数理解析研究所講究録
第388巻 1980年 66-71

RIMS-329
Deformation of linear ordinary differential equations III の 定理1 の解説

京大数研 神保道夫
三輪哲二

$t=(t_1,\cdots,t_M)$ についての 1 formで，パラメタ $x\in\mathbb{P}^1$ について rational な $m\times m$ 行列 $\Omega(x)$ を考えよう。積分可能条件

$$(1)\qquad d\Omega(x)=\Omega(x)^2$$

は，t を独立変数とする非線型偏微分方程式系になり，数理物理に現われる多くの方程式がこの形で得られる事が知られている。 例えば

$$(2)\qquad \Omega(x)=A_1(x)dt_1+A_2(x)dt_2$$

$$A_1(x)=\begin{pmatrix} & 1\\ x+u & \end{pmatrix}$$

$$A_2(x)=\begin{pmatrix} x+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial t_1} & -\frac{1}{2}u\\ x^2+\frac{u}{2}x+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}-2u^2\right) & -\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial t_1}\end{pmatrix}$$

とおくと(1) は KdV 方程式

$$(3)\quad \frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^3} - 6u\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)$$

に帰着する。（1）は 線型方程式系

$$(4)\quad dY(x) = \Omega(x)Y(x)$$

の解の存在を保証する。表題の定理は，$\Omega(x)$ の極 における（4）の形式解の構成法を与えている。

方程式系（4）に x 微分の方程式

$$(5)\quad \frac{\partial Y(x)}{\partial x} = A(x)Y(x)$$

をつけ加える事を考えよう。（4）と（5）を合わせた線型方程式系の積分可能条件を考える事は，非線型方程式系（1）に新たな方程式を添加する事を意味する。こうして得られる非線型方程式系の一般解は，有限個の積分定数によって決まるという意味でホロノミックになる。もとの非線型方程式系（1）の一般解は，一変数任意函数を含むので サブ・ホロノミックと呼ばれる。ホロノミックにするのは，（1）の特殊解を考える事になるが，これは Painlevé 型の特殊函数を与える点が重要である。すなわち，$Y(x)$ は x の函数としてモノドロミー性質を持ち，（4）により，モノドロミーのデータは不変である。逆に言うと，何らかの方法でモノドロミー

不変な族を構成できれば，それは(1)の特殊解をもたらす。表題の定理は，ホロノミックに拡張するやり方を教えてくれる点に意義がある。（2）についてその方法を説明しよう。まず，xの最高次の対角化を行なう。$x=\xi^2$ とおくと

$$(6)\qquad \Xi(\xi)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&\xi^{-1}\end{pmatrix}\Omega(x)\begin{pmatrix}1&\\&\xi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}\xi+\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\frac{u\xi^{-1}}{2}\right\}dt_1$$

$$+\left\{\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}\xi^3+\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}\frac{u\xi}{2}+\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\left(\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}-\frac{u^2}{4}\right)\xi^{-1}\right\}dt_2$$

これで 定理が適用可能な形になった。結果は

$$(7)\qquad Z(\xi)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&\xi^{-1}\end{pmatrix}Y(x)$$

$$=F(\xi)\,D(\xi)\,e^{T(\xi)}$$

$$F(\xi)=1-\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}\frac{u\xi^{-2}}{4}+\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}\frac{\xi^{-3}}{8}\frac{\partial u}{\partial t_1}+\cdots$$

$D(\xi)$：対角行列

$$T(\xi)=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}(t_2\xi^3+t_1\xi)$$

さて(7)を使って $A(x)$ を計算すると

$$(8)\qquad A(x) = \frac{\partial Y(x)}{\partial x} \cdot Y(x)^{-1}$$

$$\underset{\mathrm{mod}\ x^{-2}}{\equiv} \frac{1}{2}\left\{ \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix} 3t_2 x + \begin{pmatrix} & 3t_2 \\ t_1 + \frac{3}{2}t_2 u & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3t_2}{4}\frac{\partial u}{\partial t_1} & t_1 - \frac{3}{2}t_2 u \\ v & -\frac{3t_2}{4}\frac{\partial u}{\partial t_1} + 1 \end{pmatrix} x^{-1} \right\}$$

を得る。v は(7)で $F(\xi)$ を ξ^{-3} までしか計算してないので決まらない。(8)は, $\mathrm{mod}\ x^{-2}$ でしか成立しないが, $O(x^{-2})$ を切り捨てたものを $A(x)$ として採用しよう。(4),(5)の積分可能条件として

$$(9)\qquad v = \frac{3t_2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + u\left(t_1 - \frac{3t_2 u}{2}\right)$$

$$(10)\qquad 3t_2\frac{\partial u}{\partial t_2} + t_1\frac{\partial u}{\partial t_1} + 2u = 0$$

を得る。結局,オイラー方程式(10)が添加された。(10)が添加され得る事は,(3)の斉次性から明らかである。しかし,注意すべき事は,(2)をホロノミックにする仕方は,(10)に限らないという点である。この事を,より簡単な例で説明する。

(3) と (10) において $t_2 = \frac{2}{3}$ とおくと

$$(11)\quad \frac{\partial}{\partial t_1}\left(t_1 u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} - \frac{3}{2}u^2\right) = -u$$

を得る。これは，(2) において $A_2(x)dt_2$ を捨てたものを $\Omega(x)$ として (8) の $A(x)$ でホロノミックにした時の方程式に他ならない。この場合，(1) は無条件に成立する。(11)から，τ函数は

$$(12)\quad \sigma = \frac{d}{dt_1}\log\tau = t_1 u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} - \frac{3}{2}u^2$$

$$(13)\quad \sigma = -t_1\frac{d\sigma}{dt_1} - \frac{1}{2}\frac{d^3\sigma}{dt_1^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{d\sigma}{dt_1}\right)^2$$

となる。実はこれは Ⅱ型のパンルベ方程式となる。

$A_1(x)dt$ をホロノミックにする $A(x)$ として，高次KdV方程式に対応する無限系列が作れる。自明でない最初の二つを書いておこう。（$\alpha, \beta, \cdots$ は定数とする。）

$$(14)\quad A(x) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix} \frac{u-\alpha}{2} & 1 \\ & \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} \frac{u'}{4} & -\frac{u+\alpha}{2} \\ \frac{u''}{4} - \frac{u(u+\alpha)}{2} & -\frac{u'}{4} \end{pmatrix} \qquad \left(u' = \frac{du}{dt}\right)$$

$$\left(\frac{1}{8}(u')^2 + (\beta - t)u - \frac{\alpha u^2}{4} - \frac{u^3}{4} \right)' = -u$$

$$\sigma = (\log \tau)' = \frac{1}{8}(u')^2 + (\beta - t)u - \frac{\alpha u^2}{4} - \frac{u^3}{4}$$

これは I 型のパンルベ方程式である。

(15) $$A(x) = \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} \frac{u-\alpha}{2} & 1 \\ & \end{pmatrix} x^2$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{u'}{4} & -\frac{u+\alpha}{2} \\ \frac{u''}{8} - \frac{u^2}{8} - \frac{\alpha u}{4} + \frac{\beta}{2} & -\frac{u'}{4} \end{pmatrix} x$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(\frac{u'''}{2} - 3uu' - \alpha u' \right) & -\frac{u''}{8} + \frac{3}{8}u^2 + \frac{\alpha}{4}u + \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{8}\left\{ \frac{u''''}{2} - 3(u')^2 - 4uu'' - \alpha_1 u'' + 3u^3 + 2\alpha_1 u^2 + 4\alpha_2 u \right\} & -\frac{1}{8}\left(\frac{u'''}{2} - 3uu' - \alpha u' \right) \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\Big[u'''u' - \frac{1}{2}(u'')^2 - 5u(u')^2 + \frac{5}{2}u^4 - 2tu - \alpha(u')^2 + 2\alpha u^3 + 4\beta u^2 - \gamma u \Big]' = -u$$

$$\sigma = (\log \tau)' = \frac{1}{2}\Big[u'''u' - \frac{1}{2}(u'')^2 - 5u(u')^2 + \frac{5}{2}u^4 - 2tu - \alpha(u')^2 + 2\alpha u^3 + 4\beta u^2 - \gamma u \Big]$$