

ψ -函数の性質について

横浜国大工学部 戸田盛和

§1. 非線形格子

扱われている1次元格子の波動についてどのように ψ -函数に出会うかという話から始める。相互作用ポテンシャル

$$(1.1) \quad \phi(r) = \frac{a}{b} e^{-br} + ar \quad (ab > 0)$$

で結ばれた質点(質量 m)からなる1次元格子を考え、 n 番目の質点の変位を y_n とする。上式で r は相互変位 r ,

$$(1.2) \quad r_n = y_{n+1} - y_n$$

を意味する。この力学系の全エネルギーは

$$(1.3) \quad H = \frac{m}{2} \sum_n \dot{y}_n^2 + \sum \phi(r_n)$$

であるが、ここで r_n に共役な運動量 S_n を導入すると

$$(1.4) \quad m \dot{y}_n = S_{n-1} - S_n$$

したがってハミルトン関数は

$$(1.5) \quad H = \frac{1}{2m} \sum_n (\dot{S}_{n-1} - \dot{S}_n)^2 + \sum_n \phi(r_n)$$

と与えられたことが示される。この運動方程式は（これは時間微分）

$$(1.6) \quad \begin{cases} \dot{r}_n = \frac{\partial H}{\partial S_n} = - \frac{S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}}{m} \\ \dot{S}_n = - \frac{\partial H}{\partial r_n} = - \phi'(r_n) \end{cases}$$

と書ける。ここで

$$(1.7) \quad f_n(r_n) = - \phi'(r_n) = a(e^{-br_n} - 1)$$

は相互作用による力を意味する。

(1.6) で S_n を消去すると r_n に対する式

$$(1.8) \quad m \frac{d^2 r_n}{dt^2} = a \left[2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}} \right]$$

を得るが、これは (1.3) から得る y_n に対する運動方程式と

(1.2) で書ける変数 e^{-br_n} に過ぎない。

(1.6) で r_n を消去すると S_n に対する式を得る。これを
 (1.7) を考慮し (1.6) の2式から

$$(1.9) \quad r_n = -\frac{1}{b} \log \left(1 + \frac{1}{a} \dot{S}_n \right)$$

これを (1.6) の第1項に代入して S_n の運動方程式

$$(1.10) \quad \frac{m}{b} \frac{d}{dt} \log \left(1 + \frac{1}{a} \dot{S}_n \right) = S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}$$

が得られる。そこで S_n を t で積分し

$$(1.11) \quad S_n = \int^t \dot{S}_n dt$$

とかくと

$$(1.12) \quad r_n = -\frac{1}{b} \log \left(1 + \frac{1}{a} \ddot{S}_n \right)$$

$$(1.13) \quad \log \left(1 + \frac{1}{a} \ddot{S}_n \right) = \frac{b}{m} (S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1})$$

また (1.11) の積分定数を適宜にとれば (1.4) の関係式

$$(1.14) \quad m y_n = S_{n-1} - S_n$$

$$(1.15) \quad m r_n = -(S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1})$$

を得る。

以下では単位を交換して

$$(1.16) \quad a = b = m = 1$$

にとる。運動方程式は

$$(1.17) \quad \log \left(1 + \ddot{S}_n \right) = S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}$$

と仮定する。

ここで、この体系に外かゝる力 f_{ext} を加わっていることを考慮できる。外かゝる一定の力 f_{ext} を加わっているとするとき、この場合の結果は、 $f_{ext} \sum r_n$ をつぎに加えることになる。したがって、 r_n に対する可換 (1.8) は、 S_n に対する可換は、

$$(1.18) \quad \log(a' + \ddot{S}_n) = S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}$$

となる。ここで

$$(1.19) \quad a' = a + f_{ext} = 1 + f_{ext}$$

である。また、このとき (1.18) の左辺は相互変位

$$(1.20) \quad r_n = -\frac{1}{b} \log(a' + \ddot{S}_n)$$

を表わすことになる。

§ 2. Jacobi の \mathcal{J} 関数との関係

(1.20) を

$$(2.1) \quad S_n = \log \psi_n$$

とあると, 2式は

$$(2.2) \quad \frac{\psi_{n-1} \psi_{n+1}}{\psi_n^2} = a' + \frac{d^2}{dt^2} \log \psi_n$$

とある.

もし

$$(2.3) \quad u = \kappa n + v\tau$$

とあると, Jacobi の \mathcal{J} 函数 \mathcal{J}_3 , あるいは $\mathcal{J}_4 (\equiv \mathcal{J}_0)$ に対する恒等式

$$(2.4) \quad \frac{\mathcal{J}(u-w)\mathcal{J}(u+w)}{\mathcal{J}(u)^2} = C(w) + A(w) \frac{d^2}{du^2} \log \mathcal{J}(u)$$

$$\mathcal{J}(u) = \mathcal{J}_3(u) \text{ あるいは } \mathcal{J}_0(u)$$

が思い出された. $C(w), A(w)$ は u を含みません, w だけの函数です.

簡単のため τ を 1 とする ($a' = 1$) $w = \kappa$ とする

$$(2.5) \quad \begin{cases} \psi_n = \frac{\mathcal{J}_0(u)}{C(\kappa)^{n^2/2}} \\ v^2 = \frac{A(\kappa)}{C(\kappa)} \end{cases}$$

が (2.2) の一つの解を与えることがわかった。関係式

$$(2.6) \quad \frac{d^2}{du^2} \log \mathcal{J}_0(u) = (2K)^2 \left\{ \operatorname{dn}^2(2Ku) - \frac{E}{K} \right\}$$

(K, E はそれぞれ第一種および第二種の完全楕円積分) を思い出すと、この解は

$$(2.7) \quad e^{-r_{n-1}} = (2Kv)^2 \left[\operatorname{dn}^2 \{ 2(n\kappa + vt)k \} - \frac{E}{K} \right]$$

あるいは

$$(2.8) \quad r_n = -\log \left(1 + (2Kv)^2 \left[\operatorname{dn}^2 \{ 2(xn + vt)k \} - \frac{E}{K} \right] \right)$$

と書ける, いわゆる格子 cnoidal 波であることがわかった。ここで κ は波数で任意の定数であり, 楕円関数 v は κ の函数として (2.5) として

$$(2.9) \quad v^2 = \frac{\operatorname{sn}^2(2K\kappa)}{(2K)^2 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{E}{K}\right) \operatorname{sn}^2(2K\kappa) \right\}}$$

の形に与えられる。

この解 cnoidal 波は種類 (genus) 1 の Riemann 函数であると知られる。

genus が 2 あるいはより大きい Riemann 函数の最も簡単なものは多変数 Riemann 函数である Riemann の Riemann 函数である。これを用いて周期格子の波を表わされることは Date-Tanaka によって示されている。

一番簡単な周期格子と(2)3個の質点からなる格子を考慮し、
その格子を一番簡単な運動と(2)

$$(2.10) \quad y_1 = -y_3, \quad y_2 = 0$$

を考慮すると、 y_1 および y_3 に対して解は

$$(2.11) \quad e^{-y} = 2\lambda_5\lambda_6 - 2(2k\nu)^2 k^2 \sin^2(\sqrt{\lambda_6^2 - \lambda_4^2} t - \delta)$$

となり

$$(2.12) \quad \nu = \frac{\sqrt{\lambda_6^2 - \lambda_4^2}}{2K(k)}$$

と書くと $\delta = \delta_0 + \pi n$ である。ここで discriminant は

$$(2.13) \quad \Delta(\lambda) = 8\lambda^3 - 2(\hat{E} + 3)\lambda$$

(\hat{E} は全エネルギー) であり、 $\Delta^2 - 4 = 0$ の根を小さい方
から $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ とし、 $\Delta(\lambda)$ が
 $\lambda = 0$ に対して反対称なのは運動が反対称 ($y_1 = -y_3$) である
ためであり、このため、解は一個の \sin 関数で表わす
ことができる。この意味で、この解は $g = 2$ の場合と対応している
のである。

より一般的に $g \geq 2$ の場合を扱うには次節の方法が都合
よく用いられる。

§3 不連続時間の非線形格子

δ を小さな量とすると

$$(3.1) \quad \psi(t+\delta)\psi(t-\delta) = \psi^2 + \delta^2(\psi\ddot{\psi} - \dot{\psi}^2) + O(\delta^4) \\ = \psi^2\left(1 + \delta^2 \frac{d^2}{dt^2} \log \psi\right) + O(\delta^4)$$

である。したがって運動方程式 (2.2) は ($a'=1$)

$$(3.2) \quad \psi_{n+1}(t)\psi_{n-1}(t) - \psi_n^2(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^2} \{ \psi_n(t+\delta)\psi_n(t-\delta) - \psi_n^2(t) \}$$

となる。この方が (2.2) よりも計算には都合がよい場合が多いと思われる。

ここで δ を有限に止めると

$$(3.3) \quad \psi_{n+1}(t)\psi_{n-1}(t) - \psi_n^2(t) = \frac{1}{\delta^2} \{ \psi_n(t+\delta)\psi_n(t-\delta) - \psi_n^2(t) \}$$

が考えられる。これは時間を不連続にした運動方程式で、非線形格子の拡張として極めて自然なものである。将来この方程式がさらに研究されることを望みたい。

この式は t にあつた $\psi_n(t)$, $\psi_{n-1}(t)$, $\psi_{n+1}(t)$ を知つて $\psi_n(t+\delta)$ を求める式と解釈できる。

$\psi_n = 1 + U_n$ とおいて $|U_n| \ll 1$ とし、 U_n について 1 次の項だけとすれば、線形方程式となる。

(例 i) ソリトン

$$(3.4) \quad \psi_n(t) = 1 + e^{2(\kappa n + \beta t)}$$

と仮定して

$$(3.5) \quad \sinh^2 \kappa = \frac{1}{\delta^2} \sinh^2(\beta \delta)$$

と (2) (3.3) の満足させた。 $\delta \rightarrow 0$ の極限では

$$(3.6) \quad \beta^2 \rightarrow \sinh^2 \kappa$$

と仮定して (3.3) の満足させた。

(3.7) cnoidal 波。 C を定数として

$$(3.7) \quad \psi_n = \varphi_n / C^{n/2}$$

と仮定して (3.3) は

$$(3.8) \quad \frac{1}{C} \varphi_{n+1} \varphi_{n-1} - \varphi_n^2(t) = \frac{1}{\delta^2} \{ \varphi_n(t+\delta) \varphi_n(t-\delta) - \varphi_n^2(t) \}$$

と仮定して。 $\varphi \sim \mathcal{J}_3$ (あるいは \mathcal{J}_0) とし、これは
付いた加法定理

$$(3.9) \quad \mathcal{J}_3(u - \kappa | \tau) \mathcal{J}_3(u + \kappa | \tau) = \mathcal{J}_3(2\kappa | 2\tau) \mathcal{J}_3(2u | 2\tau) + \mathcal{J}_2(2\kappa | 2\tau) \mathcal{J}_2(2u | 2\tau)$$

を用いる。 \mathcal{J}_3 は τ は \mathcal{J} -関数のようにして

$$(3.10) \quad \begin{cases} \mathcal{J}_3(u) = \mathcal{J}_3(u | \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i u m + \pi i \tau m^2} \\ \mathcal{J}_0(u) = \mathcal{J}_3(u + \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\left\{ \mathcal{J}_2(u) = \mathcal{J}_2(u|\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(m+\frac{1}{2})u + \pi i\tau(m+\frac{1}{2})^2} \right.$$

である。(3.9) を用いると (3.8) は $u = \kappa u + \nu \tau$ に因り
 $\mathcal{J}_3(2u|2\tau)$ の項と $\mathcal{J}_2(2u|2\tau)$ の項との和に与る。こ
 れぞれの係数は u を含みず、 κ, ν の函数である。こ
 の項を分離すれば各係数は (κ, ν) の函数である。

$$(3.11) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{C} \mathcal{J}_3(2\kappa|2\tau) - \mathcal{J}_3(0|2\tau) &= \frac{1}{\delta^2} \{ \mathcal{J}_3(2\nu\delta|2\tau) - \mathcal{J}_3(0|2\tau) \} \\ \frac{1}{C} \mathcal{J}_2(2\kappa|2\tau) - \mathcal{J}_2(0|2\tau) &= \frac{1}{\delta^2} \{ \mathcal{J}_2(2\nu\delta|2\tau) - \mathcal{J}_2(0|2\tau) \} \end{aligned} \right.$$

を得る。 κ は与えられた任意定数で、この2式から $\delta > 0$ 未
 知量 C と ν とを決定する。特に ν は C を消去し
 る式

$$(3.12) \quad \begin{aligned} & -\mathcal{J}_2(2\kappa|2\tau)\mathcal{J}_3(0|2\tau) + \mathcal{J}_3(2\kappa|2\tau)\mathcal{J}_2(0|2\tau) \\ &= \frac{1}{\delta^2} \left[\mathcal{J}_2(2\kappa|2\tau) \{ \mathcal{J}_3(2\nu\delta|2\tau) - \mathcal{J}_3(0|2\tau) \} \right. \\ & \quad \left. - \mathcal{J}_3(2\kappa|2\tau) \{ \mathcal{J}_2(2\nu\delta|2\tau) - \mathcal{J}_2(0|2\tau) \} \right] \end{aligned}$$

によつて、 κ の函数として与えられる。これは $\delta \rightarrow 0$ の
 極限では (2.9) と一致するようになる。

§ 4. 多変数の場合

函数

$$(4.1) \quad \mathcal{J}(u; s|\tau) = \sum_{m_1}^{\infty} \cdots \sum_{m_g}^{\infty} \exp \left[2\pi i \sum u_j \left(m_j + \frac{s_j}{2} \right) + \pi i \sum_{j,k} \tau_{j,k} \left(m_j + \frac{s_j}{2} \right) \left(m_k + \frac{s_k}{2} \right) \right]$$

を定義する。こゝに $s_j = 0, 1$ であり、 $s_j = 0$ であるものは、こゝに $s_j = 1$ の Riemann \mathcal{J} -函数である。加法定理

$$(4.2) \quad \mathcal{J}(u - \kappa; s|\tau) \mathcal{J}(u + \kappa; s|\tau) = \sum_{\mu=0,1} \mathcal{J}(2u; \mu|2\tau) \mathcal{J}(2u; s + \mu|2\tau)$$

はすこゝ証明される。こゝに (3.9) の拡張である。

$$(4.3) \quad \varphi(u) = \mathcal{J}(u; 0|\tau)$$

と仮定して、こゝに (3.8) に $\lambda = u$, $\mathcal{J}(2u; \mu|2\tau)$ の係数を両辺で等しくとぶと

$$(4.4) \quad \frac{1}{c} \mathcal{J}(2\kappa; \mu|2\tau) - \mathcal{J}(0; \mu|2\tau) = \frac{1}{\delta^2} \left\{ \mathcal{J}(2u\delta; \mu|2\tau) - \mathcal{J}(0; \mu|2\tau) \right\}$$

を得る。こゝに $\mu_1 = 0, 1; \mu_2 = 0, 1; \dots; \mu_g = 0, 1$ の 2^g 個の方程式である。

他方で各波数 $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_g$ と、これらの波の強さを表わすパラメータ $\tau_{11}, \tau_{22}, \dots, \tau_{gg}$ を与えられたものとするとき、未知量は $C, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_g$ および $\tau_{jk} (j \neq k)$ である。 $\tau_{jk} = \tau_{kj}$ とすると未知量の数は

$$(4.5) \quad 1 + g + \frac{g(g-1)}{2} = 1 + \frac{g(g+1)}{2}$$

である。

$g=1$ および $g=2$ に対しては

$$(4.6) \quad 2^g = 1 + \frac{g(g+1)}{2} \quad (g=1, 2)$$

であり、方程式の数と未知量の数とが一致するから、連立方程式 (4.4) は直ちに解を与える。 $g=1$ のときこれは cnoidal 波であり、 $g=2$ の場合は ν_1, ν_2 と τ_{12} および C が $\kappa_1, \kappa_2, \tau_{11}, \tau_{22}$ の函数として定まる。

$g \geq 3$ の場合は

$$(4.7) \quad 2^g > 1 + \frac{g(g+1)}{2} \quad (g \geq 3)$$

であるので、連立方程式は未知量よりも多くの方程式を含むことになる。余剰方程式は \mathcal{J} -函数に関する多数の恒等式を与えたと見えてはいるが、確かではない。即教示を仰ぎたく思う。