数理解析研究所講究録
第 387 巻 1980 年 64-82

On meromorphic maps into $P^N(\mathbb{C})$

名大 教養　藤本坦孝

§1. 序

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の非定数有理型関数について，異なる5個の値の逆像が一致する様なものは高々1個しかなく，異なる3個の値の逆像が重複度もこめて一致するものは高々2個であることが知られている([9])。これらの事実を，$\mathbb{C}^n$ からN次元複素射影空間 $P^N(\mathbb{C})$ への有理型写像の場合に拡張することを考える。

f を $\mathbb{C}^n$ から $P^N(\mathbb{C})$ への有理型写像とする。$f(\mathbb{C}^n)$ がいかなる超平面にも含まれないとき，f は非退化であるといい，$f(\mathbb{C}^n)$ がいかなる代数的超曲面にも含まれないとき，代数的非退化であるという。また，$f(\mathbb{C}^n)\not\subset H$ をみたす超平面 H に対し，因子とみての H の f によるひきもどしを $\nu(f,H)$ で示す。ここで，因子は，[10]で述べられた意味で理解する。したがって，$\nu(f,H)$ は，各点 $z\in\mathbb{C}^n$ に対し，$f(z)\notin H$ のとき $\nu(f,H)(z)=0$，$f(z)$ が重複度 m で H に含まれるとき

$\nu(f,H)(z)=m$ として定義された $\mathbb{C}^n$ 上の整数値関数を表す。

$P^N(\mathbb{C})$ 内の一般の位置にある超平面 H_i、および $\mathbb{C}^n$ 上の正因子 ν_i $(1\leqq i\leqq q)$ に対し、$\nu(f,H_i)=\nu_i$ をみたす非退化有理型写像 $f:\mathbb{C}^n\to P^N(\mathbb{C})$ の全体を $\mathcal{F}(H_1,\cdots,H_q;\nu_1,\cdots,\nu_q)$ 略して $\mathcal{F}$ で示す。

$q=N+1$ の場合、$\mathcal{F}$ の構造はみやすい。実際、$H_i=\{w_i=0\}$ $(1\leqq i\leqq N+1)$ となる $P^N(\mathbb{C})$ 上の斉次座標 $(w_1:w_2:\cdots:w_{N+1})$ を取り、$\nu_{k_i}=\nu_i$ をみたす $\mathbb{C}^n$ 上の整関数 k_i を選べば、$\mathcal{F}$ の元 f は、整関数 $g_1,\cdots,g_{N+1}$ によって

$$f=(k_1e^{g_1}:k_2e^{g_2}:\cdots:k_{N+1}e^{g_{N+1}}) \qquad (1)$$

と書ける。ここで、ν_{k_i} は、$k_i(z)\neq 0$ ならば $\nu_{k_i}(z)=0$、z が k_i の m 位の零点ならば $\nu_{k_i}(z)=m$ として定義された因子を表す。逆に (1) の形で書ける非退化有理型写像 f は $\mathcal{F}$ の元である。

$q\geqq N+2$ の場合、次の諸定理が成り立つ。

定理 I ([3])。(i) $q\geqq 3N+2$ ならば $\#\mathcal{F}\leqq 1$。

(ii) $q=3N+1$ ならば、任意の元 $f,g\in\mathcal{F}$ に対し、$L\cdot f=g$ をみたす射影一次変換 $L:P^N(\mathbb{C})\to P^N(\mathbb{C})$ が存在する。

ここで $\#\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}$ の元の個数を表す。

定理 II ([4], [5])。(i) $q\geqq 2N+3$, $f,g\in\mathcal{F}$, f または g が代数的非退化ならば $f=g$.

(ii') $q=2N+2$, $f, g\in\mathcal{F}$, f または g が代数的非退化ならば, $(f\times g)(\mathbb{C}^n)$ は, $P^N(\mathbb{C})\times P^N(\mathbb{C})$ 内のいくつかの高々2次の多項式の共通零点として与えられる N 次代数的集合に含まれる。

定理 III ([6]). $q=N+2$ とする. $\mathcal{F}$ が元 $f^1,\cdots,f^{N+1}$ を含み, それらが代数的に独立, すなわち, $(f^1\times\cdots\times f^{N+1})(\mathbb{C}^n)$ が $P^N(\mathbb{C})\times\cdots\times P^N(\mathbb{C})$ 内のいかなる代数的真部分集合にも含まれないとき, $\mathcal{F}$ は $f^1,\cdots,f^{N+1}$ 以外の元を含まない。

定理 IV ([7]). $q=N+2$ のときつねに $\#\mathcal{F}<\infty$.

定理 IV から次の結果が得られる.

系 1. $f:\mathbb{C}^n\longrightarrow P^N(\mathbb{C})$ を非退化有理型写像, $\gamma:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ を双正則写像とする. $P^N(\mathbb{C})$ 内の一般の位置にある超平面 H_i $(1\leqq i\leqq N+2)$ に対し, $\nu(f,H_i)\circ\gamma=\nu(f,H_i)$ ならば, $f\circ\gamma^{j_0}=f$ をみたす正整数 j_0 が存在する.

実際, $f\circ\gamma^j\in\mathcal{F}(H_1,\cdots,H_{N+2};\nu(f,H_1),\cdots,\nu(f,H_{N+2}))$ $(j=1,2,\cdots)$ ゆえ, $f\circ\gamma^{j_1}=f\circ\gamma^{j_2}$ となる異なる j_1, j_2 があり, $j_0=j_2-j_1$ に対し, $f\circ\gamma^{j_0}=f$ が成り立つ.

特に $n=N=1$ の場合に適用すれば, 次の系を得る.

系 2. $\wp$ を $\mathbb{C}$ 上の非定数有理型関数とする. $\omega_1/\omega_2\notin\mathbb{R}$ である $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$, および異なる a_1, a_2, a_3 について, $\wp^{-1}(a_i)$ $(i=1,2,3)$ が重複度もこめて, $\mathbb{C}$ の変換

$\gamma_{\omega_k}(z) = z + \omega_k$ $(k=1,2)$ で不変ならば、φ は楕円関数である。

系1で $\rho_0 = 1$ とできない。たとえば、写像 $f: \mathbb{C} \to P^N(\mathbb{C})$ を

$$f(z) = \left(e^{\sin\frac{z}{N+1}} : e^{\sin\frac{z+2\pi}{N+1}} : \cdots : e^{\sin\frac{z+2N\pi}{N+1}}\right)$$

によって定義すれば、f は $\gamma(z)=z+2\pi$, および超平面 $H_i = \{w_i = 0\}$ $(1\leqq i\leqq N+1)$, $H_{N+2} = \{w_1+\cdots+w_{N+1}=0\}$ に対し、$\nu(f,H_i)\circ\gamma = \nu(f,H_i)$ はみたすが $f\circ\gamma \neq f$ である。

ここでは、定理 IV の証明を与え、若干の関連する事柄を述べる。先ず、証明において基本的な Borel の定理を説明し（§2）、いくつかの補助定理を与えたのち（§3）、§4で定理 IV を証明する。また§5で、Borel の定理の一つの拡張を与える。

§2. Borel の定理

$\mathbb{C}^n$ 上の正則関数 φ に対し

$$M(r,\varphi) = \max\{|\varphi(z_1,\dots,z_n)| ; \textstyle\sum_{i=1}^n |z_i|^2 < r^2\} \quad (r>0)$$

とおき、φ の位数を

$$\rho(\varphi) = \limsup_{r\to\infty} \log^+\log^+ M(r,\varphi)/\log r$$

と定義する。ここで、$\log^+ x = \max(\log x, 0)$。また、$\mathbb{C}^n$ 上の有理型関数 φ が、位数が ρ_0 より小さい二つの整関数の比として表せるとき、位数が ρ_0 より小さいと呼ぶ。特に位数が1より小さい $\mathbb{C}^n$ 上の有理型関数の全体を Φ_0 とおく。このとき容易にわかる様に、

(2.1) $\mathfrak{M}_0$ は体である.

$\mathbb{C}^n$ 上の零点をもたぬ整関数の全体を H^* で表す. 1変数の場合によく知られた次の事実が多変数でも成り立つ.

(2.2) H^* の元 h が非定数なら, $\rho(h) \geq 1$.

H^* の元 h, h' に対し, $h/h' =$ 定数 のとき $h \sim h'$, $h/h' \neq$ 定数 のとき $h \not\sim h'$ と書くことにする. Borel の定理 ([1]) の精密化である次の定理が成り立つ.

定理 2.3. $h_i \in H^*$, および $\varphi_i \in \mathfrak{M}_0$ $(1 \leq i \leq p)$ に対し, 任意の異なる i, j について $h_i \not\sim h_j$ かつ $\sum_{i=1}^{p} \varphi_i h_i = 0$ ならば, $\varphi_i = 0$ $(1 \leq i \leq p)$.

証明. $n=1$ の場合はよく知られた結果である ([8], p. 100). 任意の i に対し $\varphi_i \neq 0$ と仮定する. $w \in \mathbb{C}^*$ に対し, $(\varphi_i)_w(z) = \varphi_i(zw)$, $(h_i)_w(z) = h_i(zw)$ とおく. 仮定から, 異なる i, j に対し $(h_i)_w \not\sim (h_j)_w$, かつ $(\varphi_i)_w \neq 0$ となる $w \in \mathbb{C}^*$ を容易にみつけることができる. ところが $\sum_{i=1}^{p} (\varphi_i)_w (h_i)_w = 0$ ゆえ, これは $n=1$ の場合の結果に矛盾する. したがってある φ_i は零である. p に関する帰納法で定理 2.3 を得る.

系 2.4. $h_i \in H^*$ $(1 \leq i \leq p)$ とし, 任意の $(l_1, \dots, l_p) \in \mathbb{Z}^p - \{0\}$ に対し $h_1^{l_1} h_2^{l_2} \cdots h_p^{l_p} \neq$ 定数 と仮定する. このとき, 有限個の $\varphi_{l_1 \cdots l_p} \in \mathfrak{M}_0$ に対し

$$\sum_{(l_1,\dots,l_p)} \varphi_{l_1,\dots,l_p} h_1^{l_1}\cdots h_p^{l_p} = 0$$

ならば、$\varphi_{l_1,\dots,l_p}$ はすべて零である。

証明. $h_1^{l_1}\cdots h_p^{l_p} \in H^*$ であり、$(l_1,\dots,l_p) \neq (m_1,\dots,m_p)$ のとき $h_1^{l_1}\cdots h_p^{l_p} \not\sim h_1^{m_1}\cdots h_p^{m_p}$ だから、定理2.3から容易に導かれる。

系2.5. $h_i \in H^*$, $\varphi_i \in \Phi_0$ $(1 \leq i \leq p)$ に対し、$\varphi_i \neq 0$ かつ $\sum_{i=1}^{p} \varphi_i h_i = 0$ とする。添字の集合 $I = \{1, 2, \dots, p\}$ の分割 $I = \bigcup_{\alpha=1}^{a} I_\alpha$ を、$i \in I_\alpha$, $i' \in I_{\alpha'}$ に対し $\alpha = \alpha'$ ならば $h_i \sim h_{i'}$, $\alpha \neq \alpha'$ ならば $h_i \not\sim h_{i'}$ となる様にきめる。このとき任意の α に対し $\sum_{i \in I_\alpha} \varphi_i h_i = 0$.

証明. 各 α に対し、$i_\alpha \in I_\alpha$ を一つずつ選び、

$$\psi_\alpha = \sum_{i \in I_\alpha} \varphi_i h_i / \varphi_{i_\alpha}$$

とおく。$\psi_\alpha \in \Phi_0$, $\sum_\alpha \psi_\alpha h_{i_\alpha} = 0$ かつ異なる α, α' に対し $h_{i_\alpha} \not\sim h_{i_{\alpha'}}$ だから、定理2.3により $\psi_\alpha = 0$ を得る。

§3. 補助定理.

H^* の元 h_{ij}, および Φ_0 の非零元 φ_{ij} $(i = 1, 2, \dots, p,\ j = 1, 2, \dots)$ を取り $f_{ij} = \varphi_{ij} h_{ij}$ とおく。p 個の行、可算無限個の列をもつ行列

$$M = (f_{ij} : i = 1, 2, \dots, p,\ j = 1, 2, \dots)$$

に対し、先ず次の補題を与える。

補題3.1. M に対し、(a) $i = 1, 2, \dots, p$ の順序を適

当にかえ，(b) $j=1,2,\cdots$ を適当な部分列とおきかえ，(c) M の各行各列を適当な H^* の元で割れば，次の条件をみたす様にできる．

(i) $1 \leqq i \leqq r$, $j_1 \neq j_2$ のときつねに $h_{ij_1} \not\sim h_{ij_2}$.

(ii) $r+1 \leqq i \leqq p$ のとき，任意の j に対し $h_{ij} =$ 定数．

ここで $0 \leqq r < p$ とする．

証明．任意の j に対し $h_{pj} =$ 定数 としてよい．操作(a)〜(c)ののち (ii) が成り立つ様な最小の r をとる．$0 < r < p$ としてよい．各 $i = 1, 2, \cdots, r$ および j に対し $h_{ij} \sim h_{ij'}$ となる j' は有限個しかない．もし，ある i_0 $(1 \leqq i_0 \leqq r)$, j_0 に対し $h_{i_0 j_0} \sim h_{i_0 j}$ となる j が無限個あれば，(a)〜(c) を行い，$h_{rj} =$ 定数 $(j = 1, 2, \cdots)$ とできるからである．このとき，$j_{k-1} < j_k$ かつ

$$h_{ij_k} \not\sim h_{ij_1},\ h_{ij_k} \not\sim h_{ij_2}, \cdots, h_{ij_k} \not\sim h_{ij_{k-1}}$$

をみたす様に $j_1, j_2, \cdots$ を順次選ぶことができる．これよりただちに補題 3.1 を得る．

補題 3.2. 行列 $(f_{ij} = g_{ij} h_{ij})$ が補題 3.1 の結論をみたし，さらに，任意の $j_1, \cdots, j_p$ に対し，

$$\det(f_{ij} ; i=1,2,\cdots,p,\ j=j_1,\cdots,j_p) = 0 \qquad (2)$$

とする．もし，任意の j に対し，$j \leqq j^*_{r+1} < \cdots < j^*_p$ かつ

$$\det(f_{ij} : i=r+1,\cdots,p,\ j=j^*_{r+1},\cdots,j^*_p) \neq 0 \qquad (3)$$

となる $j_{r+1}^*, \dots, j_p^*$ が存在すれば，任意の $j_1, \dots, j_r$ に対し

$$\det(f_{ij};\ i=1,2,\dots,r,\ j=j_1,\dots,j_r)=0. \qquad (4)$$

証明．$\mathbb{C}^*$ を乗法群 H^* の部分群とみて因子群 $G = H^*/\mathbb{C}^*$ を考える．G はねじれのないアーベル群である．

そこで，H^* の高々可算無限個の元 $\eta_1, \dots, \eta_\tau, \dots$ を，

(i) $\eta_1, \dots, \eta_\tau, \dots$ を G の元とみるとき $\mathbb{Z}$ 上一次独立

(ii) 各 f_{ij} が適当な $c_{ij} \in \mathbb{C}^*$, $l_{ij}^\tau \in \mathbb{Z}$ によって

$$f_{ij} = c_{ij}\,\eta_1^{l_{ij}^1}\eta_2^{l_{ij}^2}\cdots\eta_\tau^{l_{ij}^\tau}\cdots \qquad (5)$$

と表される様に取る．ここで各 (i,j) に対し $l_{ij}^\tau \neq 0$ となる τ は有限個とする．

$$\mathbf{l}_{ij} = (l_{ij}^1, l_{ij}^2, \dots, l_{ij}^\tau, \dots)$$

とおけば，仮定から，$1 \le i \le r$, $j_1 \neq j_2$ のとき $\mathbf{l}_{ij_1} \neq \mathbf{l}_{ij_2}$, $r+1 \le i \le p$ のとき $\mathbf{l}_{ij} = 0$.

結論を否定して，ある $j_1, \dots, j_r$ に対し (4) が成り立たないとする．このとき，次の事実が成り立つ．

(3.3) 任意の $s = r+1, \dots, p$ に対し次の条件をみたす添字 $j_{r+1}, \dots, j_p$ ($j_r < j_{r+1} < \dots < j_p$) が存在する．

(A) $\operatorname{rank}(f_{ij};\ i=r+1,\dots,s,\ j=j_{r+1},\dots,j_s) = s-r$

(B) $1 \le i \le r$, $1 \le \sigma_1, \dots, \sigma_{s-1}, \tau_1, \dots, \tau_{s-1} \le p$ のときつねに

$$\mathbf{l}_{ij_s} \neq \mathbf{l}_{\sigma_1 j_1} + \dots + \mathbf{l}_{\sigma_{s-1} j_{s-1}} - (\mathbf{l}_{\tau_1 j_1} + \dots + \mathbf{l}_{\tau_{s-1} j_{s-1}}).$$

(3.3) の証明．まず j_{r+1} ($> j_r$) を任意に取る．(A),

(B) をみたす $j_{r+1},\dots,j_{s-1}$ がすでに選ばれたとして j_s を選ぼう。$\mathbb{C}^n$ 上の有理型関数の全体を $\mathfrak{M}$ とし、$\mathfrak{f}_j={}^t(f_{r+1\,j},\dots,f_{pj}) \in \mathfrak{M}^{p-r}$ とおく。$\mathfrak{f}_{j_{r+1}},\dots,\mathfrak{f}_{j_{s-1}}$ は $\mathfrak{M}$ 上一次独立である。

$$\mathrm{rank}(\mathfrak{f}_{j_{r+1}},\dots,\mathfrak{f}_{j_{s-1}},\mathfrak{g}) \leq s-r-1$$

をみたす $\mathfrak{g}\in\mathfrak{M}^{p-r}$ のうち一次独立なものは $\leq s-r-1$ 個である。ここで仮定 (3) に注意すれば、条件 (A) をみたす j_s が無限個存在することがわかる。次に条件 (B) をみよう。

$$\{l_{\sigma_1 j_1}+\cdots+l_{\sigma_{s-1}j_{s-1}}-(l_{\tau_1 j_1}+\cdots+l_{\tau_{s-1}j_{s-1}});\ 1\leq\sigma_1,\dots,\sigma_{s-1},\tau_1,\dots,\tau_{s-1}\leq p\}$$

は有限集合である。l_{ij} の性質から、各 $i\in\{1,2,\dots,r\}$, $\sigma_1,\dots,\sigma_{s-1},\tau_1,\dots,\tau_{s-1}\in\{1,2,\dots,p\}$ に対し、

$$l_{ij_s}=l_{\sigma_1 j_1}+\cdots+l_{\sigma_{s-1}j_{s-1}}-(l_{\tau_1 j_1}+\cdots+l_{\tau_{s-1}j_{s-1}})$$

をみたす j_s は有限個しかない。これらのことから、(A), (B) をみたす j_{s+1} は無限個あることがわかる。これを繰返せば、(A), (B) をみたす $j_{r+1},\dots,j_p$ の存在がわかる。

補題3.2の証明にもどろう。(3.3) の条件 (A), (B) をみたす $j_{r+1},\dots,j_p$ を取る。$1,\dots,p$ の置換全体の集合 S_p に対し、

$$S_p^{(1)}:=\left\{\sigma=\begin{pmatrix}1,&\cdots,&p\\ \sigma_1,&\cdots,&\sigma_p\end{pmatrix}\in S_p;\ 1\leq\sigma_1,\dots,\sigma_r\leq r\right\}$$

かつ $S_p^{(2)}=S_p-S_p^{(1)}$ とおく。各 $\sigma=\begin{pmatrix}1&\cdots&p\\ \sigma_1&\cdots&\sigma_p\end{pmatrix}$ に対し

$$\psi_\sigma:=\mathrm{sgn}(\sigma)\,\varphi_{\sigma_1 j_1}\varphi_{\sigma_2 j_2}\cdots\varphi_{\sigma_p j_p}\in\Phi。$$

$$h_\sigma := h_{\sigma_1 j_1} h_{\sigma_2 j_2} \cdots h_{\sigma_p j_p} \in H^*$$

とおけば，仮定（2）により

$$\sum_{\sigma \in S_p^{(1)}} u_\sigma h_\sigma + \sum_{\sigma \in S_p^{(2)}} u_\sigma h_\sigma = \sum_{\sigma \in S_p} u_\sigma h_\sigma = 0.$$

ある $\sigma \in S_p^{(1)}$, $\tau \in S_p^{(2)}$ に対し $h_\sigma \sim h_\tau$ とする．この両辺に（5）を代入すれば，両辺の各々の指数は一致するゆえ，

$$l_{\sigma_1 j_1} + \cdots + l_{\sigma_p j_p} = l_{\tau_1 j_1} + \cdots + l_{\tau_p j_p}$$

が成り立つ。$\tau_s \notin \{r+1, \cdots, p\}$, $\tau_{s+1}, \cdots, \tau_p \in \{r+1, \cdots, p\}$ となる $s \in \{r+1, \cdots, p\}$ を取る。$r+1 \leqq i \leqq p$ のとき $l_{ij} = 0$ に注意すれば，これは（3.3）の条件（B）に矛盾する．ゆえに，任意の $\sigma \in S_p^{(1)}$, $\tau \in S_p^{(2)}$ に対し $h_\sigma \not\sim h_\tau$ である．

ここで等式 $\sum_{\sigma \in S_p} u_\sigma h_\sigma = 0$ に系 2.5 を適用すれば，

$$\sum_{\sigma \in S_p^{(1)}} u_\sigma h_\sigma = 0$$

が結論される。他方，容易に計算される様に

$$\sum_{\sigma \in S_p^{(1)}} u_\sigma h_\sigma = \det\left(f_{ij};\ \begin{matrix} i=1,2,\cdots,r \\ j=j_1,j_2,\cdots,j_r \end{matrix}\right) \det\left(f_{ij};\ \begin{matrix} i=r+1,\cdots,p \\ j=j_{r+1},\cdots,j_p \end{matrix}\right)$$

であり，$j_1, \cdots, j_p$ の選び方からこの右辺は零でない。これは矛盾である．よって結論（4）を得る。

補助定理 3.4.　行列 $M = (f_{ij} = g_{ij} h_{ij})$ が，補題 3.2 の条件（2）をみたすとする．このとき，補題 3.1 の操作（a）～（c）を適当に行えば，任意の $j_1, \cdots, j_m$ に対し

$$\det(f_{ij};\ i=1,2,\cdots,m,\ j=j_1,\cdots,j_m) = 0$$

かつ，$1\leqq i\leqq m$ のときつねに $f_{ij}=$定数となる．ここで $0<m\leqq p$。

証明．$p=2$ なら自明である．$\leqq p-1$ の場合を仮定して p の場合をみる．$\mathcal{M}$ は補題3.1の条件(i)，(ii)をみたすとしてよい．補題3.2の仮定がみたされれば，帰納法の仮定から求める結論を得る．もしそうでなければ，ある j_0 に対し，$j_{r+1},\cdots,j_p>j_0$ のときつねに

$$\det(f_{ij}:\ i=r+1,\cdots,p,\ j=j_{r+1},\cdots,j_p)=0.$$

この場合にも同じ結論を得る．

§4. 定理IV の証明.

$P^N(\mathbb{C})$ 内に一般の位置にある超平面 $H_1,\cdots,H_{N+2}$ を取る．これらを平等に扱う為に，$P^N(\mathbb{C})$ を $P^{N+1}(\mathbb{C})$ 内の超平面

$$\{w_1+w_2+\cdots+w_{N+2}=0\}$$

と同一視する．斉次座標 $(w_1:w_2:\cdots:w_{N+2})$ をうまく選べば

$$H_i=\{w_i=0\}\cap P^N(\mathbb{C})\qquad(1\leqq i\leqq N+2)$$

としてよい。

$\mathbb{C}^n$ 上に因子 $\nu_1,\cdots,\nu_{N+2}$ を取り，$\nu(f,H_i)=\nu_i$ $(1\leqq i\leqq N+2)$ をみたす非退化有理型写像 $f:\mathbb{C}^n\longrightarrow P^N(\mathbb{C})$ の全体 $\mathcal{F}$ が有限であることを示すのが本節の目標である．これを否定して，$\mathcal{F}$ が異なる無限個の元 $f^1,f^2,\cdots,f^j,\cdots$ を含んだとする．各 f^j は，整関数 f^j_i を適当に選べば，

$$f^j = (f_1^j : f_2^j : \cdots : f_{N+2}^j)$$

と表示される。ここで $\operatorname{codim}\{f_1^j = \cdots = f_{N+2}^j = 0\} \geq 2$ をみたす様に取る。$\nu_{k_i} = \nu_i$ となる整関数 k_i を取れば、

$$h_{ij} := f_i^j / k_i \in H^*$$

$$\sum_{i=1}^{N+2} f_i^j = \sum_{i=1}^{N+2} h_{ij} k_i = 0 \qquad (6)$$

が成り立つ。

補題 4.1. $h_{ij} \in H^*$ $(1 \leq i \leq p,\ j = 1, 2, \cdots)$ が非零整関数 k_i に対し (6) をみたすとする。さらに、$\{1, 2, \cdots, p\}$ の任意の部分集合 I に対し

$$\sum_{i \in I} h_{ij} k_i \neq 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots) \qquad (7)$$

と仮定する。このとき、$j_1, j_2, \cdots$ $(j_{k-1} < j_k)$ を適当に選び、行列 (h_{ij}) の各行各列を適当な H^* の共通元で割れば、任意の $i = 1, 2, \cdots, p$, $j = j_1, j_2, \cdots$ に対し $h_{ij} =$ 定数 となる。

証明. $p = 2$ のときはみやすい。$\leq p-1$ の場合を仮定して p の場合をみる。(6) によって補助定理 3.4 の仮定が成り立つ。ただしここでは $\varphi_{ij} = 1$ とする。補題 3.1 の操作 (a)〜(c) を行えば、ある m $(0 < m \leq p)$ に対し、補助定理 3.4 の結論が成り立つ。補題 3.1 の証明からわかる様に異なる j_1, j_2 に対し $h_{pj_1} \not\sim h_{pj_2}$ としてよい。(h_{ij}) の各行、各列を H^* の元で割ることは、それぞれ k_i お

よび f^j の表示を取りかえることに当る。初めから

$$h_{ij} = 定数 \quad (i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots)$$

と仮定してよい。

$$\mathrm{rank}(h_{ij};\ 1 \leqq i \leqq m,\ j=1,2\cdots) < m$$

ゆえ、$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_{ij} = 0\ (j=1,2,\cdots)$ をみたす $(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)(\neq (0,\cdots,0))$ が取れる。$a_{i1} = \lambda_i$ である m 次正則行列 $(a_{i\ell};\ 1 \leqq i,\ell \leqq m)$ を取り、関係式

$$k_i = \sum_{\ell=1}^{m} a_{i\ell} k_\ell^* \qquad (1 \leqq i \leqq m)$$

によって k_ℓ^* を定義し、$k_i^* = k_i$, $h_{ij}^* = h_{ij}$ $(m+1 \leqq i \leqq p)$, $h_{\ell j}^* = \sum_{i=1}^{m} a_{i\ell} h_{ij}$ $(\in C)$ とおく。このとき

$$\sum_{i=2}^{p} h_{ij}^* k_i^* = 0 \quad (j=1,2,\cdots).$$

必要なら添字 j を取りかえて、$p \in I$ かつ $\sum_{i \in I} h_{ij}^* k_i^* = 0$ $(j=1,2,\cdots)$ であり、さらに I の任意の真部分集合 I' に対し $\sum_{i \in I'} h_{ij}^* k_i^* \neq 0$ $(j=1,2,\cdots)$ となる様に、$\{2,\cdots,p\}$ の部分集合 I を取る。$\# I \leqq p-1$ ゆえ、帰納法の仮定から

$$h_{ij}^* = 定数, \quad (i \in I,\ j=1,2,\cdots)$$

これは矛盾である。なぜなら、仮定 (7) により、$I \cap \{1,\cdots,m\}$ の元 i_0 が存在し、$h_{i_0 j} = 定数\ (j=1,2,\cdots)$。他方、異なる j_1, j_2 に対し $h_{pj_1}^* \not\sim h_{pj_2}^*$ が成り立つからである。これより $m=p$, したがって補題 4.1 を得る。

定理 IV の証明にもどろう。仮定から (6) および (7) が成

り立つ。補題4.1の結果として f^j の表示、整関数 h_i を適当に取り添字を変えれば、h_{ij} = 定数、とくに $h_{i1}=1$ ($1\leqq i\leqq N+2$, $j=1,2,\cdots$) としてよい。このとき、

$$f^j=(h_{1j}f_1^1:h_{2j}f_2^1:\cdots:h_{N+2\,j}f_{N+2}^1)$$

が非退化であるという仮定から

$$h_{1j}=h_{2j}=\cdots=h_{N+2\,j}\qquad(j=1,2\cdots)$$

が得られる。これより $f^1=f^2=\cdots$ となり、f^j が互いに異なるという仮定に反す。よって定理IVを得る。

§5. Borel の定理の拡張.

γ を $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ の上への双正則写像とする。$\mathbb{C}^n$ 上の有理関数の族 Φ が、条件

(i) $\mathbb{C}\subset\Phi$, かつ Φ は体である.

(ii) $\Phi\subset\Phi_0$:= {位数 < 1 の $\mathbb{C}^n$ 上の有理型関数全体}

(iii) 任意の Φ の元 φ に対し $\varphi\circ\gamma\in\Phi$.

(iv) 定数 $c\in\mathbb{C}^*$, 正整数 j に対し $\varphi\circ\gamma^j=c\varphi$ をみたす様な $\varphi\in\Phi$ は定数に限る.

をみたすとき、γ-admissible と呼ぶことにする。

例. 1° $\Phi=\mathbb{C}$ は任意の双正則写像 $\gamma:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ に対して γ-admissible である.

2°. $n=1$ とし、$w\in\mathbb{C}^*$ に対し写像 $\gamma_w(z)=z+w$ を考える。Φ_0 に対し、明らかに (i)〜(iii) が成り立つ。(iv)

の条件をみたす $\varphi \in \Phi_0$ が非定数のとき，(2.2) により，φ または $1/\varphi$ が極 z_0 をもつ。同時に $z_0 + kj\omega$ $(k \in \mathbb{Z})$ も極である。これより $\rho(\varphi) \geq 1$ となってしまう。したがって Φ_0 は γ_ω-admissible である ([11], [12], 参照).

$\mathbb{C}^n$ 上の非零有理型関数 g_1, g_2 に対し $(g_1/g_2)\circ\gamma^{j_0} = g_1/g_2$ をみたす正整数 j_0 が存在することを $g_1 \sim_\gamma g_2$ で示し，これが成り立たないことを $g_1 \not\sim_\gamma g_2$ で示す。

双正則写像 $\gamma: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ および γ-admissible な族 Φ に対し，次の定理が成り立つ。

定理 5.1. $\varphi_i \in \Phi$，および非定数整関数 g_i $(1 \le i \le p)$ に対し，$\nu_{g_i}\circ\gamma = \nu_{g_i}$，任意の異なる i, j について $g_i \not\sim_\gamma g_j$ かつ $\sum_{i=1}^{p} \varphi_i g_i = 0$ ならば $\varphi_i = 0$ $(1 \le i \le p)$.

これは，$n = 1$ のとき定理 2.3 の拡張である。実際，$g_i \in H^*$ かつ異なる i, j に対し $g_i \not\sim g_j$ のとき，$\nu_{g_i}\circ\gamma = \nu_{g_i} = 0$ であり，適当に $\gamma_\omega(z) = z + \omega$ $(\omega \in \mathbb{C}^*)$ を取れば，$g_i \not\sim_{\gamma_\omega} g_j$ $(i \neq j)$ がいえる。これから定理 2.3 の結論が得られる。

証明のためにまず補題を与える。

補題 5.2. $\varphi_i \in \Phi$，および非定数整関数 g_i $(1 \le i \le p)$ に対し，$g_i\circ\gamma = c_i g_i$ なる定数 c_i が存在し

$$\det\left((\varphi_i\circ\gamma^{j-1})(g_i\circ\gamma^{j-1})\ ;\ 1 \le i, j \le p \right) = 0$$

と仮定する。このとき，ある $i_1,\dots,i_m$ $(1\le i_1<\cdots<i_m\le p)$ に対し $c_{i_1}=\cdots=c_{i_m}$ かつ $\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_m}$ が $\mathbb{C}$ 上一次従属である。

証明。$p=2$ のとき，$\dfrac{\varphi_1\circ\gamma}{\varphi_2\circ\gamma}=\dfrac{c_2}{c_1}\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}\in\Phi$ から，$c_1=c_2$，$\varphi_1/\varphi_2=$ 定数 が得られ補題 5.2 が成り立つ。$\le p-1$ の場合を仮定する。$f_{ij}=(\varphi_i\circ\gamma^{j-1})(g_i\circ\gamma^{j-1})$ とおくと，容易に

$$\det(f_{pj}f_{ij+1}-f_{pj+1}f_{ij}\,;\,1\le i,j\le p-1)=0$$

が得られる。$\tilde\varphi_i:=c_i\varphi_p(\varphi_i\circ\gamma)-c_p\varphi_i(\varphi_p\circ\gamma)$，$\tilde g_i:=g_ig_p$ $(1\le i\le p-1)$ とおくと，$\tilde\varphi_i\in\Phi$，$\tilde g_i\circ\gamma=c_ic_p\tilde g_i$ であり，

$$\det((\tilde\varphi_i\circ\gamma^{j-1})(\tilde g_i\circ\gamma^{j-1})\,;\,1\le i,j\le p-1)=0.$$

$\tilde\varphi_i=0$ なら $c_i=c_p$，$\varphi_i/\varphi_p=$ 定数 となり補題 5.2 が成り立つから，$\tilde\varphi_i\ne 0$ $(1\le i\le p-1)$ としてよい。帰納法の仮定を適用する。適当に $i_1,\dots,i_{m-1}$ $(1\le i_1<\cdots<i_{m-1}\le p-1)$ を選べば，$c_{i_1}=c_{i_2}=\cdots=c_{i_{m-1}}$ かつ

$$\sum_\ell a_\ell\tilde\varphi_{i_\ell}=\varphi_p\Big(\sum_\ell a_\ell c_{i_\ell}(\varphi_{i_\ell}\circ\gamma)\Big)-c_p(\varphi_p\circ\gamma)\Big(\sum_\ell a_\ell\varphi_{i_\ell}\Big)=0$$

となる $(a_1,\dots,a_{m-1})\in\mathbb{C}^{m-1}-\{0\}$ が存在する。したがって $\psi:=\sum_\ell a_\ell\varphi_{i_\ell}/\varphi_p\in\Phi$ に対し，$\psi\circ\gamma=(c_p/c_{i_1})\psi$。$\Phi$ に対する条件 (iv) により，$\psi=$ 定数，$c_p=c_{i_1}$ を得る。これより容易に求める結論を得る。

補題 5.3. $\varphi_i\in\Phi$，および非零整関数 g_i $(1\le i\le p)$ に対し，$\nu_{g_i\circ\gamma}=\nu_{g_i}$ かつ任意の $j_1,\dots,j_p$ について

$$\det((\varphi_i\circ\gamma^{j-1})(g_i\circ\gamma^{j-1})\,;\,i=1,\dots,p,\ j=j_1,\dots,j_p)=0 \quad (8)$$

とする。このとき、ある $i_1,\dots,i_m$ $(1\le i_1<\cdots<i_m\le p)$ に対し、$g_{i_1}\underset{\gamma}{\sim}\cdots\underset{\gamma}{\sim}g_{i_m}$ かつ $\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_m}$ が $\mathbb{C}$ 上一次従属である。

証明。$p=2$ のとき、仮定から

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\,\frac{\varphi_2\circ\gamma}{\varphi_1\circ\gamma}=\frac{g_1\circ\gamma}{g_1}\,\frac{g_2}{g_2\circ\gamma}\in \mathbb{H}^\alpha\cap\Phi=\mathbb{C}.$$

Φ に対する条件 (iv) から、容易に補題 5.3 を得る。$\le p-1$ のとき成り立つと仮定する。添字をかえて

(α) $r+1\le i_1<i_2\le p$ のとき、$\dfrac{g_{i_1}\circ\gamma^j}{g_{i_2}\circ\gamma^j}=\dfrac{g_{i_1}}{g_{i_2}}$ をみたす正整数 j、定数 c が存在する。

(β) $1\le i_1\le r$, $r+1\le i_2\le p$ のとき上の性質がいえない。

としてよい。さらに必要なら γ^j を γ とし、(α) で $j=1$ としてよい。また、g_i/g_p を g_i でおきかえ、$g_p=1$、したがって $g_i\circ\gamma/g_i=$ 定数 $(r+1\le i\le p)$ としてよい。

$$h_{ij}=g_i\gamma^{j-1}/g_i\quad(i=1,\dots,p,\ j=1,2,\dots)$$

とおく。$r+1\le i\le p$ の $h_{ij}=$ 定数、$1\le i\le r$, $j_1<j_2$ のとき $h_{ij_1}\not\sim h_{ij_2}$ である。(8) の第 i 行を g_i で割れば、

$$\det\left((\varphi_i\circ\gamma^{j-1})h_{ij}\ ;\ i=1,\dots,p,\ j=j_1,\dots,j_p\right)=0$$

が成り立つ。

補題 5.3 の結論を否定する。したがって

$$g_{i_1}\underset{\gamma}{\sim}g_{i_2}\underset{\gamma}{\sim}\cdots\underset{\gamma}{\sim}g_{i_m}\quad(1\le i_1<\cdots<i_m\le p)$$

のときはつねに $\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_m}$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立とする。任意の正整数 j に対し、$\varphi_i\circ\gamma^j$、$g_i\circ\gamma^j$ $(r+1\le i\le p)$

に補題 5.2 を適用すると

$$\det\left((\varphi_i\circ\gamma^{kj})(g_i\circ\gamma^{kj})\,;\ i=r+1,\cdots,p,\ k=1,\cdots,p-r\right)=0$$

ではあり得ない。ゆえに，$f_{ij}=(\varphi_i\circ\gamma^{j-1})h_{ij}$，$j^*_{r+1}=j$，$j^*_{r+2}=2j$，$\cdots$，$j^*_p=(p-r)j$ に対し補題 3.2 の (3) が成り立つ。これで補題 3.2 の仮定がすべてみたされるから結論 (4) を得る。これは矛盾である。なぜなら，仮定により補題 5.2 の結論は起り得ないからである。よって補題 5.3 が成り立つ。

定理 5.1 の証明。p に関する帰納法による。$p=2$ のときは自明である。任意の i に対し $\varphi_i\neq 0$ として矛盾を導けばよい。仮定によって $\sum_{i=1}^{p}(\varphi_i\circ\gamma^{j-1})(g_i\circ\gamma^{j-1})=0$ ($j=1,2,\cdots$)。したがって補題 5.3 の仮定がみたされる。ところが，定理 5.1 の仮定は，補題 5.3 の結論に矛盾する。したがって定理 5.1 が成り立つ。

References

[1] E. Borel, Sur les zéros des fonctions entières, Acta Math., 20(1897), 357-396.

[2] H. Fujimoto, On familes of meromorphic maps into the complex projective space, Nagoya Math. J., 54(1974), 21-51.

[3] H. Fujimoto, The uniqueness theorem of meromorphic maps into the complex projective space, Nagoya Math. J., 58 (1975), 1-23.

[4] H. Fujimoto, A uniqueness theorem of algebraically non-degenerate meromorphic maps into $P^N(\mathbb{C})$, Nagoya Math. J., 64(1976), 117-147.

[5] H. Fujimoto, Remarks to the uniqueness problem of meromorphic maps into $P^N(\mathbb{C})$, I, II, Nagoya Math. J., 71 (1978), 13-41.

[6] H. Fujimoto, Remarks to the uniqueness problem of meromorphic maps into $P^N(\mathbb{C})$, III, Nagoya Math. J., 75 (1979), 71-85.

[7] H. Fujimoto, Remarks to the uniqueness problem of meromorphic maps into $P^N(\mathbb{C})$, IV, Nagoya Math. J..

[8] M.L. Green, Holomorphic maps into the complex projective space omitting hyperplanes, Trans. AMS., 169(1972), 89-103.

[9] R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris (1929).

[10] W. Stoll, Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen, Math. Z., 57(1953), 211-237.

[11] H. Urabe and C. Yang, On the zeros of an entire function which is periodic mod a non-constant entire function of order less than one, Proc. Japan Acad. Ser. A., 54(1978), 142-144.

[12] H. Urabe and C. Yang, On a characteristic property of periodic entire functions, preprint.