

海岸工学における浅水長波方程式の有限要素法について

中央大 土木工 川原睦人

1. 緒言

海岸工学では、海洋と陸地の接点である海岸における多くの現象を問題としている。特に、港湾や大規模埋立地などの建設による地形改変が行なわれたとき、いままで平衡状態にあった海岸が、平衡を失い、新しい平衡状態へ移行しようとすることがある。このような場合、特に大きな変動現象が生ずる。海岸工学では、海岸にある構造物を建設するとき、海岸近傍の流れがどのように変動するかを把握することが重要な課題となっている。

このような現象を、構造物を建設する前に、予じめ予測し、それらに対する対策を策定しておかねばならない。

この目的のためには、近年、沿岸地形や海底地形と自由に近似し得る有限要素法が、多く用いられるようになった。工学の分野においては、数値解析の結果に意味があり、微分方程式の近似の正確さや誤差に対しては、ほとんど注意がはらわれていない。ここでは、有限要素解析の一端を紹介

する。これらは、厳密な証明なしに用いられており、実際上では、問題が生じていない場合が多い。しかし、より厳密な証明が可能であれば、その解析の限界を定めることができるし、誤差評価ができるのであれば、実用上の上ないことである。ここでは、数学分野の諸賢に対して、工学分野から問題を提起することを行いたい。

2. 浅水長波方程式

海岸近くの海洋には、非常に多くの種類の波が存在する。周期が10秒以下の短周期重力波と呼ばれるさざ波や風波、周期が10秒から30秒程度のうねり、長周期重力波と呼ばれる周期30秒から300秒程度の海面動揺、周期5分から60分程度の地震による津波、12時間周期と24時間周期と正確にもつ潮汐、さらに長い高潮、大陸と海洋の関係から生じる陸棚波等々、枚挙にいとまがない。このうち、水深が波長の $1/2$ より浅い場所での表面波と浅水長波と呼んでいる。

この方程式は、次のようにして誘導される。図1と参照して、深さ方向の流速は、水平方向の流速に比べて、充分小さく無視し得るものとする、三次元の Navier-Stokes 方程式は、次のように表わされる。

運動方程式：

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} - \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (3)$$

連続方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

ここに、流速 u, v, ω 、圧力 P 、乱流粘性応力 $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz}$ 、密度 ρ 、重力加速度 g である。式(3)により、水深方向 z について、圧力 P が静水圧分布としていることがわかる。

さて、流速 u, v と深さ方向に平均した平均流速 U, V と次のように導入する。

$$U = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} u \, dz, \quad V = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} v \, dz \quad (5), (6)$$

ここに、 $H = h + \eta$ で、 h は平均海面より計った水深、 η は、同じく水位である。式(1), (2), (4) と水深方向に積分して、適当な仮定を導入して整理すると、平均流速 U, V に関する方程式系と次のように求めることができる。

問題提起 1.

浅水長波方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\rho H} (\tau_x^s - \tau_x^b) \\ - \frac{1}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} (A_e H \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (A_e H \frac{\partial U}{\partial x}) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} (A_e H \frac{\partial V}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_e H \frac{\partial U}{\partial y}) \right] = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{\rho H} (\tau_y^s - \tau_y^b) \\ - \frac{1}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} (A_e H \frac{\partial V}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (A_e H \frac{\partial V}{\partial x}) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} (A_e H \frac{\partial V}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_e H \frac{\partial V}{\partial y}) \right] = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (H + \eta) U \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ (H + \eta) V \} = 0 \quad (9)$$

および、境界条件：

$$U = \hat{U}, \quad v = \hat{V} \quad \text{on } \mathcal{S}_1 \quad (10)$$

$$\eta = \hat{\zeta} \quad \text{on } \mathcal{S}_2 \quad (11)$$

$$S_x = [(-g\zeta + 2A_e \frac{\partial U}{\partial x}) l + A_e (\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}) m] = \hat{S}_x \quad (12)$$

$$S_y = [A_e (\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}) m + (-g\zeta + 2A_e \frac{\partial V}{\partial y}) n] = \hat{S}_y \quad (13)$$

on \mathcal{S}_3

の解の挙動如何？

二次元や三次元の Navier-Stokes 方程式に対する解の存在や数学的解の挙動の研究は、比較的多く行われている。一方、海岸工学の分野において重要である浅水長波方程式 (7)~(9) としるべき境界条件、例えば式 (10)~(13) などの下に解くことに関する研究は、少いようである。まず、この問題を問題提起 1 として提案したい。なお、式 (7), (8) において第 5 項以後の項は、摩擦項と呼ばれ、表面摩擦、海底摩擦、水平混合摩擦と表わしている。物理的には、意味のある項であるが、簡単のためには、これらは省略してもよい。

3. 浅水長波方程式の有限要素解析

実際の港湾や海岸では、阜頭や護岸などの構造物が存在するために、解析的に式(7)~(9)を解くことは、不可能に近い。そこで、近似解法が用いられることになるが、沿岸地形や海底地形を自由に近似し得る有限要素法が、近年、多く用いられるようになってきている。

以後、添字記法にしたがって表記し、くり返えして表われる添字に対しては総和をとるとする総和規約に従うものとする。平均流速を u_i ($i=1, 2$) とし、摩擦項はすべて省略すると、浅水長波方程式は、次のように書くことができる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} + g \zeta_{,i} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \{ (h + \zeta) u_i \}_{,i} = 0 \quad (15)$$

一方、境界条件は、

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } S_1 \quad (16)$$

$$\zeta = \hat{\zeta} \quad \text{on } S_2 \quad (17)$$

$$S_i = -g \zeta n_i = \hat{S}_i \quad \text{on } S_3 \quad (18)$$

$$T_i = (h + \zeta) u_i n_i = \hat{T}_i \quad \text{on } S_4 \quad (19)$$

としておく。ここに $\hat{\quad}$ は、境界で与えられる量であることを

とを示している。

式(14), (15)の両辺に重み関数 u_i^* , ζ^* とかけ, 任意の領域 V 内で積分すると, 次の関係を得ることができる。

$$\int_V (u_i^* \frac{\partial u_i}{\partial t}) dV + \int_V (u_i^* u_j u_{i,j}) dV + \int_V (u_i^* g \zeta_{,i}) dV = 0 \quad (20)$$

$$\int_V (\zeta^* \frac{\partial \zeta}{\partial t}) dV + \int_V [\zeta^* \{ (h + \zeta) u_{i,i} \}] dV = 0 \quad (21)$$

これを, "重みつき方程式 I" としておく。式(20)の第3項に部分積分を行うと, 次の方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \int_V (u_i^* \frac{\partial u_i}{\partial t}) dV + \int_V (u_i^* u_j u_{i,j}) dV - \int_V (u_{i,i} g \zeta) dV \\ = \int_{S_3} (u_i^* g \zeta n_i) dS \end{aligned} \quad (22)$$

ここに, $u_i^* = 0$ on S_1 かつ境界 S は S_1 と S_3 のみにより構成されているとしている。式(22)と式(21)で構成される方程式系を "重みつき方程式 II" としておく。式(21)の左辺第2項に, 部分積分を行うと,

$$\int_V (\zeta^* \frac{\partial \zeta}{\partial t}) dV = \int_V [\zeta_{,i}^* (h + \zeta) u_i] dV$$

$$= \int_{S_4} \zeta^* (h + \zeta) u_i n_i dS \quad (23)$$

となる。ここに、 $\zeta^* = 0$ on S_2 かつ境界 S は S_2 と S_4 のみにより構成されているとする。式(20)と式(23)とで構成されている方程式系を"重みつき方程式Ⅲ"としておく。重みつき方程式Ⅰ,Ⅱ,Ⅲの別は、右辺の自然境界条件となる量の別である。実際に適用するときには、それぞれの方程式に対して、異った解を得ることになる。

解析する領域を、有限要素と呼ばれる三角形に分割し、そのうちの一つに着目する。三角形の三節点を α ($\alpha = 1, 2, 3$) とし、対応する内挿関数を Φ_α として、

$$u_i = \Phi_\alpha u_{\alpha i} \quad \zeta = \Phi_\alpha \zeta_\alpha \quad (24), (25)$$

とする。内挿関数 Φ_α は、一次式を基本とし、各節点で 1 なる値をとるように設定されている。重み関数 u_i, ζ^* についても、式(24), (25)と同様の関係を用いて、これらを式(20), (21)に代入して整理すると、次の有限要素方程式を得ることが出来る。

$$M_{\alpha\beta j} \dot{U}_{\beta j} + K_{\alpha\beta j\gamma k} U_{\beta j} U_{\gamma k} + H_{\alpha i \lambda} \dot{\zeta}_{\lambda} = 0 \quad (26)$$

$$A_{\lambda\mu} \dot{\xi}_{\mu} + B_{\lambda\beta j} U_{\beta j} + C_{\lambda\beta j\mu} U_{\beta j} \xi_{\mu} = 0 \quad (27)$$

ここに,

$$M_{\alpha\beta j} = \int_V (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta}) \delta_{ij} dV, \quad K_{\alpha\beta j\gamma k} = \int_V (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} \Phi_{\gamma, j}) \delta_{ik} dV$$

$$H_{\alpha i \lambda} = \int_V g (\Phi_{\alpha} \Phi_{\lambda, i}) dV, \quad A_{\lambda\mu} = \int_V (\Phi_{\lambda} \Phi_{\mu}) dV$$

$$B_{\lambda\beta j} = \int_V h (\Phi_{\lambda} \Phi_{\beta, j}) dV, \quad C_{\lambda\beta j\mu} = \int_V (\Phi_{\lambda} \Phi_{\beta, j} \Phi_{\mu}) dV$$

である。式(26), (27)を各有限要素についてたて、これを全節莫についてかきぬ合わせると、流水の場合全体に対する次の方程式を得ることができる。

$$M_{\alpha\beta} \dot{U}_{\beta} + K_{\alpha\beta\gamma} U_{\beta} U_{\gamma} + H_{\alpha\lambda} \dot{z}_{\lambda} - \hat{\Omega}_{\alpha} = 0 \quad (28)$$

$$A_{\lambda\mu} \dot{\xi}_{\mu} + B_{\lambda\beta} U_{\beta} + C_{\lambda\beta\mu} U_{\beta} \xi_{\mu} - \hat{\Sigma}_{\lambda} = 0 \quad (29)$$

ここに、 U_{β} は全節莫の流速、 z_{λ} は全節莫の水位であり、 $M_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta\gamma}$, $H_{\alpha\lambda}$, $A_{\lambda\mu}$, $B_{\lambda\beta}$, $C_{\lambda\beta\mu}$ はそれぞれ式(26), (27)の係数をかきぬ合わせることにより構成される。

ことができる。また、 $\hat{\Omega}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\lambda$ は、境界条件より作成される量である。さらに、簡単のため、式(28), (29)をまとめ、

$$M_{\alpha\beta}\dot{U}_\beta + F_\alpha(U_\beta) = 0 \quad (30)$$

のように表わしておく。ここに、 U_β は、 v_β と z_λ とを表わしている。

解析する時間区間を細く、時間間隔 Δt に分割し、そのうちの一つの時間差を n と表わしておく。式(30)を時間に対して、次のように離散化する。

$$\bar{M}_{\alpha\beta} U_\beta^{n+1/2} = \tilde{M}_{\alpha\beta} U_\beta^n - \frac{\Delta t}{2} F_\alpha(U_\beta^n) \quad (31)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} U_\beta^{n+1} = \tilde{M}_{\alpha\beta} U_\beta^n - \Delta t F_\alpha(U_\beta^{n+1/2}) \quad (32)$$

ここに、 $\tilde{M}_{\alpha\beta} = \alpha \bar{M}_{\alpha\beta} + (1-\alpha) M_{\alpha\beta}$ である。 $\bar{M}_{\alpha\beta}$ は、非対角要素をすべて対角要素に集めた、集中係数行列を示している。また、 α は、式(31), (32)のスキームを安定にするために導入された係数で、実際には、0.8~0.85程度の値を用いている。式(31), (32)で示されるスキームは、2段階ラックス-ウェントロッフ有限要素スキームと呼ばれている。

4. 数値計算例と問題提起

数値計算の例題として、図2~5に、水路内を伝わる段波の計算例を示すことにする。図2に有限要素分割と境界条件を示す。ここに、 $A\sim C$, $B\sim D$ の部分は側壁で壁に直角な方向の流速を0としている。 $A\sim B$, $C\sim D$ の境界は、自然境界条件が規定される境界である。図3において、細線で示された段差のある水位を初期条件として、式(31), (32)に従い計算した結果が示されている。この計算例では、重みつき方程式I(式(20), (21))によっている。重みつき方程式Iを用いた場合、自然境界条件として、何んの量も強制されていない。このため、段波が自然境界($A\sim B$, $C\sim D$)において通り抜けてゆき、最終的に静水面が得られていることがわかる。この計算では、 $\alpha=0$ としているため、人工粘性が、多少大きく作用し、計算された段波が、完全な段波とならず、なめらかにくずれていることがわかる。

図4では、重みつき方程式II(式(20), (23))による場合の計算例を示す。同じく初期条件を手え、計算を続行すると、自然境界 $A\sim B$, $C\sim D$ に段波が到達した後、そこで反射が起こり、逆方向に段波が伝達してゆく様相が計算されている。ここでは式(19)における $\hat{T}_i=0$ としている。このように、重みつき方程式IIを用いると、自然境界

条件として反射の条件を表わすことができる。

図5では、重みつき方程式Ⅱ(式(22), (21))による場合の計算結果を示している。ここに示されている計算結果は現実的でない。この場合、式(18)において $\hat{S}_i = 0$ なる自然境界条件を用いたことに対応し、自然境界 $A \sim B, C \sim D$ において結局 $\varphi = 0$ と強制したことになる。段波の伝播を扱うかぎり、適当な境界条件ではない。

図6, 7では、一定勾配水路を型上する孤立波の変形を扱っている。図6には、有限要素分割と初期値として与えた孤立波の波形を示している。図7に、 $\alpha = 0.8$ とした場合、孤立波の型上変形の計算が、有限要素分割とともに、どのように変化するかを示してある。320分割を行えば、十分に孤立波の変形が計算されており、160分割でも、充分実用に供し得る計算結果となっている。

以上の定式化に従って数値計算を行った結果、実用上は、十分な結果を得ることができた。そこで、次のように、問題提起を行いたい。

問題提起 2

有限要素近似式(28), (29)の原方程式(14), (15)に対する近似如何?

問題提起 3

時間に対する離散化を行った式(31), (32)の原方程式に対する近似は如何?

実際の計算では, 係数 α を調節することで, 人工粘性を調節して計算を行っている。そこで,

問題提起 4.

式(31), (32)の安定性は如何? 係数 α の最適なとり方は如何?

数値計算例で, 重みつき方程式の相違による解の相違を示した。これに関して,

問題提起 5

重みつき方程式 I, II, IIIの違による近似解の挙動は如何?

式(31), (32)の離散化公式は, 現在考えられている有限要素解析の中で, 最も計算時間の少い公式の一つである。しかし, 差分法の解析に比べると, 数段; 計算

時間は長くかかるし、計算機の容量も多大に必要である。
そこで、

問題提起 6.

差分法に比べて計算時間がほとんど変わらず、電子計算機の容量が少くすみ、人工粘性が必要でなく、かつ、誤差の少ない有限要素近似公式は如何？

5. 結言

わが国には 特定重要港湾 16 を初めとして、地方港湾・漁港 合わせて 3800 近くの港湾がある。また、わが国の海岸線の総延長は 31,818 km ときわめて長い。このように海洋国日本において、海岸の重要性は、ますます増大するものと考えられる。このことから、問題提起 6. に述べた命題の 1 日でも早い解決が望まれるところである。

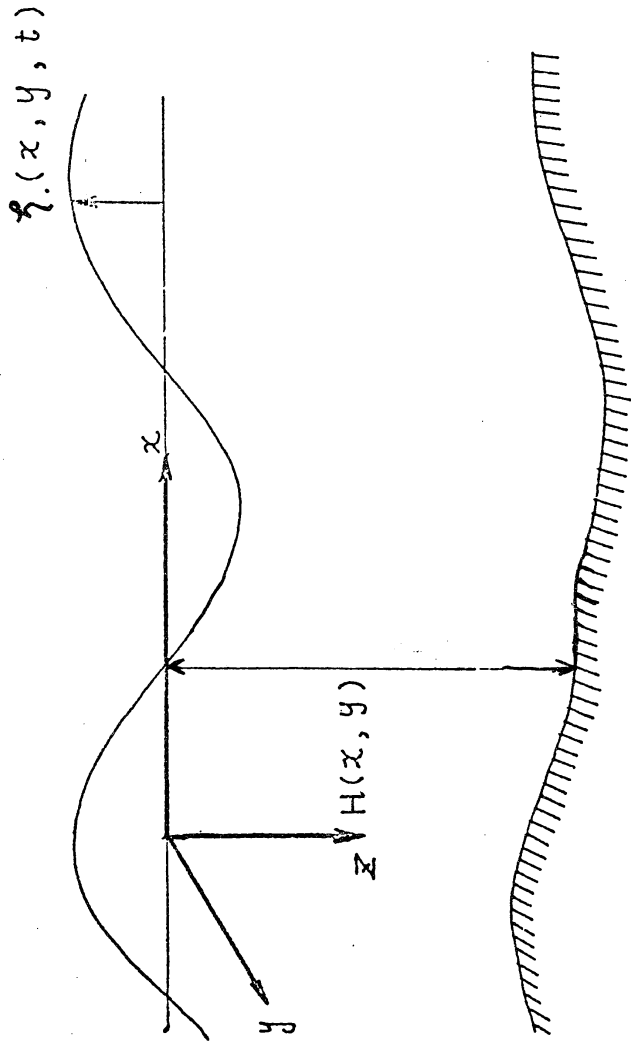
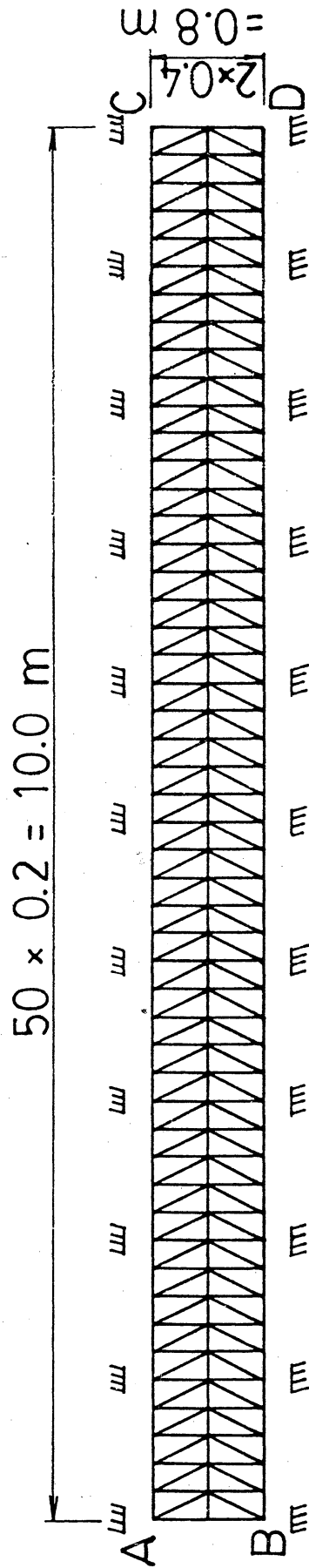


图 1 座标系



图乙 水路与有限要素分割

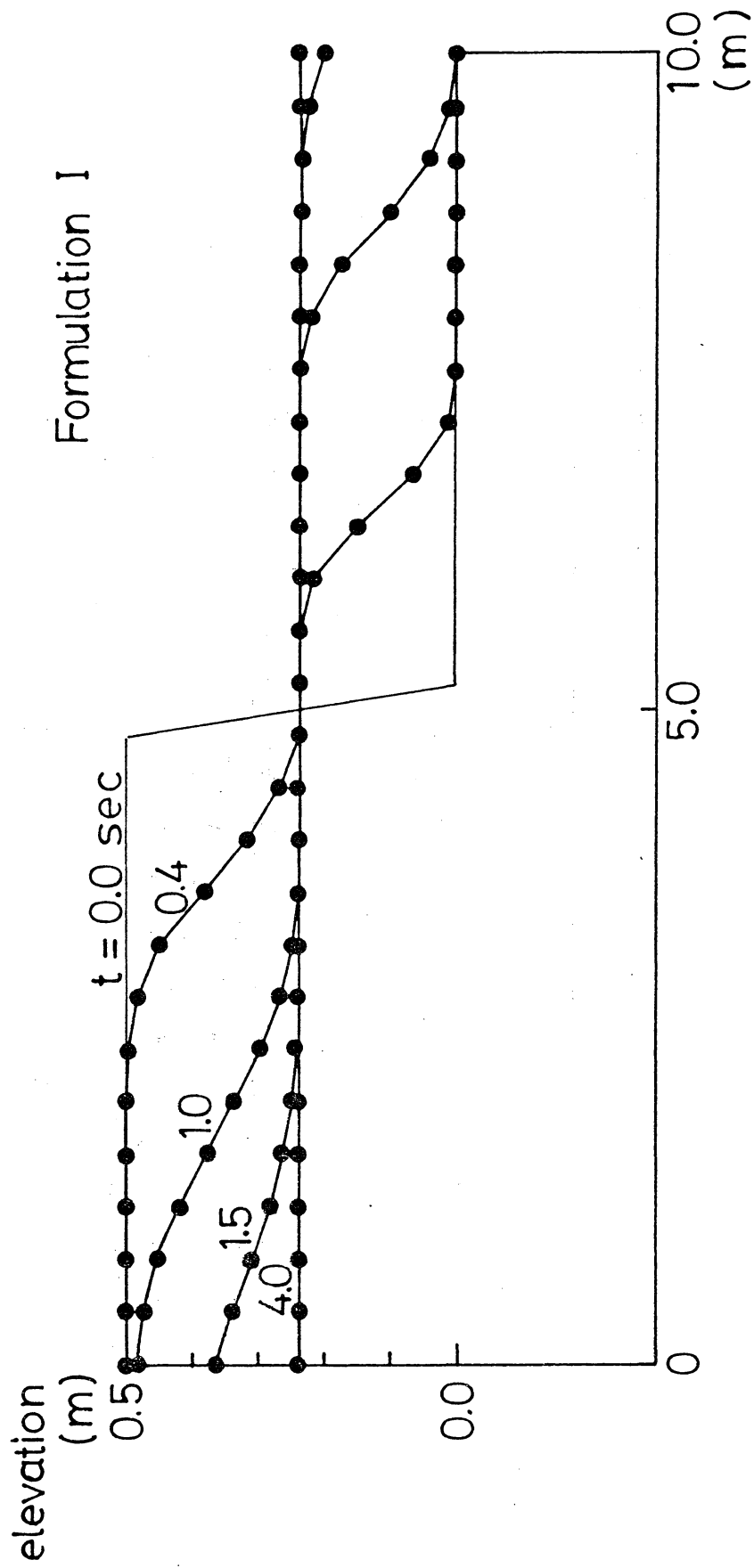


図3 計算された水位

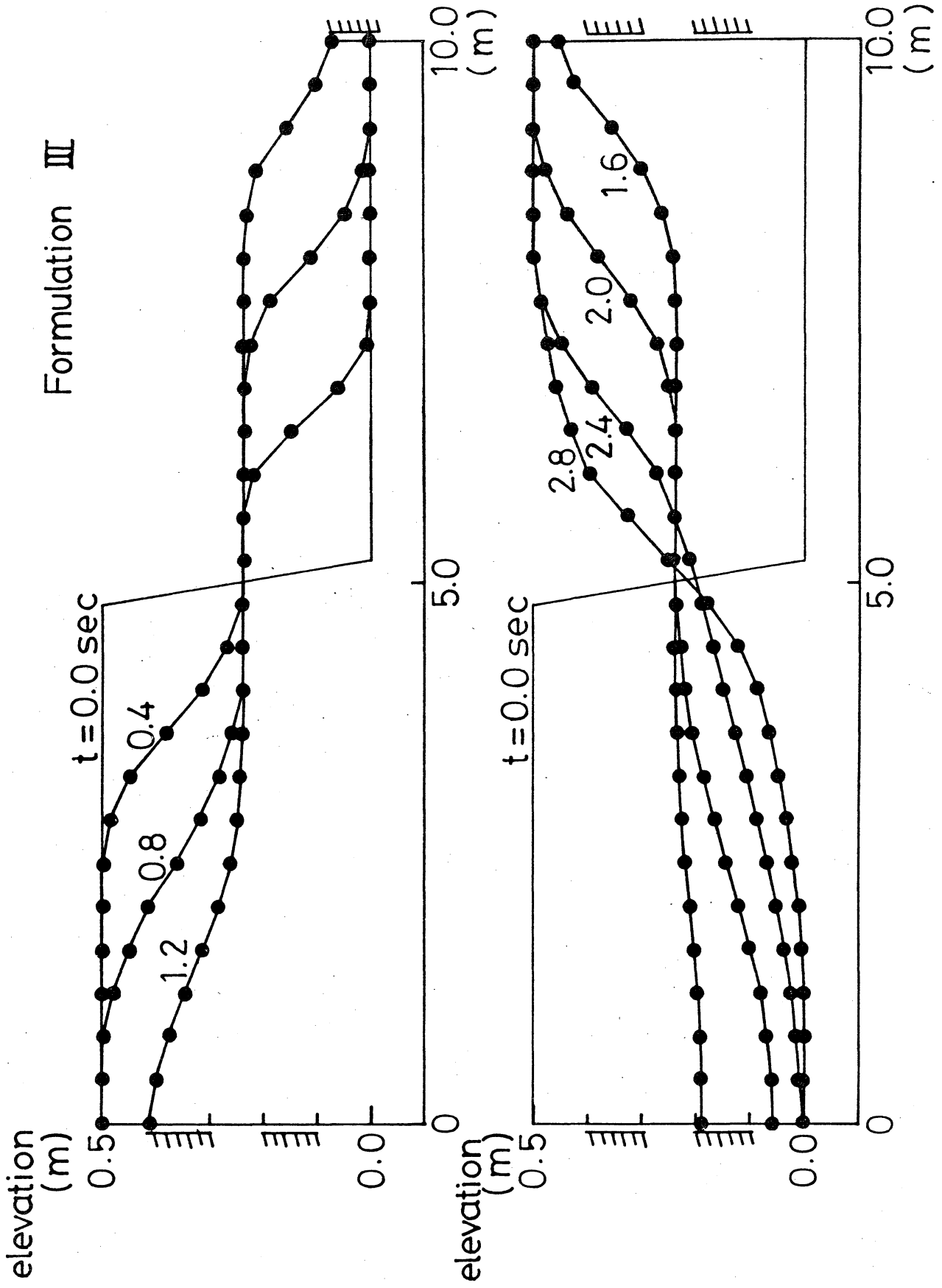


圖4 計算水位

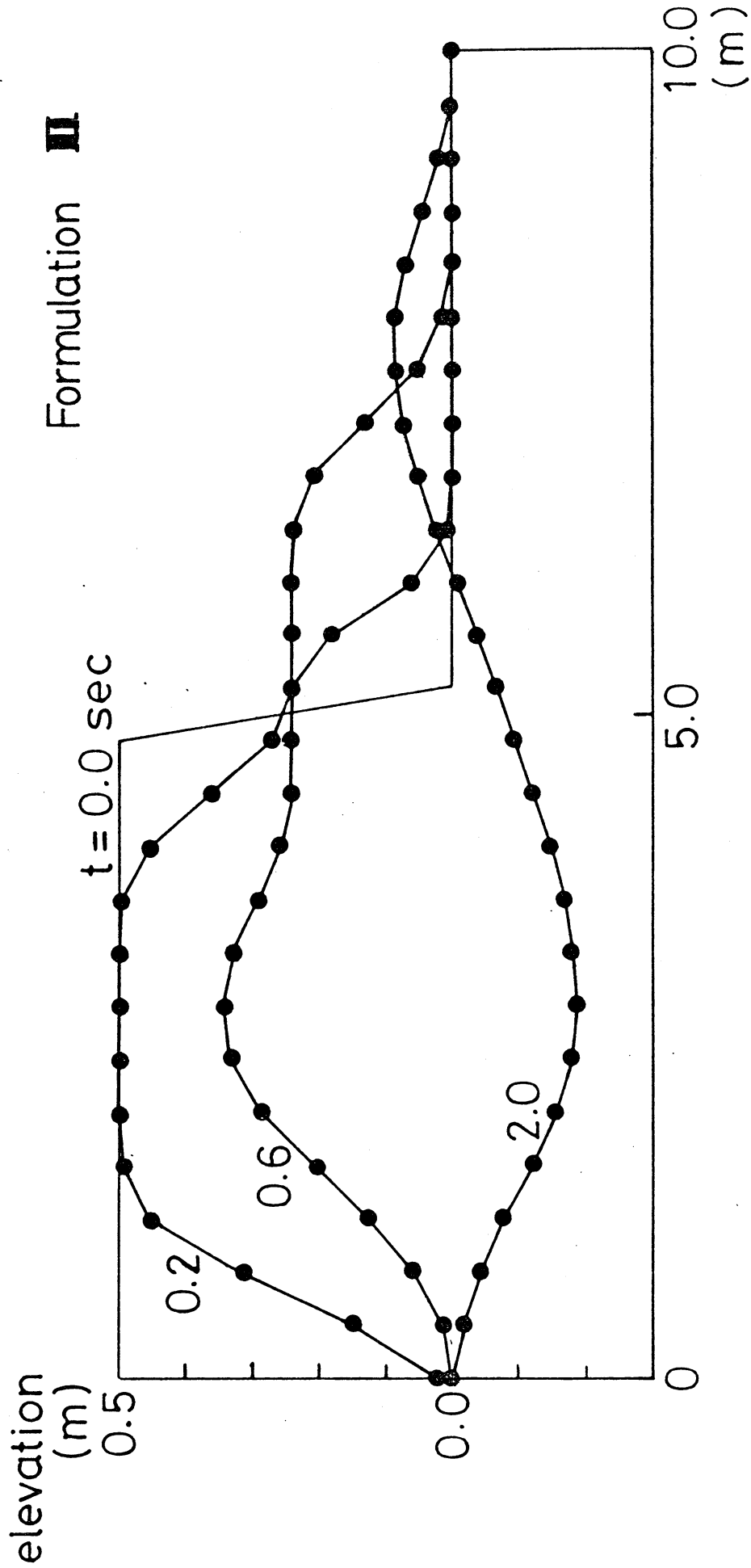


图5 計算之水石水位

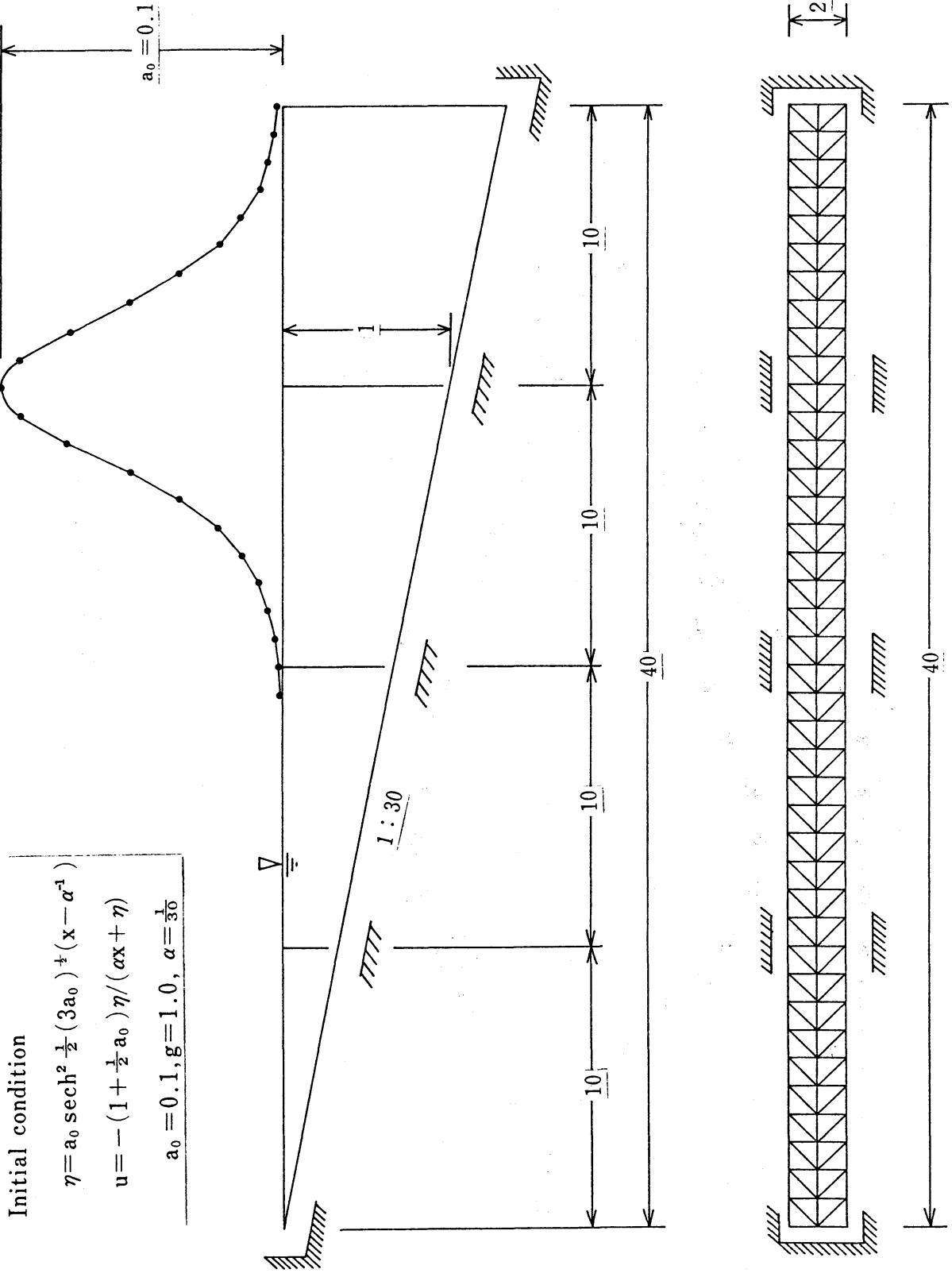


圖6 有限要素分割と初期条件

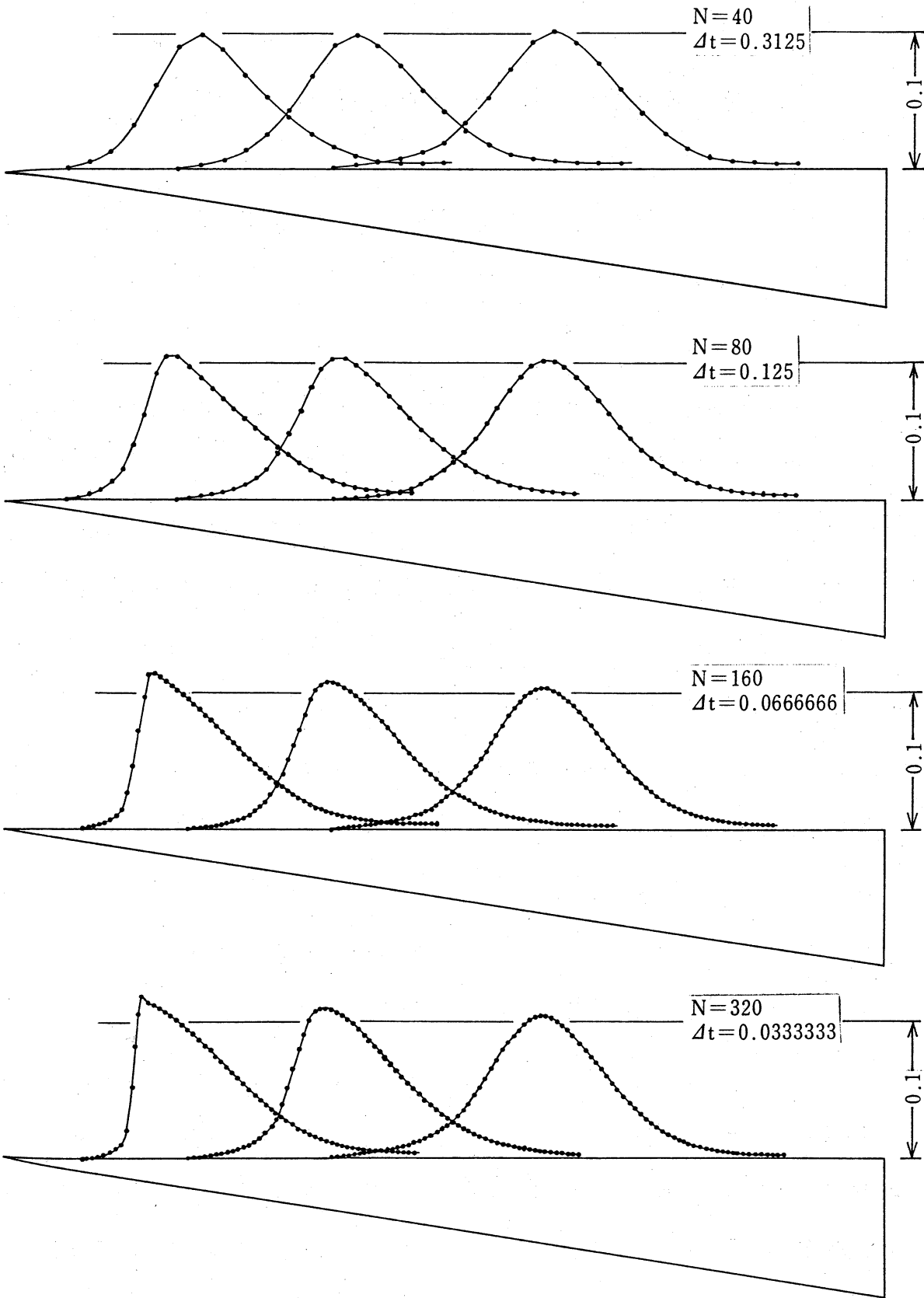


圖 7 計算波包水位