

τ-函数と Riemann-Hilbert 型積分方程式の
Fredholm 行列式について

京大・数理研 上野 喜三雄

§0 変形方程式の τ-函数 (定義は本講究録の三輪, 神保氏の報告を参照) で, 初等的に計算可能なもの, 例えば有理解, N-soliton 解という場合には

$$\tau = \text{const det } W \quad (W; \text{有限次元の行列})$$

と表現されている。(cf. [1], [2]) 特に, 2×2 行列の場合の N-soliton 解 (AKNS 形式が適用される) に対応する τ-函数は, Gelfand-Levitan 積分方程式の行列式とも一致する。(cf. [2]) そこで, すぐさま思い浮かぶことは, 有理解, (rank の大きい場合の) N-soliton 解の τ-函数も, 或る種の積分方程式の行列式 - 即ち, Riemann-Hilbert 型積分方程式の Fredholm 行列式 - として把握できないであろうか? ということである。もとより, 我々の問題意識は, モードロミ問題から発しているのであるから, 古典的 Riemann-Hilbert 問題と τ-函数の関連を見ようとするのは自然でもあり, また

一度は試みてみるべき考察かと思われる。この方向に沿って函数の解析的把握の仕方として最も徹底したものとしては、場の演算子の真空期待値として実現するという、*Holonomic Quantum Field* の方法があるが、(本講究録の三輪氏の報告、及び、[4]を参照。) 初等的な場合、もしくは τ -商については、もう少し古典的なレベルでの議論も可能なのである。以上が標題の意図するところである。

§ 1 有理解と Riemann-Hilbert 問題の関連について述べよう。まず、有理解は、次の複素領域での接続問題を解くことにより得られるということに注意する。(cf [2])

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(x) = \hat{Y}(x) e^{T(x)} \quad m \times m \\ \hat{Y}(x) = \sum_{\ell=0}^N Y_{\ell} x^{-\ell}, \quad Y_0 = 1, \\ T(x) = \sum_{s=1}^r T_{-s} \frac{x^s}{(-s)}, \quad \text{diagonal} \\ Y(x) = G \hat{Z}(x) x^L C \quad \text{---- (1.1)} \\ \hat{Z}(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} Z_{\ell} x^{\ell}, \quad Z_0 = 1, \\ L = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad \text{trace } L = 0 \end{array} \right.$$

定数行列 C, L 及び $T(x)$ を与えたとき、接続条件(1.1)を満たす $\hat{Y}(x)$ を求めることが、丁度、変形方程式の有理解を求めることに相当する。($\hat{Y}(x)$ の係数 Y_{ℓ} 達が、 T_{-s} の有理函数として表わさ

れる。) (1.1) と同じ接続条件を Riemann-Hilbert 問題として
言い換えると次の様になる。

命題 1 γ を原点を中心とする円とする。変形方程式の有
理解の構成は、次の条件を満足する $m \times m$ 行列 $\hat{Y}(x)$ を求める
Riemann-Hilbert 問題と同値である。

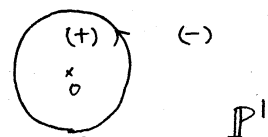
1° $\hat{Y}(x)$ は, $\mathbb{P}^1 - \gamma$ で正則かつ $\hat{Y}(x^\pm)$ は, 各々 γ 上 Hölder
連続。($\hat{Y}(x^\pm)$ は, $\hat{Y}(x)$ の γ の内, 外部からの境界値)

$$2^\circ \hat{Y}(x) = \hat{Y}(x^+) H(x) \quad \text{on } x \in \gamma$$

ただし, $H(x) = x^L C \exp(-T(x))$ である。

$$3^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \hat{Y}(x) = I$$

(fig)



次に N -soliton 解に対する Riemann-Hilbert 問題を考えよ
う。 N -soliton 解は, 次の複素領域での接続問題を解くこと
によって得られるのであった。

$$Y(x) = \hat{Y}(x) x^N e^{T(x)} \quad m \times m$$

$$\hat{Y}(x) = \sum_{k=0}^N Y_k x^{-k}, \quad Y_0 = I, \quad T(x) = \sum_{s=1}^r T_{-s} \frac{x^s}{(-s)} \quad \text{diagonal}$$

$$Y(x) = G^{(j)} \hat{Y}^{(j)}(x - a_j) E_1 C^{(j)} \quad \text{at } x = a_j \quad (j = 1, \dots, mN) \quad \text{---(U.2)}$$

ただし, a_j ($j = 1, \dots, mN$) は, 相異なる mN 個の点で, パラメータ T_{-s}
にはよらない。 $G^{(j)}, C^{(j)}$ は, 可逆行列で $C^{(j)}$ は, パラメータに
よらない。

いとする。又 $\hat{Y}^{(j)} = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(j)} (x-a_j)^k$, $Y_0^{(j)} = 1$, $E_1 = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ とする。接続条件 (1.2) を満足する $Y(x)$ を求めることが, N -soliton 解を構成することになるのである。($\hat{Y}(x)$ の係数は, \exp の有理式で表わされる。) これは, 次の様に言い換えられる。まず, a_j を中心とする互いに交わらない小円 Γ_j ($j=1, \dots, mN$) を用意し, $\mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^{mN} \Gamma_j$ とおく。

命題 2 変形方程式の N -soliton 解の構成は, 次の条件を満足する $m \times m$ 行列 $\hat{Y}(x)$ を求める Riemann-Hilbert 問題と同値である。

1° $\hat{Y}(x)$ は, $\mathbb{P} \setminus \mathcal{R}$ で正則, かつ $\hat{Y}(x^\pm)$ は, 各々 \mathcal{R} 上 Hölder 連続

2° $\hat{Y}(x^-) = \hat{Y}(x^+) H(x)$ on $x \in \mathcal{R}$

3° $\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{Y}(x) = 1$

ただし, $H(x)$ は各 Γ_j 上で次の如く定義される。

$H(x) = (x-a_j)^{E_1} C^{(j)} \exp(-T(x))$ on Γ_j ($j=1, \dots, mN$)

これらの問題を積分方程式に書き直すには, 既に知られている古典的手法に従えばよい。(cf [5], [6]) 即ち, (両者に共通して) $Y(x) = \hat{Y}(x)$ とおくと, $Y(x)$ は, 次の Riemann-Hilbert 型積分方程式を満足する。

$$Y(x) - \lambda \int_{\mathcal{R}} Y(y) K(y, x) dy = 1 \quad \text{--- (1.3)}$$

($\lambda = 1$)

$$K(y, x) = \frac{H(y)H(x) - 1}{2\pi i(y-x)} = (K_{j,k}(y, x))_{1 \leq j, k \leq m} \quad \text{--- (1.4)}$$

積分核 $K(y, x)$ は, regular であるから, (1.3) に対して通常の Fredholm の理論が適用される。そこで, (1.3) の Fredholm 行列式, 及び小行列式 (の行列) を定義しておく。

定義 1° $K_{n_1 \dots n_\ell}^{m_1 \dots m_\ell}(y_1 \dots y_\ell, x_1 \dots x_\ell) \stackrel{\text{def}}{=} \det (K_{m_\mu n_\nu}(y_\mu, x_\nu))_{1 \leq \mu, \nu \leq \ell} \quad \text{--- (1.5)}$

2° (Fredholm 行列式)

$$\Delta(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^\ell}{\ell!} \int_{r_1 \dots r_\ell} \dots \int_{r_1 \dots r_\ell} dy_1 \dots dy_\ell \sum_{n_1} \dots \sum_{n_\ell} K_{n_1 \dots n_\ell}^{m_1 \dots m_\ell}(y_1 \dots y_\ell, x_1 \dots x_\ell) \quad \text{--- (1.6)}$$

3° (Fredholm 小行列式)

$$\Delta \left(\begin{matrix} j \\ k \end{matrix}; \begin{matrix} y \\ x \end{matrix}; \lambda \right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^\ell}{\ell!} \int_{r_1 \dots r_\ell} \dots \int_{r_1 \dots r_\ell} dy_1 \dots dy_\ell \sum_{n_1} \dots \sum_{n_\ell} K_{k n_1 \dots n_\ell}^{j n_1 \dots n_\ell} \left(\begin{matrix} y & y_1 & \dots & y_\ell \\ x & x_1 & \dots & x_\ell \end{matrix} \right) \quad \text{--- (1.7)}$$

$$4^\circ \Delta \left(\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}; \lambda \right) = \left(\Delta \left(\begin{matrix} j \\ k \end{matrix}; \begin{matrix} y \\ x \end{matrix}; \lambda \right) \right)_{1 \leq j, k \leq m} \quad \text{--- (1.8)}$$

このとき, (1.3) のレゾルベント核 $R(y, x, \lambda)$ は,

$$R(y, x, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \Delta \left(\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}; \lambda \right) \quad \text{--- (1.9)}$$

(Fredholm の関係式)

によって与えられる。従って, $\Delta(1) \neq 0$ とすれば, (1.3) の一意連解は, Fredholm の定理により

$$Y(x) = 1 + \int_r \frac{1}{\Delta(1)} \Delta \left(\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}; 1 \right) dy \quad \text{--- (1.10)}$$

と表示される。

さて, Riemann-Hilbert問題の解は, 方程式(1.3)を満足するか, 逆は必ずしも言えない。ところが, $\Delta(-1) \neq 0$ が成立していれば, 逆も正しいことが知られている。(cf [5], [6])

以上をまとめて次の命題を得る。

命題 3 $\Delta(1) \neq 0$, か $\Delta(-1) \neq 0$ とすれば, 有理解, N -soliton 解に対する Riemann-Hilbert 問題の解 $\hat{Y}(x)$ は,

$$\hat{Y}(x) = 1 + \int_r \frac{1}{\Delta(1)} \Delta\left(\frac{y}{x}; \lambda\right) dy \quad \text{--- (1.10)}$$

と表示される。

§2. τ -函数と Fredholm 行列式

我々は §1 で定義した Fredholm 行列式が実は, τ -函数に他ならぬことを示したいのであるが, その為には, 次の三輪神保 (cf [3]) による τ -函数の特徴付けの定理を必要とする。

定理 τ -函数は, 次の式で定数倍を除いて特徴付けられる。

$$\hat{Y}_{\alpha\alpha}(x) = \frac{\tau\left(\dots, t_{-1,\alpha} + \frac{1}{x}, \dots, t_{-r,\alpha} + \frac{1}{x^r}, \dots\right)}{\tau(x)} \pmod{O(x^{-r})} \quad \text{for } \alpha=1, \dots, m$$

--- (2.1)

ただし, $T_{-s} = \text{diag}(t_{-s,1}, \dots, t_{-s,m})$

この定理は, 大変強力であり, これを用いると $\Delta(1)$ が τ -函数であることは, 次の様に示される。

$K(y, x)$ に含まれるパラメーター T_{-s} の α 成分 $t_{-s, \alpha}$ を

$$t_{-s, \alpha} \longrightarrow t_{-s, \alpha} + x^{-s} \quad (s=1, \dots, r)$$

shiftして得られるものを $\hat{K}(y, x)$ とおく。又、 $\hat{K}_{m_1 \dots m_\ell}^{n_1 \dots n_\ell} \begin{pmatrix} y_1 \dots y_\ell \\ x_1 \dots x_\ell \end{pmatrix}$ $\hat{\Delta}(\lambda)$ は、 $\hat{K}(y, x)$ から (1.5), (1.6) を通じて定義されるものとする。我々の得た定理は次の通りである。

定理4 Riemann-Hilbert 問題の解 $\hat{Y}(x)$ (1.10) に対して

$$\frac{\hat{\Delta}(1)}{\Delta(1)} \equiv \hat{Y}_{\alpha\alpha}(x) \pmod{O(x^{-r-1})} \quad \text{--- (2.2)}$$

for $\alpha=1, \dots, m$

が成立する。従って $\Delta(1)$ は、 τ 函数である。

この定理の証明は、概略次の如く行われる。まず、次の命題を示す。

命題5 パラメーターの shift は、 $\alpha=1$ とする。

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = \ell, \quad n_{p_1+1}, \dots, n_\ell, m_{p_2+1}, \dots, m_\ell \neq 1 \text{ とする。}$$

このとき、次の関係が成立する。

$$\begin{aligned} & \hat{K} \begin{matrix} p_1 \\ \hline 1 \dots 1 \\ \hline 1 \dots 1 \\ p_2 \end{matrix} \begin{matrix} n_{p_1+1} \dots n_\ell \\ \hline m_{p_2+1} \dots m_\ell \end{matrix} \begin{pmatrix} y_1 \dots y_{p_1} & y_{p_1+1} \dots y_\ell \\ z_1 \dots z_{p_2} & z_{p_2+1} \dots z_\ell \end{pmatrix} \\ & \equiv \exp \left(\sum_{1 \leq \lambda_1 \leq p_1} T^{(\infty)}(y_{\lambda_1}) - \sum_{1 \leq \lambda_2 \leq p_2} T^{(\infty)}(z_{\lambda_2}) \right) \\ & \times \left\{ K \begin{matrix} 1 \dots 1 & n_{p_1+1} \dots n_\ell \\ \hline 1 \dots 1 & m_{p_2+1} \dots m_\ell \end{matrix} \begin{pmatrix} y_1 \dots y_{p_1} & y_{p_1+1} \dots y_\ell \\ z_1 \dots z_{p_2} & z_{p_2+1} \dots z_\ell \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{1 \leq \mu_1 \leq p_1 \\ 1 \leq \mu_2 \leq p_2}} (-1)^{\mu_1 + \mu_2} f_{\mu_1 \mu_2} K \begin{matrix} 1 \dots 1 & n_{p_1+1} \dots n_\ell \\ \hline 1 \dots 1 & m_{p_2+1} \dots m_\ell \end{matrix} \begin{pmatrix} y_1 \dots y_{p_1} & y_{p_1+1} \dots y_\ell \\ z_1 \dots z_{p_2} & z_{p_2+1} \dots z_\ell \end{pmatrix} \right\} \quad \text{--- (2.3)} \end{aligned}$$

ただし, $T^{(\infty)}(y) = \sum_{\alpha=1}^r \frac{1}{-\alpha} \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha$,
 $f_{\mu\nu} = \frac{\exp\{T^{(\infty)}(z_\nu) - T^{(\infty)}(z_\mu)\} - 1}{2\pi i (z_\nu - z_\mu)}$

であり, μ は, μ 番目の index, 又は変数を除くことを意味する。
 証明は, l に関する帰納法によるが, 詳しいことは省略する。
 この命題の系として次を得る。

系 6 ($\alpha=1$ とする) $p_1 + q_1 = l$, $n_j \geq 2$, ($j = p_1 + 1, \dots, l$)

$$\begin{aligned} & \tilde{K}_{\substack{1 \dots 1 \\ \hline 1 \dots 1 \\ \hline r}}^{1 \dots 1 \quad n_{p_1+1} \dots n_l} (y_1 \dots y_{p_1} \quad y_{p_1+1} \dots y_l) \\ & \equiv K_{\substack{1 \dots 1 \quad n_{p_1+1} \dots n_l \\ \hline 1 \dots 1 \quad n_{p_1+1} \dots n_l}} (y_1 \dots y_l) \\ & + \frac{-1}{2\pi i} \sum_{1 \leq \mu_1, \mu_2 \leq p_1} (-)^{\mu_1 + \mu_2} \left(\sum_{\alpha=1}^r \frac{y_{\mu_1}^{\alpha-1}}{x^\alpha} \right) K_{\substack{1 \dots 1 \quad n_{p_1+1} \dots n_l \\ \hline 1 \dots 1 \quad n_{p_1+1} \dots n_l}}^{1 \dots 1 \quad n_{p_1+1} \dots n_l} (y_1 \dots y_{p_1} \quad y_{p_1+1} \dots y_l) \\ & \qquad \qquad \qquad \text{mod } O(x^{-r-1}) \qquad \qquad \qquad \text{--- (2.4)} \end{aligned}$$

(定理 4 の略証) ($\alpha=1$ として行う)

系 6 から

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l!} \int_{r_x \dots x_r} \dots \int dy_1 \dots dy_l \sum_{n_1} \dots \sum_{n_l} \tilde{K}_{n_1 \dots n_l}^{n_1 \dots n_l} (y_1 \dots y_l) \\ & \equiv \int_{r_x \dots x_r} \dots \int dy_1 \dots dy_l \sum_{n_1} \dots \sum_{n_l} K_{n_1 \dots n_l}^{n_1 \dots n_l} (y_1 \dots y_l) \\ & + \frac{1}{2\pi i} \iint_{r_x \times r} dy dz \sum_{\alpha=1}^r \frac{z^{\alpha-1}}{x^\alpha} \times \frac{1}{(l-2)!} \int_{r_x \dots x_r} \dots \int dy_1 \dots dy_{l-2} \\ & \qquad \qquad \qquad \left(\sum_{n_1} \dots \sum_{n_{l-2}} K_{n_1 \dots n_{l-2}}^{n_1 \dots n_{l-2}} (y_1 \dots y_{l-2}) \right) \\ & \qquad \qquad \qquad \text{mod } O(x^{-r-1}) \end{aligned}$$

この式をすべての l について加えれば, $\hat{\Delta}(1) \equiv \Delta(1) \hat{Y}(x) \text{ mod } \mathcal{O}$

\mathcal{O}

$O(x^{-r-1})$ を得る。Q.E.D.

§3. τ -quotient と Fredholm 行列式

§1 と同じ思想圏で Schlesinger 変換を Riemann-Hilbert 問題として捉えることができる。

次の微分方程式を考える。

$$\frac{d}{dx} Y(x) = A(x) Y(x) \quad \text{--- (3.1)}$$

$$\text{ただし, } A(x) = \sum_{s=1}^r A_{-s} x^{s-1} + A_0 x^{-1} \quad m \times m$$

$$A_{-r} = T_{-r}^{(\infty)} \quad (\text{generic diagonal})$$

$$A_0 = G^{(0)} T_0^{(0)} G^{(0)-1}, \quad T_0^{(0)} \quad (\text{generic diagonal})$$

(3.1) の $x=\infty$ で正規化された形式解 $Y^{(\infty)}(x)$

$$Y^{(\infty)}(x) = \hat{Y}^{(\infty)}(x) \exp\left(\sum_{s=1}^r T_{-s}^{(\infty)} \frac{x^s}{s} + T_0^{(\infty)} \log\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$Y_1^{(\infty)}$: (3.1) の解の基本系 s.t. $\exists \delta_1$ ($x=\infty$ における角領域)

$$Y_1^{(\infty)} \sim Y^{(\infty)} \quad \text{as } x \rightarrow \infty \text{ in } \delta_1$$

(3.2) を $x=0$ で Gauge 変換する。

$$\frac{d}{dx} Y(x) = G^{(0)-1} A(x) G^{(0)} Y(x) \quad \text{--- (3.2)}$$

(3.2) の $x=0$ で正規化された解 $Y^{(0)}(x)$

$$Y^{(0)}(x) = \hat{Y}^{(0)}(x) x^{T_0^{(0)}}$$

$x=\infty$ と $x=0$ を結ぶ接続行列を $C^{(0)}$ とする。即ち

$$Y_1^{(\infty)}(x) = G^{(0)} Y^{(0)}(x) C^{(0)} \quad \text{--- (3.3)}$$

(3.1)に対して次の Schlesinger変換を行なう。

$$\begin{Bmatrix} \infty & 0 \\ 0 & L^{(0)} \end{Bmatrix}, \quad L^{(0)} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m), \quad \text{trace } L^{(0)} = 0.$$

$$H(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^{T_0^{(0)} + L^{(0)}} C^{(0)} Y_1^{(0)\top} \quad \text{--- (3.4)}$$

とおくと, (3.3)より $H(x)$ は, $P^1 - \{\infty, 0\}$ で 1 価正則である。次の Riemann-Hilbert 問題を考える。

r : $x=0$ を中心とする小円。次の条件を満足する $m \times m$ 行列 $R(x)$ を求めよ。

1° $R(x)$ は, $P^1 - r$ で正則かつ $R(x^\pm)$ は, r 上で Hölder 連続

2° $R(x^-) = R(x^+) H(x)$ on $x \in r$.

3° $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 1$

命題 7 $R(x)$ を上述の Riemann-Hilbert 問題の解とする。

$$Y(x) \longmapsto R(x) Y(x) = Y'(x)$$

という変換は, Schlesinger 変換 $\begin{Bmatrix} \infty & 0 \\ 0 & L^{(0)} \end{Bmatrix}$ と同じである。

さて, Schlesinger 変換した後の $x=\infty$ での正規化された形式解を

$$Y'^{(0)}(x) = \hat{Y}'^{(0)}(x) \exp \left\{ \sum_{\alpha=1}^r T_\alpha \frac{x^\alpha}{(-x)} + T_0^{(0)} \log \left(\frac{1}{x} \right) \right\}$$

とすると

$$Y'_{1,\alpha\alpha}^{(0)} - Y_{1,\alpha\alpha}^{(0)} = R_{1,\alpha\alpha} = \frac{\partial}{\partial \tau_{1,\alpha}} \log(\tau'/\tau) \quad \text{--- (3.5)}$$

である。我々は、§2と同じ方法を用いて、次の命題を得た。

$$\text{定理 8} \quad \frac{\partial}{\partial t_{1,\alpha}} \Delta(1) = R_{1,\alpha} \quad \text{---- (3.6)}$$

ただし、 $\Delta(1)$ は次の積分方程式の Fredholm 行列式である。

$$R(x) - \lambda \int_{\Gamma} R(y) K(y, x) dy = 1 \quad \text{--- (3.7)}$$

$$K(y, x) = \frac{H(y)H(x) - 1}{2\pi i(y-x)}$$

(3.7)はもちろん上述の Riemann-Hilbert 問題に対応する方程式)

Fredholm 行列式 $\Delta(1)$ が τ -quotient (τ'/τ) に一致することを示すには、高次のパラメータ $t_{s,\alpha}$ ($s \geq 2$) に関する微分を調べないといけないので、現在のところ、それは完成されていない。又、不確定特異点があつた以上ある場合については、Riemann-Hilbert 問題としての定式化は容易なのであるが、 τ -函数の計算がうまくゆかない。

以上で、この問題についての現状報告をおわる。

(§21の追記)

不思議なことに、次の命題が成立する。

命題 9 実は、 $\Delta(1) = \text{const} \Delta(-1)$ である!!

References

- [1] K.Ueno, RIMS preprint 309.
- [2] M.Jimbo, T.Miwa, K.Ueno, RIMS preprint 319.
- [3] M.Jimbo, T.Miwa, RIMS preprint 329.
- [4] T.Miwa, RIMS preprint 330.
- [5] N.I.Muskhelishvili, Singular Integral Equations.
- [6] J.Plemelj, Problems in the sense of Riemann and Klein.