数理解析研究所講究録
第387巻 1980年 29-37

Logarithmic Vector Fields and a Generalized Coxeter Equality

国際基督教大 寺尾宏明

§0. Introduction

この小論で、我々は、free divisorと呼ばれるある種のdivisorについてのいくつかの性質を述べたい。free divisorなる概念は、与えられたdivisorに沿ったlogarithmic vector fieldのgermsのなすsheafの性質を使って定義される(→§1)。free divisorの代表的なものとしては、次のものがある；

1) smooth divisor,
2) isolated hypersurface singularityのsemi-universal deformationのdiscriminant,
3) Coxeter群の鏡映面のunionが作るdivisor (in $\mathbb{C}^n$)。

この3)のdivisorを我々は、Coxeter arrangementと呼ぶ。Coxeter群には、exponentsなるものが存在して、そのexponentsがCoxeter群の最短分解や、Coxeter arrangementの組み合わせ的性質と美しい関係をもつことは、よく

知られている。([2])

ここで我々は、exponents の概念を(適当な条件のもとで)任意の free divisor に拡張する。そして、新たに定義された exponents が依然として、divisor の幾何学的性質と美しい関係をもっていることを述べる。

§1. Free divisor の definition

X を $(n+1)$-次元複素多様体(smooth)として、D を X の divisor とする。Q を D の $x \in X$ に於ける defining equation とする。そして、

$$\Omega^1(\log D)_x := \{\omega;\ \text{germ at } x \text{ of meromorphic form s.t. } Q\cdot\omega \text{ and } Q\cdot(d\omega) \text{ are both holomorphic}\}$$

と定義すれば、$\Omega^1(\log D)_x$ は自然に $\mathcal{O}_{X,x}$-module の構造をもち、$\bigcup_{x\in X}\Omega^1(\log D)_x$ には coherent $\mathcal{O}_X$-Module の構造がはいる。その sheaf を、$\Omega^1(\log D)$ と書く。また、

$$\mathrm{Der}(\log D)_x := \{\theta;\ \text{germ at } x \text{ of holomorphic vector field s.t. } \theta\cdot Q \in Q\cdot\mathcal{O}_{X,x}\}$$

と定義すると、同様に、$\bigcup_{x\in X}\mathrm{Der}(\log D)_x$ には coherent

$\mathcal{O}_X$-Moduleがはいる。これを Der(log D) と書く。
$\Omega^1(\log D)$ と Der(log D) を各々、Dに沿っての log 1-form の germs のなす sheaf, Dに沿っての log vector fields の germs のなす sheaf とよぶ。

Definition 1. Dが $x \in X$ で <u>free</u> であるとは、$\Omega^1(\log D)_x$ が free $\mathcal{O}_{X,x}$-module であることをいう。

Remark. $\Omega^1(\log D)$ と Der(log D) との間に、non-degenerate pairing があることから、

$$D : \text{free at } x \in X \Longleftrightarrow \mathrm{Der}(\log D)_x \text{ が free } \mathcal{O}_{X,x}\text{-module}$$

が云える。

Proposition 2. Qが quasi-homogeneous とせよ。そのとき、

$$D : \text{free at } x \Longleftrightarrow \begin{array}{l} D : \text{smooth at } x \\ \text{or} \\ \mathcal{O}_{X,x}/J(Q)_x : \text{Cohen-Macaulay of Krull dim } (n-1). \end{array}$$

(但、J(Q)は、Qの Jacobian ideal)。

Definition 3. Dが free とは、Dが free at $^\forall x \in X$ をいう.

Free divisor の例としては、§0にあげたようなものがあるが、その中で、Coxeter arrangement とその exponent についての結果を復習してみよう.

Wを $GL(n+1, \mathbb{R})$ の subgroup で、直交鏡映で生成されるとせよ。このとき、Wは、$\mathbb{C}[z_0, \cdots, z_n]$ に act して、その不変式全体の集合を、$\mathbb{C}[z_0, \cdots, z_n]^W$ で表わそう. Wが有限群のとき、$P_0, \cdots, P_n$ なる同次多項式が存在して、

$$\mathbb{C}[z_0, \cdots, z_n]^W = \mathbb{C}[P_0, \cdots, P_n]$$

となり、しかも、$P_0, \cdots, P_n$ は ($\mathbb{C}$上) 代数的に独立である. このとき、

$$\{\deg P_i - 1\}_{i=0,\cdots,n}$$

は、P_i たちの選び方によらずに決まる。これらの $(n+1)$ ケの整数を、exponent とよぶ.

これら exponent の意味を明らかにするため、

$\pi_0, \cdots, \pi_{n+1} \in \mathbb{C}[y_0, \cdots, y_n]$ を、

$$\prod_{i=0}^{n}(t+y_i) = \sum_{k=0}^{n+1} \pi_k t^k$$

によって、定義する。このとき、Coxeter は、次の美しい結果を示した。([2])

Theorem 4. $(d_0, \cdots, d_n)$を、Coxeter arrangement Dのexponentsとする。このとき、$k+k'=n+1$なら、

$$\pi_k(d_0, \cdots, d_n) = \#\{w \in W \,;\, l(w) = k'\}$$
$$= b_{k'}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus D) \quad (\mathbb{C}^{n+1} \setminus D \text{ の } k' \text{次 Betti 数}) \quad (k=0, \cdots, n+1)$$

が成立している。但し、$l(w)$は、wの最短分解([1])の長さを表わす。

従って、

$$\prod_{i=0}^{n}(1+d_i) = \sum_{k=0}^{n+1} \pi_k = \# W = f(D)$$

が成立する。ここで、$f(D)$とは、$D_{\mathbb{R}}$をDのreal formとしたときの、$\mathbb{R}^{n+1} \setminus D_{\mathbb{R}}$の連結成分(i.e. Weyl chamber)の個数のことである。

Definition 5. $Q \in \mathbb{R}[z_0, \cdots, z_n]$を、1次同次式の積で square-free なものとする。Dを、

$$D = \{(c_0, \cdots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \,;\, Q(c_0, \cdots, c_n) = 0\}$$

と定義すると、Dは、$\mathbb{C}^{n+1}$の中で、原点を通るような有限枚の hyperplanes の union になる。このDを、我々は、<u>arrangement</u> とよぶ。

Definition 6. Arrangement Dが、free なとき、$\mathrm{Der}(\log D)_0$ の homogeneous basis の "degree" を、Dの <u>exponent</u> とよぶ。ただし、homogeneous vector field の degree とは、

$$\deg\left(\sum f_i \frac{\partial}{\partial z_i}\right) = \deg f_i \quad (f_i \neq 0)$$

で、定義するものとする。

このとき、我々は、定理4を拡張して、次の結果を示すことができる。

Theorem 7. Dを、free arrangement として、その exponent を、$(d_0, \cdots, d_n)$ とする。そのとき、$k+k'=n+1$ なら、

$$\pi_k(d_0, \cdots, d_n) = b_{k'}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus D) \quad (k=0, \cdots, n+1)$$

$$\prod_{i=0}^{n}(1+d_i) = f(D)$$

但し、$f(D)$の定義は、Coxeter arrangement のときに

準じるものとする.

この定理の証明には、次のふたつの結果を使う.

i) Dがfreeであるということから、
$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}/J(Q)_0$ のHilbert polynomialが、組み合わせ的に計算できるという事実.

ii) Zaslavskyによるface-counting formula of an arrangement ([8]).

証明の詳細は、[7]に書かれる予定である.($n=2$のときは、別証が[6]にある)

Theorem 7のひとつの応用として、与えられたarrangementが、non-freeなことの十分条件が得られる。例えば、$n=2$, $\pi_1=13$, $f(D)=52$なるarrangement Dで、simplicialであるものが存在する([4])が、これをみたすようなexponentsは存在しないので、Dはfreeでないことになる。これは、次の予想の ⟸ 方向のimplicationの反例になっている(cf. [3]).

Conjecture: Dを、$(n+1)$-次元complex manifoldのdivisorとするとき、

$$D: \text{free at } x \in X \iff {}^{\exists}V;\ \text{a nbd of } x \text{ s.t. } V \setminus V \cap D \text{ is } K(\pi, 1).$$

このConjectureは、最初、斎藤恭司によって、提出されたもので、我々の研究のひとつのmotivationであった。

また、⇒方向のimplicationについて、最近、河野俊丈と筆者によって、反例が存在することが示された。（[5]にあるarrangementのfreenessのcriterionと、de Rham homotopy theoryを用いる）

しかし、多くの例が示すように、log 1-formの構造が"何らかの形で"higher homotopyと密接な関連を持っていることは確かと思われる。

REFERENCES

[1] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie, Chap. 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1968.

[2] H.S.M. Coxeter, The product of generators of a finite group generated by reflections, Duke Math. J. 18 (1951), 765–782.

[3] P. Deligne, Les immeubles des groupes et tresses generalisés, Invent. Math. 17 (1972), 273-302.

[4] B. Grünbaum, Arrangements of hyperplanes, Proc. Second Louisiana Conference on Combinatorics and Graph Theory, Baton Rouge, (1971).

[5] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness I (to appear in Proc. of Fac. of Sci., Univ. of Tokyo (1980)).

[6] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness II — the Coxeter equality — (to appear).

[7] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and a generalized Coxeter equality (in preparation).

[8] T. Zaslavsky, Facing up to Arrangements: Face-Count Formulas for Partitions of Spaces by Hyperplanes, Memoirs of AMS No. 154, Providence, (1975).