\rangle \\ m(0,x)=\langle \psi_2, F_0(x)\rangle \equiv \langle \psi_2, F_0(x)-M\rangle \end{cases}
$$

で与えるのが自然であろう。初期値問題 (1.5), (3.1) の大域解は [10] において，$H^k(\mathbb{R})$ での局所解の存在（[17], [13], [10]）と a. priori 評価を組合せて得られた。その a. priori 評価を得るために使われたエネルギー形式は，[9], [13] でのそれと同じ型のものである。

<u>定理3</u>（Navier－Stokes モデルの大域解の存在）

$\{\langle \psi_j, F_0(x)-M\rangle\}_{j=1,2}\in H^k(\mathbb{R})$（$k\geq 2$：整数）とする。この時 $\sum_{j=1}^{2}\|\langle \psi_j, F_0(x)-M\rangle\|_{H^k}$ が充分小さいなら，初期値問題 (1.5), (3.1) は一意的な大域解 $(\rho, m)(t)$ を持つ。

更に初期値が $L^1(\mathbb{R})$ に属するとして，大域解 $(\rho, m)(t)$ の $t \to \infty$ での漸近挙動を調べよう。

<u>定理4</u>（大域解の減衰）

$\{\langle \psi_j, F_0(x) - M \rangle\}_{j=1,2} \in H^k(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ （$k \geq 3$：整数）

とし，

$$\tilde{E}_k = \sum_{j=1}^{2} \left\{ \| \langle \psi_j, F_0(x) - M \rangle \|_{H^k} + \| \langle \psi_j, F_0(x) - M \rangle \|_{L^1} \right\}$$

とおく。もし $\tilde{E}_k$ が充分小なら，(1.5)，(3.1) の大域解 $(\rho, m)(t)$ は次の減衰評価を満たす。

$$(3.2) \qquad \| (\rho, m)(t) - (1, 0) \|_{H^{k-2}} \leq C \tilde{E}_k (1+t)^{-\frac{1}{4}}$$

更にもし上の仮定が $k \geq 4$ に対して成り立つなら，(3.2) より精密な次の評価を得る。

$$(3.3) \qquad \| (\rho, m)(t) - (1 + n^*, m^*)(t) \|_{H^{k-4}} \leq C \tilde{E}_k^2 (1+t)^{-\frac{1}{2}}$$

ここで，$(n^*, m^*)(t)$ は次の半線形双曲放物型方程式系に対する初期値問題の大域解である。

$$(3.4) \qquad \begin{cases} n^*_t + m^*_x = 0 \\ m^*_t + \left(\frac{v^2}{3} n^* + (m^*)^2 \right)_x = \frac{4}{3} v^2 m^*_{xx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n^*(0,x) = \langle \psi_1, F_0(x) - M \rangle \\ m^*(0,x) = \langle \psi_2, F_0(x) - M \rangle \end{cases}$$

評価(3.2), (3.3)はBroadwellレベルではそれぞれ(2.2), (2.5)に，また系(3.4)は(2.3)に対応している。減衰則(3.2)はBroadwellモデルの場合と同様，線形系(系(1.5)を定数状態(1, 0)で線形化したもの)からの非線形摂動として得られる。ただ，系(1.5)が非線形であるため，弱いノルム($H^{k-2}(\mathbb{R})$)での評価になっている。一方(3.3)は(3.4)の解$(n^*, m^*)(t)$が

$$\|(n^*, m^*)(t)\|_{H^k} \le C\tilde{E}_k(1+t)^{-\frac{1}{4}}$$

なる減衰評価を満たすことと(3.2)を用いて得られる。

§4　$t \to \infty$での漸近関係

§2, §3でそれぞれBroadwellモデル(1.1)とNavier-Stokesモデル(1.5)の$t \to \infty$での漸近形を調べた。我々の目的，即ち(1.1)と(1.5)の$t \to \infty$での漸近関係を調べるためには，各々の漸近形どうしを比較すれば充分であろう。そこで，2つの半線形問題(2.3)，と(3.4)の解$(n_N, m_N)(t)$と$(n^*, m^*)(t)$について考える。

補題 5

$k \geq 1$ に対して定理4と同じ仮定を置く。$\tilde{E}_k$ が充分小さいならば、次の評価が成り立つ。

(4.1) $$\|(n_N, m_N)(t) - (n^*, m^*)(t)\|_{H^{k-1}} \leq C\tilde{E}_k(1+t)^{-\frac{1}{2}}$$

この結果は、線形 Broadwell モデルと線形 Navier-Stokes モデルのスペクトルの原点付近の挙動がほぼ一致すること([10])の帰結である。

評価(2.5), (4.1), (3.3)を組合せれば、(1.1), (1.5)の $t \to \infty$ での漸近関係が得られる。

定理 6 (Broadwell モデルと Navier-Stokes モデルの漸近)
初期値は $F_0(x) - M \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $\{\langle \psi_j, F_0(x) - M \rangle\}_{j=1,2} \in H^4(\mathbb{R})$ とし、$G_0 = \max\{E_1, \tilde{E}_4\}$ と置く。もし G_0 が充分小さければ、

(4.2) $$\|F(t) - \{\rho(t)\varphi_1 + m(t)\varphi_2\}\|_{L^2} \leq CG_0(1+t)^{-\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。従って、$F(t)$ に対応する流体力学量 $\rho^F(t) = \langle \psi_1, F(t) \rangle$, $m^F(t) = \langle \psi_2, F(t) \rangle$ は

(4.3) $$\|(\rho^F, m^F)(t) - (\rho, m)(t)\|_{L^2} \leq CG_0(1+t)^{-\frac{1}{2}}$$

を満たす。

(4.3) は Broadwell モデルが $t\to\infty$ で Navier-Stokes モデルで近似できることを示している。このことで，Broadwell モデルに対する Chapman-Enskog 展開の第2近似が，いくらか正当化されたと思ってよいだろう。

なお，初期値が $F_0(x)-M\in H^{\ell}(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$, $\{\langle\psi_j, F_0(x)-M\rangle\}_{j=1,2}\in H^{\ell+4}(\mathbb{R})$ ($\ell\geq 1$: 整数) で，しかも $G_\ell=\max\{E_\ell, \tilde{E}_{\ell+4}\}$ が充分小さいならば，$H^{\ell}(\mathbb{R})$ での評価も得られる。

$$\| F(t)-\{\rho(t)\varphi_1+m(t)\varphi_2\}\|_{H^\ell}\leq CG_\ell(1+t)^{-\frac{1}{2}}$$

参考文献

[1] J. E. Broadwell, Phys. of Fluids 7 (1964) 1243-1247.

[2] R. E. Caflisch, Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979) 589-616.

[3] T. Carleman, Publ. sci. de l'inst. Mittag-Leffler, Uppsala, 1957.

[4] S. Chapman and T. G. Cowling, Cambridge Univ. Press, 3rd edition, London, 1970.

[5] R. Gatignol, Lecture Notes in Phys. 36, Springer-

Verlag, New York, 1975.

[6] S. K. Godunov and V. M. Sultangazin, Uspekhi Mat. Nauk 26 (1971) 3-51.

[7] K. Inoue and T. Nishida, Appl. Math. Opt. 3 (1976) 27-49.

[8] N. Itaya, J. Math. Kyoto Univ. 19 (1979) 293-300.

[9] Ya. I. Kanel', Diff. Eq. (in Russian) 4, 4 (1968) 721-734

[10] S. Kawashima, to appear.

[11] S. Kawashima, A. Matsumura and T. Nishida, Commun. Math. Phys. 70 (1979) 97-124.

[12] P. D. Lax, J. Math. Phys. 5 (1964) 611-613.

[13] A. Matsumura and T. Nishida, J. Math. Kyoto Univ. 20 (1980) 67-104.

[14] A. Matsumura and T. Nishida, Proc. Japan Acad. 55 (1979) 337-342.

[15] T. Nishida and M. Mimura, Proc. Japan Acad. 50 (1974) 812-817

[16] L. Tartar, Ecole Polytechnique, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 28 octobre 1975.

[17] A. I. Vol'pert and S. I. Hudjaev, Math. USSR

Sbornik 16 (1972) 517- 544.