数理解析研究所講究録
第388巻 1980年 48-58

可換微分作用素とベクトル束（Kricheverの研究の紹介）

阪大 理 伊達悦朗

最近、いわゆる、散乱の逆問題の方法が発見され、発展してゆく過程において、次の問題が重要となってきた。

（問題）▽線型微分作用素の対、$L=\sum_{j=0}^{m} u_j(x)D^j$, $M=\sum_{j=0}^{n} v_j(x)D^j$, $D=\frac{d}{dx}$, で可換; $[L,M]=LM-ML=0$, となるものを分類すること△

ここで, u_j, v_k は x の連続関数を成分とする行列。

ここでは、この問題に関する Krichever の研究を紹介する。

尚、この問題は、1920年代に、散乱の逆問題の方法の話とは無関係に、Burchnall-Chaundy [1] によって研究されていたことが、Krichever の結果が発表された後でわかった。又、Drinfeld [2], Mumford [5] 等による、より代数幾何学的な approach もある。

1．可換微分作用素と代数曲線、ベクトル束

まず，可換な対 L, M が与えられた時に，それに対して，代数曲線及び，その上のベクトル束を対応させることを考える。

簡単の為に，L, M は scalar 係数であるとする。更に，独立変数，従属変数の変換を行って，$u_m = v_n = 1$, $u_{m-1} = 0$，としておく。

次の定理が基本的である。

定理（Burchnall-Chaundy）　$\exists f \in \mathbb{C}[\mu, \lambda]$，既約，s.t.

$$f(M, L) = 0$$

∵）$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathcal{L}(\lambda) = \{ y ; Ly = \lambda y \}$ とおく．$\mathcal{L}(\lambda)$ は $\mathbb{C}$ 上 m 次元の線型空間である。L と M は可換であるから，M は $\mathcal{L}(\lambda)$ の線型写像 $M(\lambda)$ を induce する。$M(\lambda)$ の最小多項式を $f(\mu, \lambda)$ とする。$\mathcal{L}(\lambda)$ の基底 $c_j(x, x_0, \lambda)$, $j = 0, \cdots, m-1$，として，初期条件 $(D^k c_j)(x_0, x_0, \lambda) = \delta_{jk}$，$j, k = 0, \cdots, m-1$，（$x_0 \in \mathbb{R}$ fix）で定義されるものをとってみれば，$f \in \mathbb{C}[\mu, \lambda]$ であることがわかる。

$f(M, L)$ は線型常微分作用素で，それを $\mathcal{L}(\lambda)$ に制限すれば $f(M(\lambda), \lambda)$ で与えられる．これは最小多項式の定義から零．従って $f(M, L)$ の kernel は無限次元となる。//

$f(\mu, \lambda) = 0$ で affine 代数曲線 R_0 が定義される。R_0 の compact 化について考える。

その為に，方程式

$$L\,\psi(x,k) = k^{m}\,\psi(x,k)$$

の $\psi(x,k) = e^{k(x-x_0)}\left(\sum_{s=N}^{\infty} \xi_s(x)\,k^{-s}\right)$，（$N$ は整数）の形の形式解を考えれば：Puiseux 級数体 $\mathbb{C}\{\lambda^{-1}\}$ での $f(\mu,\lambda)$ の分解が，ℓ を m, n のある公約数として

$$f(\mu,\lambda) = \prod_{j=0}^{m'-1}(\mu - A(\kappa_j)),\quad \kappa_j^{\,n'} = \lambda$$

$$A(\kappa) = \kappa^{n'} + \sum_{j=n'-1}^{-\infty} A_j\,\kappa^{j},\quad A_j \in \mathbb{C},\quad m'\ell = m,\ n'\ell = n,$$

で与えられることがわかる。$M(\lambda)$ の固有多項式は $\{f(\mu,\lambda)\}^{\ell}$ で与えられる。

このことから，$f(\mu,\lambda)=0$ で定義される affine 代数曲線 R_0 を compact 化するには、無限遠点 P_∞ を一点付け加えればよく，P_∞ のまわりの local parameter としては，$\lambda^{-\frac{1}{n}}$ がとれることがわかる。この代数曲線を R と表わす。（以下 R は nonsingular とみなす．）

$p=(\mu,\lambda)\in R_0$ に対して，$V_p = \{y\,;\,Ly=\lambda y,\ My=\mu y\}$ とおく。$\dim V_p = \ell$ であり、その基底として，$\psi_i(x,x_0,p) = \sum_{k=0}^{m-1}\chi_{jk}(x_0,p)\times c_k(x,x_0,\lambda)$，$i=0,\cdots,\ell-1$，の形で，$\chi_{jk}=\delta_{ik}$，$i,k=0,\cdots,\ell-1$，つまり，$(D^k\psi_i)(x_0,x_0,p)=\delta_{jk}$ なるものがとれる。Cramer の公式より，χ_{jk} は μ,λ の有理式となる．つまり χ_{jk} は R 上の有理関数となる。こうして，R_0 上に L, M の同時固有関数を fibre とするベクトル束の family が定まる。（ψ_i の pole は；x には依らない）

このベクトル束を R 全体に拡張することを考える。

$\Psi = (D^i \psi_k)$ を ψ_i の wronski 行列とすると，p_∞ の近傍では，関数 $w_j(x)$，$j=0,\cdots,l-2$，が存在して

$$\left(\frac{d}{dx}\Psi\right)\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \kappa + w_0 & w_1 & \cdots & w_{l-2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \\ & 0 \\ & \\ & O(\kappa^{-1}) \end{pmatrix} \qquad \kappa = \lambda^{\frac{1}{m}}$$

となることがわかる。

$\Phi_0(x, x_0, k)$ を総合方程式

$$\frac{d}{dx}\Phi_0(x, x_0, k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ k + w_0 & w_1 & \cdots & w_{l-2} & 0 \end{pmatrix} \Phi_0(x, x_0, k)$$

の初期条件 $\Phi_0(x_0, x_0, k) = I_l$ をみたす解とすると

$$(\psi_0, \cdots, \psi_{l-1}) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j(x)\kappa^{-j}\right)\Phi_0(x, x_0, \kappa)$$

$$\xi_0(x_0) = (1, 0, \cdots, 0), \quad \xi_s(x_0) = 0 \quad s \geq 1$$

と表わされる。

従って，次のようにして R 上の rank l のベクトル束の family $V(x_0)$ が定まる。U を p_∞ の近傍とするとき，R_0 では ψ_i を frame とし，U では $\sum_{s=0}^{\infty} \xi_{sj}\kappa^{-s}$　$\xi_j = (\xi_{s0}, \cdots, \xi_{s,l-1})$ を frame とし，$U - \{p_\infty\}$ では ${}^t\Phi_0(x, x_0, \kappa)$ で貼り合わせる。Kricheber の論文に述べてあるベクトル束 $\eta(x_0)$ は，ベクトル $\chi_j(x_0, p) = (\chi_{j0}(x_0, p), \cdots, \chi_{jn-1}(x_0, p))$，$j = 0, \cdots, l-1$ の pole を打ち消す形で定義されるもののようである。

2. ベクトル束とmatrix divisor

次に、代数曲線上のベクトル束と、matrix divisorとの対応について述べる(cf. Tyurin [6])

まず、matrix divisorの定義を述べる。

$\mathcal{O}_p$ (resp. $\mathcal{M}_p$) を $p\in R$ における holomorphic (resp. meromorphic) functions の germs とするとき $GL(\ell,\mathcal{O}_p)\backslash GL(\ell,\mathcal{M}_p)$ の元を、p における order ℓ の local divisor と呼ぶ。

R 上の order ℓ の matrix divisor とは order ℓ の local divisors で生成される free abelian group の元をいう。matrix divisors E, E' が同値とは $G\in GL(\ell,K)$ (K は R の関数体) が存在して $E=E'G$ なるときをいう。

matrix divisor E が与えられたとき、次のようにしてベクトル束が定義される。$R=\bigcup_i U_i$ を open covering とし、E は U_i 上で U_i 上の meromorphic functions を成分とする行列で実現されているとする。その時、$g_{ij}=E_iE_j^{-1}$ を transition functions としてベクトル束が定義される。

逆に、ベクトル束 V が与えられた時には、$U\subset R$ 上での V の meromorphic frame の成分の(通常の意味での)divisor を並べて matrix divisor が得られる。

holomorphic functions の germs からなる local divisor E_p は、次の normal form をもつ:

$$E_p = DA$$

$$D = \begin{bmatrix} z^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^{d_\ell} \end{bmatrix}, \quad d_i = d_i(p) \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \cdots\}, \quad z : p \text{ のまわりの local parameter}$$

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} \in \mathbb{C}[z] / z^{d_j - d_i}\,\mathbb{C}[z]$$

$$a_{ii} = 1, \quad a_{ij} = 0, \text{ if } d_i \geq d_j, \ i \neq j.$$

holomorphic functions の germs を成分とする local divisors からなる matrix divisors を effective と呼び、effective divisor E の degree を $\sum_{p \in R} \sum_{i=1}^{\ell} d_i(p)$ と定義する。これは(通常の divisor) $\det E$ の degree に等しい。

3. Algebraic Spectral Data

$V(x_0)$、あるいは $\gamma(x_0)$ の x_0-dependence を決定することは $\ell > 1$ の場合には難しいので、($\ell = 1$ ならば、R の Jacobian 上の直線運動となる。) ここでは、可換な対 L, M に対して、algebraic spectral data と呼ぶものを定義する。後で、algebraic spectral data から、可換な微分作用素の対を再構成できることを示す。matrix divisor で H て generic な場合に algebraic spectral data を定義する。

ψ_j の pole は simple であるとし、それらを $\gamma_i(x_0)$, $i = 1, \cdots, N$ とする。γ_i における ψ_j の residue を $\varphi_{ij}(x)$ とし、そのうち、x の関数として一次独立なものの個数を m_i とすれば、g を R の

種数として $\sum_{i=1}^{N} m_i = \ell g$ が成り立つ。($z \in \mathbb{P}^1$, $\lambda^{-1}(z) = \{p_1, \cdots, p_{m'}\}$ とし、関数 $\psi_j(x, x_0; p_k)$, $j = 0, \cdots, \ell-1$, $k = 1, \cdots, m'$ の wronskian を考えて示される。) このことから、$\eta(x_0)$ は γ_i において

$$\begin{pmatrix} I_{\ell-m_i} & * \\ & z \\ & & \ddots \\ & & & z \end{pmatrix} \quad *：定数$$

の形の local divisor に対応することがわかる。従って、(p_∞ を除いて) $\eta(x_0)$ に対応する effective matrix divisor は、degree を ℓg と固定するとき、

$$\sum_{i=1}^{N} (\ell - m_i) m_i + N = \ell^2 g - \sum_{i=1}^{N} m_i + N \ (\leq \ell^2 g)$$

個の parameter に依る。(等号は $m_i = 1$ のとき)

従って、最大次元 (matrix divisor で見て) のところを考えることにすると、γ_i での local divisor が

$$\begin{pmatrix} 1 & & -\alpha_{i0} \\ & \ddots & \\ & & 1 - \alpha_{i\ell-2} \\ & & z \end{pmatrix}$$

の形のもの、言い換えると、γ_i における ψ_j の residue φ_{ij} の間に $\varphi_{ij}(x) = \alpha_{ij}(x_0)\varphi_{i,\ell-1}(x)$, $j = 0, \cdots, \ell-2$, なる関係が成り立つものを考えることになる。

組 $\{R, (\gamma_i(x_0), \alpha_{ij}(x_0), j = 0, \cdots, \ell-2), i = 1, \cdots, \ell g, w_j(x), j = 0, \cdots, \ell-2\}$ ($w_j(x)$ は 1. で述べたもの) を L.M に対する algebraic spectral data と呼ぶ。

4. Baker-Akhiezer function

次のdataが与えられたとする。

$\mathcal{R}$: 種数 $g>0$ の compact リーマン面,

$p_\infty \in \mathcal{R}$, $z=k^{-1}$, p_∞ のまわりの local parameter,

$\delta = \sum_{i=1}^{lg} \gamma_i$: $\mathcal{R}$ 上の non-special divisor.

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{lg})$, $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{i,l-1}) \in \mathbb{C}^{l-1}$

$A_j(x,k)$ $(j=1,\cdots,s)$ $l \times l$ 行列, k の多項式, s.t.

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} = [A_j, A_k].$$

このとき、まず、A_j から、関数 $\Phi_0(x, x_0, k)$ で

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_j} = A_j \Phi_0, \quad \Phi_0(x_0, x_0, k) = I_l$$

をみたすものが、一意的に定まる。

定理 (Krichever-Novikov) $\exists$ $\Psi(x, x_0, p) = (\psi_1(x,x_0,p), \cdots, \psi_l(x,x_0,p))$, $p \in \mathcal{R}$, s.t.

1. Ψ は $\mathcal{R}-\{p_\infty\}$ で meromorphic, pole divisor $=\delta$ で, γ_i における ψ_j の residue $\varphi_{ij}(x)$ は

$$\varphi_{ij}(x) = \alpha_{ij}\, \varphi_{il}(x), \quad j=1,\cdots,l-1$$

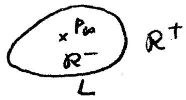
をみたす,

2. p_∞ の近傍で

$$\Psi(x, x_0, p) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x) k^{-s}\right) \Phi_0(x, x_0, k), \quad \xi_0 = (1, 0, \cdots, 0).$$

このような性質をもつΦの構成は、UをP_∞の近傍とし、$\partial U = L$とおくとき、次の$\mathcal{R}$上のRiemann-Hilbertの問題を解くことに帰着する。

$$\Phi^+(x, x_0, p) = \Phi^-(x, x_0, p)\, \Phi_0(x, x_0, \kappa) \quad \text{on } L$$



Φ: meromorphic in $\mathcal{R} - \{L\}$, $\Phi = (\phi_1, \cdots, \phi_l)$ とするとき

$(\phi_i) + \delta \geq 0$.

5. L, M の再構成

algebraic spectral data $\{\mathcal{R}, (\gamma_i, \alpha_{ij}, j = 0, \cdots, l-2), i = 1, \cdots, lg, w_j(x), j = 0, \cdots, l-2\}$ があたえられたとする。

まず、$\Phi_0(x, x_0, k)$ を微分方程式

$$\frac{d}{dx}\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ k + w_0 & w_1 & \cdots\ w_{l-2} & 0 \end{pmatrix} \Phi_0$$

の解で、初期条件 $\Phi_0(x_0, x_0, k) = I_l$ をみたすものとする。このΦ_0を用いて、4. の構成法で $\psi_j(x, x_0, p)$, $j = 0, \cdots, l-1$ を決める。

Φをψ_j $j = 0, \cdots, l-1$ のwronski行列とする。P_∞の近傍で

$$\Phi(x, x_0, p) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi'_s(x)\, \kappa^{-s}\right) \Phi_0(x, x_0, \kappa)$$

と表わされる。

λをP_∞のみでpoleをもつ$\mathcal{R}$上のmeromorphic functionとし、その order をmとする: $\lambda(p) \equiv \sum_{\alpha=0}^{m} \lambda_\alpha \kappa^\alpha \pmod{O(\kappa^{-1})}$ around P_∞.

補題　$\exists_1\ z_j(x),\ j=0,\cdots,m,\ (\ell\times\ell)$-matrix s.t.

$$\left(\sum_{j=0}^{m} z_j(x) D^{j\ell}\,\Psi\right)\Psi^{-1} \equiv \lambda \quad \mathrm{mod}\ O(x^{-1}) \quad \text{around } P_\infty$$

∵）　$(\ell\times\ell)$-行列 $a_{sj}(x)$ を

$$(D^j\Phi_0)(x,x_0,k) = \left(\sum_{s=0}^{N(j)} a_{sj}(x) k^s\right)\Phi_0(x,x_0,k),\quad N(j)=\left[\frac{j}{\ell}\right]$$

から決め，$Z_\alpha(x)$ を

$$\sum_{\alpha=0}^{m} z_\alpha \sum_{j=0}^{\alpha\ell} \sum_{t=0}^{N(j)} {}_{\alpha\ell}C_j\,(D^{\alpha\ell-j}\xi'_{s+t})\,a_{tj} = \sum_{\alpha=0}^{m} \lambda_\alpha\, \xi'_{s+\alpha},\quad s=-n,\cdots,0$$

から決めればよい。

$$L = \sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{j=1}^{\ell} z_{\alpha,1j}(x) D^{\alpha\ell+j-1}, \quad z_\alpha = (z_{\alpha,ij})$$

とおくと，$L\psi_i = \lambda\psi_i,\ i=0,\cdots,\ell-1$ が成り立つ．

μ をもう一つの P_∞ の n に pole をもつ R 上の meromorphic function とすれば，μ に対しても，上と同様にして ℓn 階の作用素（n = order of μ）M が定まり，$M\psi_i=\mu\psi_i\ \ i=0,\cdots,\ell-1$ が成りたつ。つまり $[L,M]=0$ となる。

注．$\gamma_i(x_0),\ \alpha_{ij}(x_0)$ の x_0-dependence を決めることができれば，それら $\gamma_i(x_0),\ \alpha_{ij}(x_0)$ から．Riemann-Rock の定理を用い，線型微分方程式を解くことによっても，ψ_j を構成できる。$g=1,\ \ell=2$ の場合の $\gamma_i(x_0),\ \alpha_{ij}(x_0)$ の x_0-dependence は Krichever-Novikov [4] に述べてある。

References

1. J. L. Burchnall and T. W. Chaundy: Proc. London Math. Soc. 21 (1922), p. 420, Proc. Royal. Soc. London (A) 118 (1928) p. 557., 134 (1931), p 471.

2. V. G. Drinfeld: Funct. Anal. Appl. 11 (1977), p. 9.

3. I. M. Krichever: Funct. Anal. Appl. 12 (1978). p. 175.

4. I. M. Krichever and S. P. Novikov: Funct. Anal Appl. 12 (1978). p. 276.

5. D. Mumford: Proc. Int. Symp. Alg. Geom. Kyoto 1977 (1978). p. 115.

6. A. N. Tyurin: A. M. S. Transl. (2) 63 (1967); p. 245., (2) 73 (1968). p. 196.