数理解析研究所講究録
第 386 巻 1980 年 269-284



# 反応拡散系における大域的分岐解の構造

京都産業大学　理学部
西浦廉政

次の半線型放物型方程式系を考える

$$
(\tilde{P}) \quad \begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + f(u, v) \\ \\ v_t = d_2 \Delta v + g(u, v) \end{cases} \qquad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega
$$

境界条件　$\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0$　　on $\partial\Omega$

$\Omega$ は $\mathbb{R}^n$ の滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ領域とする。($f, g$ についての詳しい仮定は後述)　このような形の方程式系は population dynamics, biochemistry, morphogenesis 等、様々な分野であらわれる。それらに共通して言える最初の仮定は、(空間−時間) 一様な状態が存在することである。

[仮定 1]

$(\tilde{P})$ は定数解 $\bar{U} = (\bar{u}, \bar{v})$ を有する。

これは $f(u,v)=g(u,v)=0$ をみたす $\bar{U}$ が存在すると言っても同じである。ここでは簡単の為、上のような $\bar{U}$ は一意的だとしよう。

この $\bar{U}$ は、空間一様な摂動に対しては、安定であるとする。すなわち

[仮定 2] $\bar{U}$ は常微分方程式系

$$\begin{cases} u_t = f(u,v) \\ v_t = g(u,v) \end{cases}$$

の安定な平衡点である。($f, g$ の $\bar{U}$ におけるヤコビ行列 $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$ の行列式が $>0$、トレースが $<0$)

問題 (P) の空間非一様な解は存在するか？ 又、$(d_1, d_2)$ が変化する時、それらの解はどのように変わるか？

勝手な $f, g$ に対しては、非一様解は一般に存在しない。そこで考えるべき $f, g$ に対する仮定を述べよう。

[仮定 3] $f(u,v)=0$ をみたす曲線を $(u,v)$-空間で描くと、それは S 字形をしている。すなわち、それを $u$ について解いた時、3つの枝 $u=h_i(v)$ $(i=0,1,2)$ からなり、定義域の共通部分では、($h_i$ の定義域を $I_i$ とかく)

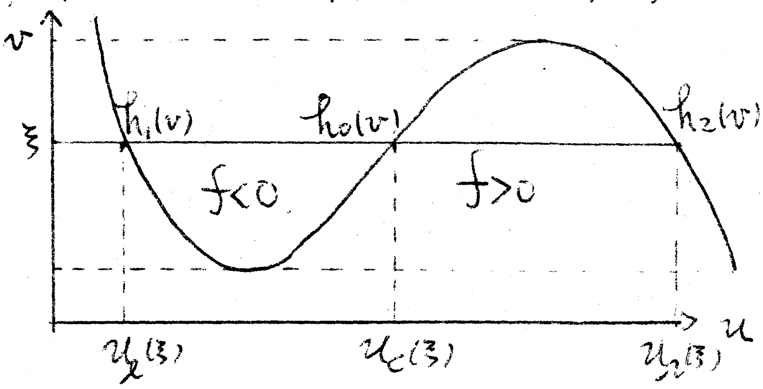
$$h_1(v) \leq h_0(v) \leq h_2(v)$$

が成り立つとする。(図1をみよ) さらに、各枝の上で

$$\frac{\partial f}{\partial u}(h_i(v),\ v)) \neq 0$$

を満たし(定義域の端点は除く)、$f>0$ の領域は $u=h_0(v)$ の上側が対応しているとする。

図1




注意1　上の仮定より $v$ を $h_0$ の定義域 $I_0$ の一点 $\xi$ で固定すると、$f(u,\xi)=0$ は3つの零点

$$u_l(\xi) < u_c(\xi) < u_r(\xi)$$

をもつ。

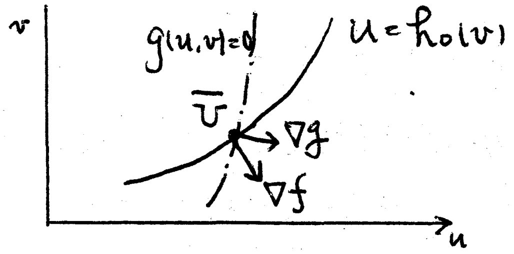
[仮定4]　$J(\xi)$ を $J(\xi)=\int_{u_l(\xi)}^{u_r(\xi)} f(u,\xi)\,du$ と定義する時、$J(\xi)$ は唯一の零点 $\xi=\xi^*$ をもち、そこで $\left.\frac{d}{d\xi}J(\xi)\right|_{\xi=\xi^*} < 0$ をみたす。

[仮定5]　定数解 $\bar{v}$ は $u=h_0(v)$ 上にある。

注意2　仮定2と5より、$\bar{v}$ 付近での $f(u,v)=0$ と

$g(u,v)=0$ の等高線は図2のようになっている.

図2




これらの仮定をみたす具体的なモデルのいくつかは，例えば[1]をみられたい。以下では簡単の為，空間1次元と限定する。そして問題は定常問題

$$
(SP)\begin{cases} 0 = d_1 u_{xx} + f(u,v) & x \in (0,1) \equiv I \\ 0 = d_2 v_{xx} + g(u,v) \\ u_x(0) = v_x(0) = u_x(1) = v_x(1) = 0 \end{cases}
$$

の解で，空間非一様なものを求め，それらの拡散係数への依存性を調べることであった。(SP)の非定数解を求める解析的手法としては，次の2つが代表的である.

(i). 分岐理論

(ii). 特異摂動論.

(i)はよくわかっている解（ここでは $\bar{U}$）がパラメータ（ここでは $(d_1, d_2)$）を変化させる時，(拡散)不安定性をおこし，新しい(非一様な)解にとって代わられる現象を解析する手法であり，(ii)はあるパラメータ（ここでは $d_1$）が退化する（0になる）付近での解を，そのパラメータを0とおいた退化問題の解をもとにして，

摂動展開により、得ようというものである。この小論の結論は、これら2つの方法で得られる解は、実は1つのものの2つの側面であるということである。少し詳しく述べる為に、記号を準備しよう。

$$\mathbb{R}^+ = \{ d_1 \mid d_1 > 0 \}$$

$$X = (H^2_N(I))^2 \text{, ここで}$$

$$H^2_N(I) = \text{closure of } \{\cos n\pi x\}_{n=0}^{\infty} \text{ in } H^2(I)$$

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}^+ \times X$$

$\mathcal{S}$ = (SP)の非定数解全体の集合の$\mathcal{E}$における閉包。

注意3. 元々(SP)に含まれるパラメータは$d_1, d_2$の2つであるが、ここでは$d_2$は任意に固定していると考え、$d_1$のみを変化し得るパラメータと考える。つまり$(d_1, d_2)$を同時に動かすと扱いにくいので、$d_2$を勝手に止めた断面での$d_1$-依存性を調べ、その後$d_2$を流してみることで全体像を得ようとするのである。従って、(SP)の解というときは、常に($d_1$の値, $v$) $\in \mathbb{R}^+ \times X$という対で言うことにする。

さて、これらの記号を用いて結論を述べると、$\mathcal{E}$のある1点において自明解$\bar{v}$から分岐した解は、$d_2$が大のとき$\mathcal{E}$空間において、十分小さい$d_1$まで延長可能であり、そこで

特異摂動法によって得られた解に連結される。言いかえると、$\mathcal{S}$において、分岐解を含む最大連結成分(component)は特異摂動解を含む。(図3)

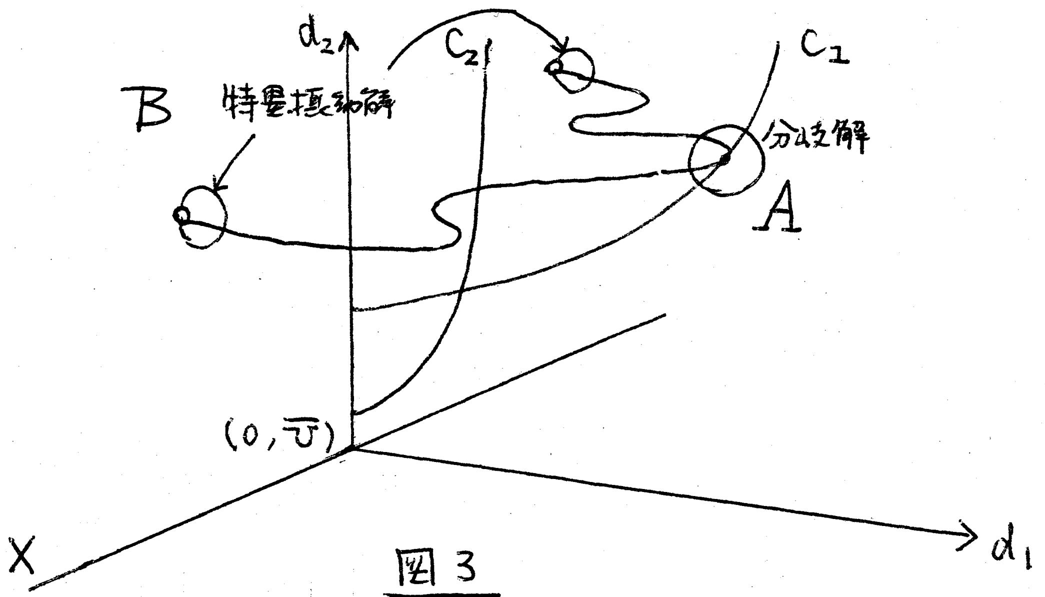



図3

この主定理がどのようにして得られるか、その概要を以下で簡単に述べよう。

1. 局所分岐理論 ([2])

$d_1$を変える時、$\bar{U}$がいつ不安定化し、新しい非定数解が出現するかは、次の$\bar{U}$における線型固有値問題を解くことによりわかる。

$$(\mathrm{E}).\quad \begin{cases} D\Phi_{xx} + B\Phi = \lambda\Phi \\ \Phi_x(0) = \Phi_x(1) = 0 \end{cases}$$

ここで $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, $B = \left.\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}\right|_{(\bar{u},\bar{v})}$, $\Phi = {}^t(\varphi_1, \varphi_2)$

$\lambda=0$ となる $(d_1, d_2)$ の値が $\bar{U}$ が不安定化するところに対応し，それは Fourier-cosine 展開により，易く，次の双曲線の族で与えられることがわかる。

(1) $$C_n \; ; \; d_2 = \frac{b_{11} b_{21}/(n\pi)^4}{d_1 - b_{11}/(n\pi)^2} + \frac{b_{22}}{(n\pi)^2}$$

（図3に $C_1$, $C_2$ が描いてある）

$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ を（$\bar{U}$ からの）分岐集合とよび $\mathcal{B}$ とかく

又，任意の2つの双曲線の交点を $\mathcal{B}$ からすべて取り除いたものを $\mathcal{B}'$ とかこう。このとき次の定理が成り立つ

<u>定理1</u>（図3の A 部分）

任意の $D_c = (d_1^c, d_2) \in \mathcal{B}'$ （$d_2$ は任意に固定）に対して，ある正定数 $\varepsilon_0$ が存在し，(SP) は $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ の範囲で1径数の解の族 $(d_1(\varepsilon), U(\varepsilon)) \in R^+ \times X$ をもつ。ここで $d_1$ は $d_1(0) = d_1^c$ をみたす滑らかな関数であり，$U(\varepsilon)$ は $\Phi_n$ を (E) において $D = D_c$ とした零固有値に対応する（正規化された）固有関数とする時，

$$U(\varepsilon) = \bar{U} + \varepsilon \Phi_n + o(|\varepsilon|)$$

とかける。さらに上の分岐は片側分岐である。すなわち $d_1(\varepsilon) < d_1^c$ (or $> d_1^c$) ; $\varepsilon \neq 0$ である。

## 2. 特異摂動理論（[3]）

$d_1$ が十分小さいとき、$d_1=0$ とおいた次の退化問題の解をもとに (SP) の解が構成できる。

$$\begin{cases} 0 = f(u,v) \\ 0 = d_2 v_{xx} + g(u,v) \end{cases}$$

ここで注意が必要である。仮定3より、第1式を $u$ について解く。解き方は、不連続解も許すとすれば無数にある。そこで次のような class で解をさがす。

(2) $\quad (u,v) \in L^2(I) \times H^1(I)$

(3) $\quad f(u,v) = 0 \quad$ a.e. in $I$

(4) $\quad (d_2 v_x, \phi_x) = (g(u,v), \phi) \quad$ for all $\phi \in H^1(I)$

天下り的であるが (3) の解として、次をとる。

(5) $$u = h^*(v) = \begin{cases} h_1(v) & \text{for } \{v < \xi^*\} \cap \mathring{I}_1 \\ h_2(v) & \text{for } \{v > \xi^*\} \cap \mathring{I}_2 \end{cases}$$

$d_1 \neq 0$ へ解を延長する為には、このとり方に限られる。

(5)を(4)へ代入すれば，(2)〜(4)は次のスカラー方程式を解くことに帰着する

(6) $\quad v \in H^1(I)$

(7) $\quad (d_2 v_x, \phi_x) = (G^{\xi^*}(v), \phi), \quad {}^{\forall}\phi \in H^1(I).$

ここで

$$G^{\xi^*}(v) = \begin{cases} G_1(v) & \text{for } \{v<\xi^*\}\cap \mathring{I}_1 \\ \\ G_2(v) & \text{for } \{v>\xi^*\}\cap \mathring{I}_2 \end{cases}$$

$G_i = g(h_i(v), v)$とし，$\frac{d}{dv}G_i(v)<0$をみたすとする．

<u>補助定理1</u>

ある正定数$\bar{d}_2$が存在して，$d_2>\bar{d}_2$に対して，(6)-(7)の単調増大解$v_{1,0}^{\xi^*,\alpha}(x)\in C^1(I)$が一意的に存在する．（ここで$\alpha = d_2^{-1}$を表わす）

<u>注意4</u>. $x=\frac{1}{2}$で折り返した$v_{1,1}^{\xi^*,\alpha}(1-x)$もむろん(6)-(7)の解であるが，ここでは単調増大解のみを考える．

(5)を用いて，$u_{1,0}^{\xi^*,\alpha}(x)$を

$$u_{1,0}^{\xi^*,\alpha}(x) = h^*(v_{1,0}^{\xi^*,\alpha}(x))$$

と定義すると、(2)-(4) の解 の対として

(8)　　$\left( U_{1,0}^{\xi^*,\alpha}(x),\ V_{1,0}^{\xi^*,\alpha}(x) \right)$

を得る。さて、この解を第1近似として、$d_1 > 0$ の解が構成できる。

<u>定理2</u>　(図3 の B 部分)

仮定1-5 の下で $d_1 = \varepsilon^2$ とおいた

$$(SP)_\varepsilon \begin{cases} 0 = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u, v) \\ 0 = \dfrac{1}{\alpha} v_{xx} + g(u, v) \end{cases}$$

の解で (8) に $\varepsilon \downarrow 0$ の時 漸近する以下のような解が存在する。すなわち ある正定数 $\varepsilon_0$ と $\alpha_0$ がとれて、任意に固定した $\alpha \in (0, \alpha_0)$ に対して、$(SP)_\varepsilon$ の $\varepsilon$-family の解 $U_\alpha(x;\varepsilon) = (u_\alpha(x;\varepsilon), v_\alpha(x;\varepsilon)) \in (C^2(\bar{I}))^2$ が $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ の範囲で存在し、次をみたす。

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_\alpha(x;\varepsilon) = U_{1,0}^{\xi^*,\alpha}(x), \quad \bar{I} - I_K \text{ で一様} \quad (\forall K > 0)$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} v_\alpha(x;\varepsilon) = V_{1,0}^{\xi^*,\alpha}(x), \quad \bar{I} \text{ で一様}$$

ここで $I_K$ は $U_{1,0}^{\xi^*,\alpha}$ の不連続点を内部に含む、長さ $K$ の区間である。さらに $\varepsilon$ のみに依存する、ある定数 $\delta_0$ がとれて、$U_\alpha(x;\varepsilon)$ の ($(C^2(\bar{I}))^2$ の位相での) $\delta_0$-近傍 には、

$(SP)_\varepsilon$ の他の解は存在しない。(局所一意性)

3. Shadow System と近似定理

$d_2$ が十分大きいときの (SP) の分岐解の大域的な挙動は以下で導かれる Shadow System のそれにより よく近似されることがわかる。便宜上 (SP) を

$$
(SP)\quad \begin{cases} 0 = d_1 u_{xx} + f(u, v) \\ 0 = v_{xx} + \alpha g(u, v) \qquad \alpha = d_2^{-1} \end{cases}
$$

とおこう。形式的に $\alpha \downarrow 0$ ($d_2 \uparrow \infty$) とすると、$v_{xx} = 0$, 従って境界条件より $v$ はある定数 $\xi$ に等しくなければならない。一方 (SP) の第2式を積分して

$$
\int_0^1 g(u, v)\, dx = 0
$$

が $\alpha$ に無関係に成立しなければならないこともわかる。かくして $\alpha \downarrow 0$ ($d_2 \uparrow \infty$) の時の極限の系として次を得る。

$$
(9)\qquad 0 = d_1 u_{xx} + f(u, \xi)
$$

$$
(10)\qquad \int_0^1 g(u, \xi)\, dx = 0
$$

$$
(11)\qquad u_x(0) = u_x(1) = 0
$$

ここで $v = \xi$ は定数関数である。

この系をもつ(SP)の <u>Shadow System</u> と呼ぶ。
以下では(9)~(11)の($u$について)第1モード(すなわち単調な解)の解しか考えない。いくつかの記号を用意しよう。

$\mathcal{C}_0^1$ ; $\mathcal{S}$ において $(f_u(\bar{u},\bar{v})/\pi^2, \bar{v})$ を含む連結成分。ここで $(f_u(\bar{u},\bar{v})/\pi^2, \bar{v})$ は(9)~(11)の $\bar{v}$ からの第1モード解の分岐点である。

$\mathcal{C}_\alpha^1$ ; $\mathcal{S}$ において $(d_1^c, \bar{v})$ を含む連結成分。ここで $(d_1^c, \alpha^{-1}) \in C_1$ ((11)をみよ)。

$Sec_{d_1}(W) = \{ w \mid (d_1, w) \in W \}$, 但し $W$ は $\mathcal{E}$ の勝手な部分集合。

<u>定理3.</u> ($\mathcal{C}_0^1$ の大域的挙動)

$\mathcal{C}_0^1$ は(generically に) locally one-parametrizable smooth curve である。そして、それは $(f_u(\bar{u},\bar{v})/\pi^2, \bar{v})$ から出発し、$d_1 \downarrow 0$ のとき、$(0, (u^*(x), \xi^*))$ と $(0, (u^*(1-x), \xi^*))$ に hit する。ここで

$$u^*(x) = \begin{cases} u_\ell(\xi^*) & 0 \leqq x < x^* \\ u_r(\xi^*) & x^* < x \leqq 1 \end{cases}$$

であり，$\alpha^*$ は次の根として一意に決まる．

$$\int_0^1 g(u^*(x), \xi^*)\,dx = 0.$$

又，$d_1 \downarrow 0$ のとき，上の解に hit する (9)〜(11) の branch は他にはない．

$d_2 \gg 1$ のとき $\mathcal{C}_0^1$ が $\mathcal{C}_\alpha^1$ を良く近似していることを，次の定理は述べている．

<u>定理4</u>（近似定理）

$^\forall \delta_1$，$^\forall \varepsilon > 0$ に対して，ある正定数 $\alpha_1$ が存在して，$\mathcal{C}_\alpha^1$，$\mathcal{C}_0^1$ を共に空間 $\mathcal{E}_{\delta_1} = [\delta_1, \infty) \times X$ に制限する時，$\mathcal{C}_\alpha^1$ は $0 < \alpha \leqq \alpha_1$ の範囲にあるとき，$\mathcal{C}_0^1$ の $\varepsilon$-近傍に属する．

以上の準備の下に，最初に述べた主定理が証明される

## 4. $\mathcal{C}_\alpha^1$ の $d_1$ に関する大域的挙動

最初に，固定した $\varepsilon$ に対し，定理2で述べた特異振動解 $U_\alpha(x;\varepsilon)$ は，$\alpha$ に関して，$X$ での

Cauchy 列をなすことを示すことができる。その極限解を $(u^*(x;\varepsilon),\ \xi^*(\varepsilon))$ とかくと、これは Shadow System (9)-(11) の解となっている。ここで $\xi^*(\varepsilon)$ は $\varepsilon$ に依存する定数関数である。次に、

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (u^*(x;\varepsilon),\ \xi^*(\varepsilon)) = (u^*(x),\ \xi^*)$$

を示すこともできる。すると定理3の最後で述べた $\mathcal{C}_0^!$ の一意性より $(u^*(x;\varepsilon),\ \xi^*(\varepsilon))$ は小さなすべての $\varepsilon$ に対して $\mathcal{C}_0^!$ に一致しなければならない。言いかえると、$U_\alpha(x;\varepsilon)$ は $\alpha \downarrow 0$ のとき $\mathcal{C}_0^!$ に収束するのである。かくして、定理4と $U_\alpha(x;\varepsilon)$ の局所一意性（定理2の最後をみよ）より、次の主定理を得る。

<u>主定理</u>（[1]）.

$\mathcal{C}_\alpha^!$ は $d_1$ に関して、次の意味で大域的に存在する

$$\mathrm{Sec}_{d_1}(\mathcal{C}_\alpha^!) \neq \emptyset \quad \text{for any small } d_1.$$

そして、$\alpha$ が十分小さいとき（$d_2$ が十分大きいとき）、$\mathcal{C}_\alpha^!$ は小さな $d_1$ においては、特異摂動解 $U_\alpha(x;\varepsilon)$ に一致する。

結語的注意

$d_2 \gg 1$ の時は、$\overline{U}$ から分岐した解は $d_1 \downarrow 0$ の時、特異摂動解に接続された。$d_2$ が大きくない時、大域的な様子はどうなるであろうか。これは未だ完全には解決されていない問題であるが、その一部は[4]によって明らかにされている。それによると、例えば次のようなことがわかる。

(i) 2重特異点の局所構造は実は大域的構造につながる。

(ii) secondary bifurcation, tertiary bifurcation に伴う、安定性の回復又は喪失。

(iii) パラメータがある範囲にある時には、複数個の安定解が共存する。

これらは、もちろん相互に関連しており、単独ではとり出しては考えられない。安定性については、意識的に一言も触れなかったが、大域的構造が明確になった所(例えば $d_2 \gg 1$)では、解析的にも明らかになりつつある。いずれにせよ、大域的に完全な描像を得るには、いくつかの問題が未だとり残されている。

## 文献

[1] Y. Nishiura ; Global Structure of Bifurcating Solutions of Some Reaction-Diffusion Systems

Kyoto Sangyo Univ. Research Report 1979 – 12

[2]. M. Mimura, Y. Nishiura, M. Yamaguti : Some diffusive Prey and Predator Systems and Their Bifurcation Problems, Annals of New York Academy of Sciences, 316 (1979)

[3]. M. Mimura, M. Tabata, Y. Hosono ; Mulple Solutions of Two-Point Boundary Value Problems of Neumann Type with a Small Parameter, to appear in SIAM J. Math. Anal.

[4]. H. Fujii, M. Mimura, Y. Nishiura ; A Picture of Global Bifurcation Diagram in Ecological Interacting and Diffusing Systems, to appear in Physica D.