数理解析研究所講究録
第 388 巻 1980 年 183-204

広田氏の Bilinear Equations について

京大　数理研　佐藤　幹夫
琉球大　理　毛織　泰子

ここでは主に Korteweg-de Vries (KdV) 方程式, modified Korteweg-de Vries (MKdV) 方程式及び Nonlinear Schrödinger (NLS) 方程式を考える。

$\Delta(p_1,\cdots,p_r)$ で差積：$\prod_{1\le i<j\le r}(p_i-p_j)$ を表わす。このとき $\Delta(p_1^2,\cdots,p_r^2)=\prod_{i<j}(p_i^2-p_j^2)$ である。

[KdV, MKdV]

$t=(t_0,t_1,t_2,\cdots)$ において, $t_0,t_1,t_2,\cdots$ の weight を各々 $1,3,5,\cdots$ と定める。$x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$ についても同様とする。

$p_1,\cdots,p_r$ の函数 $F(p_1,\cdots,p_r)$ の totally $\begin{smallmatrix}\text{even}\\ \text{odd}\end{smallmatrix}$ part を次のように定義する:

(1) $$\text{totally even part of } F(p_1,\cdots,p_r)\underset{\text{def.}}{=}\frac{1}{2^r}\sum_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_r=\pm1}^{2^r}F(\epsilon_1p_1,\cdots,\epsilon_rp_r).$$

(2) $$\text{totally odd part of } F(p_1,\cdots,p_r)\underset{\text{def.}}{=}\frac{1}{2^r}\sum_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_r=\pm1}^{2^r}(-)^{\#}F(\epsilon_1p_1,\cdots,\epsilon_rp_r),$$
$$\#\underset{\text{def.}}{=}\#\{j\mid\epsilon_j=-1,\ 1\le j\le r\}.$$

(3) $$\Delta(p_1^2,\cdots,p_r^2)\,\Phi^{\pm}(t;p_1,\cdots,p_r)$$
$$\underset{\text{def.}}{=}\text{totally }\begin{smallmatrix}\text{even}\\ \text{odd}\end{smallmatrix}\text{ part of }\Delta(p_1,\cdots,p_r)e^{\frac{t_0}{2}(p_1+\cdots+p_r)+\frac{t_1}{2}(p_1^3+\cdots+p_r^3)+\frac{t_2}{2}(p_1^5+\cdots+p_r^5)+\cdots}.$$

(4) $$2^r\cdot\Delta(p_1^2,\cdots,p_r^2)\cdot\left(\Phi^-(t;p_1,\cdots,p_r)\right)^2 \overset{\text{def.}}{=} \sum_{\substack{l_1>\cdots>l_r>0\\ \text{even}}} a_{l_1\cdots l_r}(t)\cdot\det\begin{bmatrix} p_1^{l_1} & \cdots & p_1^{l_r}\\ \vdots & & \vdots\\ p_r^{l_1} & \cdots & p_r^{l_r}\end{bmatrix}.$$

(5) $$2^r\cdot\Delta(p_1^2,\cdots,p_r^2)\cdot\Phi^+(t;p_1,\cdots,p_r)\,\Phi^-(t;p_1,\cdots,p_r) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{\substack{l_1>\cdots>l_r>0\\ \text{odd}}} a_{l_1\cdots l_r}(t)\cdot\det\begin{bmatrix} p_1^{l_1} & \cdots & p_1^{l_r}\\ \vdots & & \vdots\\ p_r^{l_1} & \cdots & p_r^{l_r}\end{bmatrix}.$$

$r=0$ のとき $a_{l_1\cdots l_r}(t)=1$ とする。

<u>主定理</u>　u を KdV 方程式 $u_{x_1}=(u_{x_0x_0}+3u^2)_{x_0}$ の解，v を MKdV 方程式 $v_{x_1}=(v_{x_0x_0}-2v^3)_{x_0}$ の解とする（下の添字は微分を表わす）。$u=(2\log f)_{x_0x_0}$，$v=(\log\frac{f}{g})_{x_0}$ となる f, g を適当に選べば

(6) $$\frac{f(x+t)f(x-t)}{f(x)^2}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\substack{l_1>\cdots>l_r>0\\ \text{even}}} a_{l_1\cdots l_r}(t)\cdot K_{l_1\cdots l_r}[u],$$

(7) $$\frac{f(x+t)g(x-t)}{f(x)g(x)}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\substack{l_1>\cdots>l_r>0\\ \text{odd}}} a_{l_1\cdots l_r}(t)\cdot K_{l_1\cdots l_r}[v]$$

が成り立つ。ここに $K_{l_1\cdots l_r}[u]$ は $u, u_{x_0}, u_{x_0x_0},\cdots$ を各々 weight $2,3,4,\cdots$ と数えて，それらの weight $l_1+\cdots+l_r$ の斉重多項式，又 $K_{l_1\cdots l_r}[v]$ は $v, v_{x_0}, v_{x_0x_0},\cdots$ を各々 weight $1,2,3,\cdots$ と数えて，それらの weight $l_1+\cdots+l_r$ の斉重多項式である（表2）。特に $r=0$ のとき $K_{l_1\cdots l_r}[u]=K_{l_1\cdots l_r}[v]=1$ とする。

$k=(k_0,k_1,k_2,\cdots)$ とし，$|k|\underset{\text{def.}}{=}k_0+3k_1+5k_2+\cdots$，$D^k=D_0^{k_0}D_1^{k_1}D_2^{k_2}\cdots$，$D_m=\frac{\partial}{\partial x_m}$ とする。$a_{l_1\cdots l_r}(t)\overset{\text{def.}}{=}\sum_{|k|=l_1+\cdots+l_r} a_{l_1\cdots l_r:k}\frac{t^k}{k!}$ と書くとき，主定理は次のように言いかえられる（左辺は広田氏[3]

の意味での微分とする)。

$$(6)_k \qquad \frac{D^k f\cdot f}{f^2} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1>\cdots>l_r>0 \\ \text{even} \\ l_1+\cdots+l_r=|k|}} a_{l_1\cdots l_r:k}\cdot K_{l_1\cdots l_r}[u],$$

$$(7)_k \qquad \frac{D^k f\cdot g}{fg} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1>\cdots>l_r>0 \\ \text{odd} \\ l_1+\cdots+l_r=|k|}} a_{l_1\cdots l_r:k}\cdot K_{l_1\cdots l_r}[v].$$

系　$P(D_x)=P(D_0, D_1, D_2, \cdots)$ が $D_0, D_1, D_2, \cdots$ を各々 weight $1, 3, 5, \cdots$ と数えてそれらの weight n の斉重多項式であるとき($\Leftrightarrow$ は必要十分を表わす),

(8) [KdV] $P(D_x)f\cdot f=0$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\partial}{\partial t_0}, \frac{\partial}{\partial t_1}, \cdots\right)a_{l_1\cdots l_r}(t)=0 \quad \text{for } {}^\forall(l_1,\cdots,l_r) \text{ s.t. } l_1+\cdots+l_r=n,\ \underset{\text{even}}{l_1>\cdots>l_r>0}.$$

(9) [MKdV] $P(D_x)f\cdot g=0$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\partial}{\partial t_0}, \frac{\partial}{\partial t_1}, \cdots\right)a_{l_1\cdots l_r}(t)=0 \quad \text{for } {}^\forall(l_1,\cdots,l_r) \text{ s.t. } l_1+\cdots+l_r=n,\ \underset{\text{odd}}{l_1>\cdots>l_r>0}.$$

[NLS]

$t=(t_1, t_2, t_3, \cdots)$ において t_1, t_2, t_3 を各々 weight $1, 2, 3, \cdots$ と定める。$x=(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ についても同様とする。

(10) $\Delta(p_1,\cdots,p_{2r+1})\cdot\Phi(t;p_1,\cdots,p_{2r+1})$

$$\underset{\text{def.}}{=} \frac{1}{r!(r+1)!}\sum^{(2r+1)!} \pm\Delta(p_1,\cdots,p_r)\cdot\Delta(p_{r+1},\cdots,p_{2r+1})\, e^{\frac{t_1}{2}(-p_1-\cdots-p_r+p_{r+1}+\cdots+p_{2r+1})+\frac{t_2}{2}(-p_1^2-\cdots-p_r^2+p_{r+1}^2+\cdots+p_{2r+1}^2)+\cdots}.$$

(11) $\Delta(p_1,\cdots,p_{2r})\cdot\Phi(t;p_1,\cdots,p_{2r})$

$$\underset{\text{def.}}{=} \frac{1}{r!\,r!}\sum^{(2r)!} \pm\Delta(p_1,\cdots,p_r)\cdot\Delta(p_{r+1},\cdots,p_{2r})\, e^{\frac{t_1}{2}(-p_1-\cdots-p_r+p_{r+1}+\cdots+p_{2r})+\frac{t_2}{2}(-p_1^2-\cdots-p_r^2+p_{r+1}^2+\cdots+p_{2r}^2)+\cdots}.$$

$$(12)\quad \Delta(p_1,\cdots,p_{2r+1})\cdot\left(\Phi(t;p_1,\cdots,p_{2r+1})\right)^2 \overset{def}{=} \sum_{l_1>\cdots>l_{2r+1}\geq 0} a_{l_1\cdots l_{2r+1}}(t)\cdot \det\begin{bmatrix} p_1^{l_1} & \cdots & p_1^{l_{2r+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{2r+1}^{l_1} & \cdots & p_{2r+1}^{l_{2r+1}} \end{bmatrix}.$$

$$(13)\quad \Delta(p_1,\cdots,p_{2r})\cdot\left(\Phi(t;p_1,\cdots,p_{2r})\right)^2 \overset{def}{=} \sum_{l_1>\cdots>l_{2r}\geq 0} a_{l_1\cdots l_{2r}}(t)\cdot \det\begin{bmatrix} p_1^{l_1} & \cdots & p_1^{l_{2r}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{2r}^{l_1} & \cdots & p_{2r}^{l_{2r}} \end{bmatrix}.$$

$r=0$ のとき $a_{l_1\cdots l_{2r}}(t)=1$ とする。

$k=(k_1,k_2,k_3,\cdots)$ とし $|k| \underset{def}{=} k_1+2k_2+3k_3+\cdots$, $D^k=D_1^{k_1}D_2^{k_2}D_3^{k_3}\cdots$, $D_m=\frac{\partial}{\partial x_m}$ とする。 $a_{l_1\cdots l_{2r+1}}(t) \overset{def}{=} \sum_{|k|=l_1+\cdots+l_{2r+1}+r} a_{l_1\cdots l_{2r+1}:k}\frac{t^k}{k!}$, $a_{l_1\cdots l_{2r}}(t) \overset{def}{=} \sum_{|k|=l_1+\cdots+l_{2r}+r} a_{l_1\cdots l_{2r}:k}\frac{t^k}{k!}$ と書く。

<u>主定理</u> v と w (resp. u と v) を NLS 方程式 $v_{x_2}=(v^2+w)_{x_1}$, $w_{x_2}=(v_{x_1x_1}+2vw)_{x_1}$ (resp. $u_{x_2}=(u_{x_1}+2uv)_{x_1}$, $v_{x_2}=(-v_{x_1}+v^2+u)_{x_1}$) の解とする。 $u=(2\log f)_{x_1x_1}$, $v=(\log\frac{f}{g})_{x_1}$, $w=(\log fg)_{x_1x_1}$ となる f, g を適当に選べば (このとき $u=v_{x_1}+w$ である),

$$(14)_k\quad \frac{D^k f\cdot g}{fg} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\substack{l_1>\cdots>l_{2r+1}\geq 0\\ l_1+\cdots+l_{2r+1}=|k|-r}} a_{l_1\cdots l_{2r+1}:k}\cdot K_{l_1\cdots l_{2r+1}}[v,w],$$

$$(15)_k\quad \frac{D^k f\cdot f}{f^2} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\substack{l_1>\cdots>l_{2r}\geq 0\\ l_1+\cdots+l_{2r}=|k|-r}} a_{l_1\cdots l_{2r}:k}\cdot K_{l_1\cdots l_{2r}}[u,v]$$

が成り立つ。ここに、$K_{l_1\cdots l_{2r+1}}[v,w]$ は $v, v_{x_1}, v_{x_1x_1},\cdots$ を weight $1,2,3,\cdots$, $w, w_{x_1}, w_{x_1x_1},\cdots$ を weight $2,3,4,\cdots$ と数えてそれらの weight $l_1+\cdots+l_{2r+1}+r$ の斉重多項式, $K_{l_1\cdots l_{2r}}[u,v]$ は $u, u_{x_1}, u_{x_1x_1},\cdots$, $v, v_{x_1}, v_{x_1x_1},\cdots$ を weight $2,3,4,\cdots$, $1,2,3\cdots$ と数えてそれらの weight $l_1+\cdots+l_{2r}+r$ の斉重多項式である(表4)。特に $r=0$ のとき $K_{l_1\cdots l_{2r}}[u,v]=1$

とする。

<u>系</u>　$P(D_x)=P(D_1,D_2,D_3,\cdots)$ が $D_1,D_2,D_3,\cdots$ を各々 weight $1,2,3,\cdots$ と数えて、それらの weight n の斉重多項式であるとき、

(16)
$$\begin{aligned}&P(D_x)f\cdot f=0\\ \Leftrightarrow\ &P\left(\tfrac{\partial}{\partial t_1},\tfrac{\partial}{\partial t_2},\cdots\right)u_{l_1\cdots l_{2r+1}}(t)=0\quad \text{for}\ {}^\forall(l_1,\cdots,l_{2r+1})\ \text{s.t.}\ l_1+\cdots+l_{2r+1}+r=n,\ l_1>\cdots>l_{2r+1}\geqq 0.\end{aligned}$$

(17)
$$\begin{aligned}&P(D_x)f\cdot f=0\\ \Leftrightarrow\ &P\left(\tfrac{\partial}{\partial t_1},\tfrac{\partial}{\partial t_2},\cdots\right)u_{l_1\cdots l_{2r}}(t)=0\quad \text{for}\ {}^\forall(l_1,\cdots,l_{2r})\ \text{s.t.}\ l_1+\cdots+l_{2r}+r=n,\ l_1>\cdots>l_{2r}\geqq 0.\end{aligned}$$

$p(n)$ = n を自然数の和に分ける分け方の数,

$p^{\text{even}}_{\text{odd}}(n)$ = n を $\begin{matrix}\text{偶数}\\ \text{奇数}\end{matrix}$ の和に分ける分け方の数,

$q(n)$ = n を相異なる自然数の和に分ける分け方の数,

$q^{\text{even}}_{\text{odd}}(n)$ = n を相異なる $\begin{matrix}\text{偶数}\\ \text{奇数}\end{matrix}$ の和に分ける分け方の数

とおく。これらの母函数は次で与えられる。

(18) $$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots},$$

(19)$^{\text{even}}$ $$\sum_{n=0}^{\infty}p^{\text{even}}(n)x^n=\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots},$$

(19)$^{\text{odd}}$ $$\sum_{n=0}^{\infty}p^{\text{odd}}(n)x^n=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots},$$

(20) $$\sum_{n=0}^{\infty}q(n)x^n=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots,$$

(21)$^{\text{even}}$ $$\sum_{n=0}^{\infty}q^{\text{even}}(n)x^n=(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\cdots,$$

(21)$^{\text{odd}}$ $$\sum_{n=0}^{\infty}q^{\text{odd}}(n)x^n=(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots.$$

このとき、

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
p^{even}(n) &= \begin{cases} p(\frac{n}{2}) & (n : \text{even}) \\ 0 & (n : \text{odd}) \end{cases}, \qquad p^{odd}(n) = q(n), \\
q^{even}(n) &= \begin{cases} q(\frac{n}{2}) & (n : \text{even}) \\ 0 & (n : \text{odd}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

の関係がある。又、これらの量の漸近的評価は、$C \underset{\text{def}}{=} \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ とするとき

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
&\log p(n) \sim C\sqrt{n}, \quad \log q(n) \sim \log p^{even}_{odd}(n) \sim C\sqrt{\tfrac{n}{2}}, \\
&\log q^{even}_{odd}(n) \sim C\sqrt{\tfrac{n}{4}} \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

で与えられる。

今、

[KdV, MKdV] $\dim\{P(D_x) \mid P(D_x)$ は $D_0, D_1, D_2, \cdots$ の weight n の斉重多項式$\} = q(n)$,

[NLS] $\dim\{P(D_x) \mid P(D_x)$ は $D_1, D_2, D_3, \cdots$ の weight n の斉重多項式$\} = p(n)$

である。

<u>定理</u>（次元公式）

(24) [KdV] $\quad \dim\left\{\dfrac{D^k f\cdot f}{f^2} \;\middle|\; k=(k_0,k_1,k_2,\cdots),\ |k|=n\right\} = q^{even}(n)$.

(25) [MKdV] $\quad \dim\left\{\dfrac{D^k f\cdot g}{fg} \;\middle|\; k=(k_0,k_1,k_2,\cdots),\ |k|=n\right\} = q^{odd}(n)$.

(26) [NLS] $\quad \dim\left\{\dfrac{D^k f\cdot g}{fg} \;\middle|\; k=(k_1,k_2,k_3,\cdots),\ |k|=n\right\} = q^{odd}(2n+1)$.

(27) $\quad \dim\left\{\dfrac{D^k f\cdot f}{f^2} \;\middle|\; k=(k_1,k_2,k_3,\cdots),\ |k|=n\right\} = q^{odd}(2n)$.

（表8）に、0から59までの n についてこれら $p(n)$, $p^{even}_{odd}(n)$, $q(n)$, $q^{even}_{odd}(n)$ の数値をあげる[1]。

<u>安定性定理</u> KdV方程式に対しては $m \geqq \frac{|k|-2}{4}$ 又は

$l_1 + 2m \geqq |k|+2$ のとき，MKdV方程式に対しては $m \geqq \frac{|k|-1}{4}$

又は $l_1 + 2m \geqq |k|+3$ のとき $l_1 + \cdots + l_r = k_0 + 3k_1 + \cdots + (2m+1)(k_m+1)$,

$\underset{\substack{\text{even (KdV)} \\ \text{odd (MKdV)}}}{l_1 > \cdots > l_r > 0}$ を満たす l と k に対して，

$$a_{l_1 \cdots l_r : k_0, \cdots k_{m-1}, k_m+1} = a_{l_1+2, \cdots, l_r : k_0, \cdots, k_{m-1}, k_m, 1} = a_{l_1+4, \cdots, l_r : k_0, \cdots, k_{m-1}, k_m, 0, 1}$$

$$= \cdots = a_{l_1+2\nu, \cdots, l_r : k_0, \cdots, k_{m-1}, k_m, \underbrace{0, \cdots, 0}_{\nu-1}, 1}$$

が成り立つ。

以下に，$\frac{D^k f \cdot f}{f^2}$，$\frac{D^k f \cdot g}{fg}$ 等を，各々の場合に，basis$\{K_{l_1 \cdots l_r}\}$ の一次結合で表わした表を挙げる（表1，3）。Bilinear Equations はこれらの表に含まれているが，便利のため，一部を書き出しておく（表5，6，7）。

(表1)

	MKdV	KdV
	1	1
1	1	1

	MKdV	KdV
	K_1	
D_0	1	

	MKdV	KdV
	0	K_2
D_0^2	0	1

	MKdV	KdV
	K_3	
D_0^3	1	
D_1	1	

	MKdV	KdV
	$K_{3,1}$	K_4
D_0^4	2	1
$D_0 D_1$	-1	1

	MKdV	KdV
	K_5	
D_0^5	1	
$D_0^2 D_1$	1	
D_2	1	

	MKdV	KdV	KdV
	$K_{5,1}$	K_6	$K_{4,2}$
D_0^6	4	1	5
$D_0^3 D_1$	1	1	-1
D_1^2	-2	1	2
$D_0 D_2$	-1	1	0

	MKdV	KdV
	K_7	
D_0^7	1	
$D_0^4 D_1$	1	
$D_0 D_1^2$	1	
$D_0^2 D_2$	1	
D_3	1	

	MKdV	MKdV	KdV	KdV
	$K_{7,1}$	$K_{5,3}$	K_8	$K_{6,2}$
D_0^8	6	14	1	14
$D_0^5 D_1$	3	-1	1	2
$D_0^2 D_1^2$	0	2	1	-1
$D_0^3 D_2$	1	-1	1	-1
$D_1 D_2$	-2	-1	1	[illegible]
$D_0 D_3$	-1	0	1	0

	MKdV	MKdV
	K_9	$K_{5,3,1}$
D_0^9	1	42
$D_0^6 D_1$	1	-6
$D_0^3 D_1^2$	1	0
D_1^3	1	6
$D_0^4 D_2$	1	2
$D_0 D_1 D_2$	1	-1
$D_0^2 D_3$	1	0
D_4	1	0

(表1)

	MKdV		KdV		
	$K_{9,1}$	$K_{7,3}$	K_{10}	$K_{8,2}$	$K_{6,4}$
D_0^{10}	8	48	1	27	42
$D_0^7 D_1$	5	6	1	9	0
$D_0^4 D_1^2$	2	0	1	0	3
$D_0 D_1^3$	-1	3	1	0	-3
$D_0^5 D_2$	3	-2	1	2	-3
$D_0^2 D_1 D_2$	0	1	1	-1	0
D_2^2	-2	-2	1	2	2
$D_0^3 D_3$	1	-1	1	-1	0
$D_1 D_3$	-2	-1	1	2	0
$D_0 D_4$	-1	0	1	0	0

	K_{11}	$K_{7,3,1}$
D_0^{11}	1	198
$D_0^8 D_1$	1	6
$D_0^5 D_1^2$	1	-6
$D_0^2 D_1^3$	1	0
$D_0^6 D_2$	1	-2
$D_0^3 D_1 D_2$	1	1
$D_1^2 D_2$	1	4
$D_0 D_2^2$	1	-2
$D_0^4 D_3$	1	2
$D_0 D_1 D_3$	1	-1
$D_0^2 D_4$	1	0
D_5	1	0

	MKdV			KdV			
	$K_{11,1}$	$K_{9,3}$	$K_{7,5}$	K_{12}	$K_{10,2}$	$K_{8,4}$	$K_{6,4,2}$
D_0^{12}	10	110	132	1	44	165	462
$D_0^9 D_1$	7	24	6	1	20	21	-42
$D_0^6 D_1^2$	4	2	6	1	5	3	3
$D_0^3 D_1^3$	1	2	-3	1	-1	3	3
D_1^4	-2	2	6	1	2	6	12
$D_0^7 D_2$	5	5	-8	1	9	-5	7
$D_0^4 D_1 D_2$	2	-1	1	1	0	1	-2
$D_0 D_1^2 D_2$	-1	2	1	1	0	-2	-2
$D_0^2 D_2^2$	0	0	2	1	-1	0	2
$D_0^5 D_3$	3	-2	-1	1	2	-3	0
$D_0^2 D_1 D_3$	0	1	-1	1	-1	0	0
$D_2 D_3$	-2	-2	-1	1	2	2	0
$D_0^3 D_4$	1	-1	0	1	-1	0	0
$D_1 D_4$	-2	-1	0	1	2	0	0
$D_0 D_5$	-1	0	0	1	0	0	0

(表1)

	MKdV		
	K_{13}	$K_{9,3,1}$	$K_{7,5,1}$
D_0^{13}	1	572	858
$D_0^{10}D_1$	1	92	−6
$D_0^7D_1^2$	1	−10	12
$D_0^4D_1^3$	1	−4	−6
$D_0D_1^4$	1	2	−6
$D_0^8D_2$	1	12	−22
$D_0^5D_1D_2$	1	−3	−1
$D_0^2D_1^2D_2$	1	0	2
$D_0^3D_2^2$	1	2	−2
$D_1D_2^2$	1	2	4
$D_0^6D_3$	1	−2	4
$D_0^3D_1D_3$	1	1	1
$D_1^2D_3$	1	4	−2
$D_0D_2D_3$	1	−2	−1
$D_0^4D_4$	1	2	0
$D_0D_1D_4$	1	−1	0
$D_0^2D_5$	1	0	0
D_6	1	0	0

	MKdV			KdV				
	$K_{13,1}$	$K_{11,3}$	$K_{9,5}$	K_{14}	$K_{12,2}$	$K_{10,4}$	$K_{8,6}$	$K_{8,4,2}$
D_0^{14}	12	208	572	1	65	429	429	3003
$D_0^{11}D_1$	9	76	77	1	35	99	33	33
$D_0^8D_1^2$	6	16	14	1	14	12	15	−30
$D_0^5D_1^3$	3	1	5	1	2	6	−3	6
$D_0^2D_1^4$	0	4	−4	1	−1	0	6	−6
$D_0^9D_2$	7	28	−13	1	20	14	−21	−12
$D_0^6D_1D_2$	4	1	2	1	5	−1	3	3
$D_0^3D_1^2D_2$	1	1	−1	1	−1	2	0	0
$D_1^3D_2$	−2	1	−5	1	2	−4	−3	6
$D_0^4D_2^2$	2	−2	2	1	0	−1	4	−2
$D_0D_1D_2^2$	−1	1	2	1	0	−1	−2	−2
$D_0^7D_3$	5	5	−9	1	9	−5	−5	7
$D_0^4D_1D_3$	2	−1	0	1	0	1	−2	−2
$D_0D_1^2D_3$	−1	2	0	1	0	−2	1	−2
$D_0^2D_2D_3$	0	0	1	1	−1	0	0	2
D_3^2	−2	−2	−2	1	2	2	2	0
$D_0^5D_4$	3	−2	−1	1	2	−3	0	0
$D_0^2D_1D_4$	0	1	−1	1	−1	0	0	0
D_2D_4	−2	−2	−1	1	2	2	0	0
$D_0^3D_5$	1	−1	0	1	−1	0	0	0
D_1D_5	−2	−1	0	1	2	0	0	0
D_0D_6	−1	0	0	1	0	0	0	0

（表1）

KdV

	K_{16}	$K_{14,2}$	$K_{12,4}$	$K_{10,6}$	$K_{10,4,2}$	$K_{8,6,2}$
D_0^{16}	1	90	910	2002	11440	15444
$D_0^{13}D_1$	1	54	286	286	1144	0
$D_0^{10}D_1^2$	1	27	58	55	−98	81
$D_0^7D_1^3$	1	9	10	13	−8	−27
$D_0^4D_1^4$	1	0	7	−2	10	0
$D_0D_1^5$	1	0	−5	10	10	0
$D_0^{11}D_2$	1	35	90	−33	110	−231
$D_0^8D_1D_2$	1	14	6	6	−16	0
$D_0^5D_1^2D_2$	1	2	3	0	2	6
$D_0^2D_1^3D_2$	1	−1	0	3	2	3
$D_0^6D_2^2$	1	5	−5	7	5	−6
$D_0^3D_1D_2^2$	1	−1	1	1	−1	0
$D_1^2D_2^2$	1	2	−2	−5	2	6
$D_0D_2^3$	1	0	0	−3	0	−6
$D_0^9D_3$	1	20	14	−28	−12	30
$D_0^6D_1D_3$	1	5	−1	−1	3	0
$D_0^3D_1^2D_3$	1	−1	2	−1	0	−3
$D_1^3D_3$	1	2	−4	−1	6	−6
$D_0^4D_2D_3$	1	0	−1	2	−2	0
$D_0D_1D_2D_3$	1	0	−1	−1	−2	0
$D_0^2D_3^2$	1	−1	0	0	2	2
$D_0^7D_4$	1	9	−5	−5	7	0
$D_0^4D_1D_4$	1	0	1	−2	−2	0
$D_0D_1^2D_4$	1	0	−2	1	−2	0
$D_0^2D_2D_4$	1	−1	0	0	2	0
D_3D_4	1	2	2	2	0	0
$D_0^5D_5$	1	2	−3	0	0	0
$D_0^2D_1D_5$	1	−1	0	0	0	0
D_2D_5	1	2	2	0	0	0
$D_0^3D_6$	1	−1	0	0	0	0
D_1D_6	1	2	0	0	0	0
D_0D_7	1	0	0	0	0	0

(表2)　KdV

	u
K_2	1

	u_2	u^2
K_4	1	3

	u_4	uu_2	u_1^2	u^3
K_6	1	10	5	10
$K_{4,2}$	0	1	−1	1

	u_6	uu_4	u_1u_3	u_2^2	u^2u_2	uu_1^2	u^4
K_8	1	14	28	21	70	70	35
$K_{6,2}$	0	1	−2	1	10	−5	5

	u_8	uu_6	u_1u_5	u_2u_4	u_3^2	u^2u_4	uu_1u_3	uu_2^2	$u_1^2u_2$	u^3u_2	$u^2u_1^2$	u^5
K_{10}	1	18	54	114	69	126	504	378	462	420	630	126
$K_{8,2}$	0	1	−2	2	−1	14	0	35	−28	70	0	21
$K_{6,4}$	0	0	0	1	−1	3	−12	6	7	20	−15	6

	u_{10}	uu_8	u_1u_7	u_2u_6	u_3u_5	u_4^2	u^2u_6	uu_1u_5	uu_2u_4	uu_3^2	$u_1^2u_4$	$u_1u_2u_3$	u_2^3
K_{12}	1	22	88	242	418	253	198	1188	2508	1518	1650	5676	1342
$K_{10,2}$	0	1	−2	2	−2	1	18	18	150	51	−72	−120	40
$K_{8,4}$	0	0	0	1	−2	1	3	−12	26	−20	12	−8	19
$K_{6,4,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	−1	2	−1

	u^3u_4	$u^2u_1u_3$	$u^2u_2^2$	$uu_1^2u_2$	u_1^4	u^4u_2	$u^3u_1^2$	u^6
K_{12}	924	5544	4158	10164	1155	2310	4620	462
$K_{10,2}$	126	252	504	−42	−105	420	210	84
$K_{8,4}$	42	−84	147	−70	35	175	−70	35
$K_{6,4,2}$	1	−6	3	7	−5	5	−5	1

(表2) MKdV

	v
K_1	1

	v_2	v^3
K_3	1	−2

	vv_2	v_1^2	v^4
$K_{3,1}$	1	−1	−1

	v_4	v^2v_2	vv_1^2	v^5
K_5	1	−10	−10	6

	vv_4	v_1v_3	v_2^2	v^3v_2	v^6
$K_{5,1}$	1	−2	1	−10	4

	v_6	v^2v_4	vv_1v_3	vv_2^2	$v_1^2v_2$	v^4v_2	$v^3v_1^2$	v^7
K_7	1	−14	−56	−42	−70	70	140	−20

	vv_6	v_1v_5	v_2v_4	v_3^2	v^3v_4	$v^2v_1v_3$	$v^2v_2^2$	$vv_1^2v_2$	v_1^4	v^5v_2	$v^4v_1^2$	v^8
$K_{7,1}$	1	−2	2	−1	−14	−28	−56	−14	21	70	70	−15
$K_{5,3}$	0	0	1	−1	−2	12	−6	−14	1	14	−10	−3

	v_8	v^2v_6	vv_1v_5	vv_2v_4	vv_3^2	$v_1^2v_4$	$v_1v_2v_3$	v_2^3
K_9	1	−18	−108	−228	−138	−210	−756	−182
$K_{5,3,1}$	0	0	0	1	−1	−1	2	−1

	v^4v_4	$v^3v_1v_3$	$v^3v_2^2$	$v^2v_1^2v_2$	vv_1^4	v^6v_2	$v^5v_1^2$	v^9
K_9	126	1008	756	3108	798	−420	−1260	70
$K_{5,3,1}$	−1	8	−4	−14	11	6	−6	−1

但し、u_j は $\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^j u = u_{\underbrace{x_0\cdots x_0}_{j}}$ の略記であり、v_j も同様である。
Matsuno [5] の (3.2a) ~ (3.2d)，Matsuno [6] の Appendix A, B, C 参照。

(表3)

NLS

	f·g	f·f
	K_0	1
1	1	1

	f·g	f·f
	K_1	0
D_1	1	0

	f·g	f·f
	K_2	$K_{1,0}$
D_1^2	1	1
D_2	1	0

	f·g	f·f
	K_3	$K_{2,0}$
D_1^3	1	0
D_1D_2	1	1
D_3	1	0

	K_4	$2K_{2,1,0}$	$K_{3,0}$	$K_{2,1}$
D_1^4	1	3	1	-3
$D_1^2D_2$	1	-1	0	0
D_2^2	1	1	1	1
D_1D_3	1	0	1	0
D_4	1	0	0	0

	f·g		f·f	
	K_5	$2K_{3,1,0}$	$K_{4,0}$	$K_{3,1}$
D_1^5	1	5	0	0
$D_1^3D_2$	1	1	1	-2
$D_1D_2^2$	1	-1	0	0
$D_1^2D_3$	1	-1	0	0
D_2D_3	1	1	1	1
D_1D_4	1	0	1	0
D_5	1	0	0	0

	K_6	$2K_{4,1,0}$	$2K_{3,2,0}$	$K_{5,0}$	$K_{4,1}$	$K_{3,2}$
D_1^6	1	10	-5	1	-5	10
$D_1^4D_2$	1	2	3	0	0	0
$D_1^2D_2^2$	1	0	1	1	-1	-2
D_2^3	1	0	-3	0	0	0
$D_1^3D_3$	1	1	-2	1	-2	1
$D_1D_2D_3$	1	-1	0	0	0	0
D_3^2	1	1	1	1	1	1
$D_1^2D_4$	1	-1	0	0	0	0
D_2D_4	1	1	0	1	1	0
D_1D_5	1	0	0	1	0	0
D_6	1	0	0	0	0	0

(表3) NLS

	$f\cdot g$				$f\cdot f$		
	K_7	$2K_{5,1,0}$	$2K_{4,3,0}$	$2K_{3,3,1}$	$K_{6,0}$	$K_{5,1}$	$K_{4,2}$
D_1^7	1	14	0	-35	0	0	0
$D_1^5D_2$	1	6	0	5	1	-4	5
$D_1^3D_2^2$	1	0	4	-1	0	0	0
$D_1D_2^3$	1	0	0	3	1	0	-3
$D_1^4D_3$	1	2	0	1	0	0	0
$D_1^2D_2D_3$	1	0	0	-1	1	-1	-1
$D_2^2D_3$	1	0	-2	-1	0	0	0
$D_1D_3^2$	1	-1	0	1	0	0	0
$D_1^3D_4$	1	1	-2	0	1	-2	1
$D_1D_2D_4$	1	-1	0	0	0	0	0
D_3D_4	1	1	1	0	1	1	1
$D_1^2D_5$	1	-1	0	0	0	0	0
D_2D_5	1	1	0	0	1	1	0
D_1D_6	1	0	0	0	1	0	0
D_7	1	0	0	0	0	0	0

$f\cdot g$

	K_8	$2K_{6,1,0}$	$2K_{5,2,0}$	$2K_{4,3,0}$	$2K_{4,2,1}$
D_1^8	1	21	-7	35	-70
$D_1^6D_2$	1	9	5	-5	-10
$D_1^4D_2^2$	1	3	3	-1	4
$D_1^2D_2^3$	1	-1	3	3	0
D_2^4	1	1	-3	3	6
$D_1^5D_3$	1	6	-4	5	5
$D_1^3D_2D_3$	1	0	2	1	-1
$D_1D_2^2D_3$	1	0	0	-1	1
$D_1^2D_3^2$	1	0	-1	2	-1
$D_2D_3^2$	1	0	-1	-2	-1
$D_1^4D_4$	1	2	0	-3	1
$D_1^2D_2D_4$	1	0	0	-1	-1
$D_2^2D_4$	1	0	-2	1	-1
$D_1D_3D_4$	1	-1	0	0	1
D_4^2	1	1	1	1	0
$D_1^3D_5$	1	1	-2	0	0
$D_1D_2D_5$	1	-1	0	0	0
D_3D_5	1	1	1	0	0
$D_1^2D_6$	1	-1	0	0	0
D_2D_6	1	1	0	0	0
D_1D_7	1	0	0	0	0
D_8	1	0	0	0	0

(表4)　　NLS $(f \cdot g)$

$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j v = v_{\underbrace{x_1 \cdots x_1}_{j}}$ を v_j と略記する。 u_j, w_j も同様である。

	v
K_1	1

	w	v^2
K_2	1	1

	v_2	vw	v^3
K_3	1	3	1

	w_2	vv_2	v_1^2	w^2	v^2w	v^4
K_4	1	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	6	1
$2K_{2,1,0}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0

	v_4	vw_2	v_1w_1	v_2w	v^2v_2	vv_1^2	vw^2	v^3w	v^5
K_5	1	5	5	5	10	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	10	1
$2K_{3,1,0}$	0	0	-1	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0

	w_4	vv_4	v_1v_3	v_2^2	ww_2	w_1^2	v^2w_2	vv_1w_1	vv_2w	v_1^2w	w^3	v^3v_2	$v^2v_1^2$	v^2w^2	v^4w	v^6
K_6	1	6	10	$\frac{15}{2}$	5	$\frac{5}{2}$	15	30	30	$\frac{25}{2}$	$\frac{5}{2}$	20	$\frac{45}{2}$	$\frac{45}{2}$	15	1
$2K_{4,1,0}$	0	0	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	-4	4	-1	1	0	-3	3	0	0
$2K_{3,3,0}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	-2	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0

	v_6	vw_4	v_1w_3	v_2w_2	v_3w_1	v_4w	v^2v_4	vv_1v_3	vv_2^2	$v_1^2v_2$	vww_2	vw_1^2
K_7	1	7	14	21	14	7	21	70	$\frac{105}{2}$	$\frac{105}{2}$	35	$\frac{35}{2}$
$2K_{5,1,0}$	0	0	-1	1	-1	1	0	-5	$\frac{5}{2}$	-5	5	$-\frac{5}{2}$
$2K_{4,2,0}$	0	0	0	1	-1	0	0	-2	3	2	2	-3
$2K_{3,2,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

	v_1ww_1	v_2w^2	v^3w_2	$v^2v_1w_1$	v^2v_2w	vv_1^2w	vw^3	v^4v_2	$v^3v_1^2$	v^3w^2	v^5w	v^7
K_7	35	$\frac{35}{2}$	35	105	105	$\frac{175}{2}$	$\frac{35}{2}$	35	$\frac{105}{2}$	$\frac{105}{2}$	21	1
$2K_{5,1,0}$	0	5	0	-10	10	-5	5	0	-5	5	0	0
$2K_{4,2,0}$	-2	0	0	-8	8	0	0	0	-4	4	0	0
$2K_{3,2,1}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	-1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0

(表4) NLS (f·f)

	u
$K_{1,0}$	1

	u_1	uv
$K_{2,0}$	1	2

	u_2	u_1v	u^2	uv^2
$K_{3,0}$	1	3	$\frac{3}{2}$	3
$K_{2,1}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	1

	u_3	u_2v	u_1v_1	uv_2	uu_1	u_1v^2	u^2v	uv^3
$K_{4,0}$	1	4	2	2	3	6	6	4
$K_{3,1}$	0	1	-1	0	0	3	0	2

	u_4	u_3v	u_2v_1	u_1v_2	uu_2	u_1^2	u_2v^2	u_1vv_1	uu_1v	uv_1^2	uvv_2	u^3	u_1v^3	u^2v^2	uv^4
$K_{5,0}$	1	5	5	5	5	$\frac{5}{2}$	10	10	15	5	10	$\frac{5}{2}$	10	15	5
$K_{4,1}$	0	1	-1	1	0	$-\frac{1}{2}$	4	-2	3	-1	2	$-\frac{1}{2}$	6	3	3
$K_{3,2}$	0	0	-1	0	1	$-\frac{1}{2}$	1	-2	0	-1	0	1	2	0	1

	u_5	u_4v	u_3v_1	u_2v_2	u_1v_3	uv_4	uu_3	u_1u_2	u_3v^2	u_2vv_1	u_1vv_2	$u_1v_1^2$	uu_2v
$K_{6,0}$	1	6	9	11	4	2	5	10	15	30	30	15	30
$K_{5,1}$	0	1	-1	1	-1	0	0	0	5	0	10	0	5
$K_{4,2}$	0	0	-1	1	0	0	1	-1	1	-6	2	-3	4

	u_1^2v	uu_1v_1	u^2v_2	u^2u_1	u_2v^3	$u_1v^2v_1$	uv^2v_2	uvv_1^2	uu_1v^2	u^3v	u_1v^4	u^2v^3	uv^5
$K_{6,0}$	15	20	10	$\frac{15}{2}$	20	30	30	30	45	15	15	30	6
$K_{5,1}$	0	-20	0	0	10	0	10	0	15	0	10	10	4
$K_{4,2}$	-3	15	2	$\frac{3}{2}$	4	-6	2	-6	3	3	5	2	2

(表5) KdV 方程式

$D_0(D_0^3-D_1)f\cdot f=0$, $(D_0^3-D_1)(D_0^3+2D_1)f\cdot f=0$, $D_0^2(D_0^3-D_1)(D_0^3-4D_1)f\cdot f=0$,

$D_0(D_0^3-D_1)(D_0^3+2D_1)(D_0^3-4D_1)f\cdot f=0$, $(D_0^3-D_1)(D_0^3-4D_1)(D_0^6+27D_0^3D_1+16D_1^2)f\cdot f=0$

weight 14 以上では D_0, D_1 のみの方程式は存在しない。

$D_0(D_0^3D_1^2+D_1^3-2D_4)f\cdot f=0$, $(2D_0D_1^3+3D_2^2-3D_1D_3-2D_0D_4)f\cdot f=0$,

$D_1(2D_0^6D_1+3D_0D_1D_2-5D_4)f\cdot f=0$, $(D_0^4D_1D_2-D_0D_1^2D_2+D_0^5D_3-D_1D_4)f\cdot f=0$,

$(D_0D_1D_2^2-D_0^4D_1D_3+D_2D_4-D_1D_5)f\cdot f=0$, $(D_0^3D_1^2D_2-D_2D_4-3D_0^3D_5+3D_0D_6)f\cdot f=0$,

$D_0^2(D_1D_m-D_0D_{m+1})f\cdot f=0$, $(2D_0^3D_m+D_1D_m-3D_0D_{m+1})f\cdot f=0$,

$(2D_0^5D_m+3D_2D_m-5D_1D_{m+1})f\cdot f=0$ $(m=0,1,2,\cdots$: 安定性の系).

(表6) MKdV 方程式

$D_0^2f\cdot g=0$, $(D_0^3-D_1)f\cdot g=0$, $D_0(D_0^3+2D_1)f\cdot g=0$, $D_0^2(D_0^3-D_1)f\cdot g=0$,

$D_0^3(D_0^3-4D_1)f\cdot g=0$, $D_1(2D_0^3+D_1)f\cdot g=0$, $D_0^4(D_0^3-D_1)f\cdot g=0$,

$D_0D_1(D_0^3-D_1)f\cdot g=0$, $D_0^2(D_0^3+2D_1)(D_0^3-4D_1)f\cdot g=0$, $D_0^3(D_0^3-D_1)(D_0^3+8D_1)f\cdot g=0$,

$D_1(D_0^3-D_1)^2f\cdot g=0$, $D_0^4(D_0^3-4D_1)^2f\cdot g=0$, $D_0D_1(2D_0^3+D_1)(D_0^3-4D_1)f\cdot g=0$,

$D_0^2(D_0^3-D_1)(D_0^6-32D_0^3D_1-32D_1^2)f\cdot g=0$, $D_0^2D_1(D_0^3-D_1)(D_0^3+2D_1)f\cdot g=0$,

$D_0^3(D_0^3+2D_1)(D_0^3-4D_1)^2f\cdot g=0$, $D_1(D_0^3+2D_1)(D_0^3-4D_1)(2D_0^3+D_1)f\cdot g=0$,

$D_0^4(D_0^3-D_1)(D_0^6-8D_0^3D_1-56D_1^2)f\cdot g=0$, $D_0D_1(D_0^3-D_1)(D_0^6+D_0^3D_1+16D_1^2)f\cdot g=0$,

$D_0^5(D_0^3-4D_1)^3f\cdot g=0$, $D_0^2D_1(D_0^3-4D_1)^2(2D_0^3+D_1)f\cdot g=0$, $\cdots\cdots$

weight 20 以上では D_0, D_1 のみの方程式は存在しない。

$(D_0^5-D_2)f\cdot g=0$ (sym の例), $D_0(D_0^2D_1+D_2)f\cdot g=0$, $(D_0^7-D_3)f\cdot g=0$,

$D_0(D_0D_1^2+2D_0^2D_2+2D_3)f\cdot g=0$, $D_0^2(D_0D_1^2-D_3)f\cdot g=0$, $D_0(D_0^3D_1^2+2D_4)f\cdot g=0$,

$D_0^2(D_1^3-D_4)f\cdot g=0$, $D_0D_2(D_0^5-D_2)f\cdot g=0$, $D_0(D_0^3D_1D_2-D_1^2D_2-3D_0^2D_4)f\cdot g=0$,

$(D_0^2D_1^2D_2+D_1^2D_3-2D_0^4D_4)f\cdot g=0$, $D_0^2D_1(D_1^3-4D_4)f\cdot g=0$,

$(D_0^2D_m-D_{m+1})f\cdot g=0$, $\left(\sum_{\nu=0}^{m}(-)^{\nu}D_\nu D_{m-\nu}\right)f\cdot g=0$ (但し m odd のときは trivial),
$\left(D_0^2\sum_{\nu=0}^{m}{}'D_\nu D_{m-\nu}+2D_0D_{m+1}\right)f\cdot g=0$,
$(D_0^3D_m-D_1D_m+3D_0D_{m+1})f\cdot g=0$, $(D_0^4D_m+2D_0D_1D_m-3D_0^2D_{m+1})f\cdot g=0$,

$(D_0^5D_m-D_0^2D_1D_m-3D_0^3D_{m+1})f\cdot g=0$, $(D_0^5D_m-D_2D_m+5D_0D_{m+2})f\cdot g=0$,

$(D_0^7D_m-D_3D_m-7D_0^2D_1D_{m+1}+7D_0D_{m+3})f\cdot g=0$ ($m=0,1,2,\cdots$: 安定性定理の系).

(表7) NLS 方程式

$(D_1^2-D_2)f\cdot g=0$, $D_1(D_1^2-D_2)f\cdot g=0$, $(D_1^2-D_2)(D_1^2+2D_2)f\cdot g=0$,

$D_1(D_1^2-D_2)(D_1^2-2D_2)f\cdot g=0$, $(D_1^2-D_2)(D_1^2-2D_2)^2f\cdot g=0$,

weight 7 以上では D_1, D_2 のみの方程式は存在しない。

$(D_1^3-D_3)f\cdot g=0$, $D_1(D_1^3+3D_1D_2-4D_3)f\cdot g=0$, $(D_1^4-3D_2^2+2D_1D_3)f\cdot g=0$,

$D_1(D_2^2-D_1D_3)f\cdot g=0$, $D_2(D_1^3-D_3)f\cdot g=0$, $(D_1^5+2D_1D_2^2-3D_2D_3)f\cdot g=0$,

$D_1(D_1^4+5D_1D_3-6D_4)f\cdot g=0$, $(D_1^2D_2^2-D_3^2+D_2D_4-D_6)f\cdot g=0$,

$(D_1D_2^3+3D_1^2D_2D_3-4D_7)f\cdot g=0$, $D_1(D_1^3D_3-D_3^2+3D_1D_5-3D_6)f\cdot g=0$,

$(D_1^3D_2D_3+D_2^2D_4-2D_8)f\cdot g=0$, $(D_1D_2^2D_3+D_2^2D_4-D_1^3D_5-D_1^2D_6)f\cdot g=0$,

$(D_1^8-5D_1^6D_2+20D_1^4D_4-16D_1^3D_5)f\cdot g=0$,

$(D_1D_m-D_{m+1})f\cdot g=0$, $(D_1^2D_m+D_2D_m-2D_1D_{m+1})f\cdot g=0$ ($m=1,2,3,\cdots$).

$D_1^2(D_1^4+3D_2^2-4D_1D_3)f\cdot f=0$, $(D_1^2D_2^2+2D_3^2-D_2D_4-2D_1D_5)f\cdot f=0$,

$(D_1^2D_2^2 + 2D_1^3D_3 + 5D_2D_4 - 8D_1D_5)\, f\cdot f = 0$, $\quad (D_1^2D_2D_3 + D_3D_4 - 2D_1D_6)\, f\cdot f = 0$,

$(D_1^2D_2D_3 + D_1^3D_4 + 3D_2D_5 - 5D_1D_6)\, f\cdot f = 0$, $\quad (D_1D_2^3 + 3D_3D_4 - 3D_2D_5 - D_1D_6)\, f\cdot f = 0$,

$(D_1^3D_m - D_3D_m + 3D_2D_{m+1} - 3D_1D_{m+2})\, f\cdot f = 0 \quad (m=1, 2, 3, \cdots)$.

Jimbo-Miwa[8] の (31), (33) 式参照.

[付録 1]　Painlevé II 型方程式：$y_{xx} = 2y^3 + xy + \alpha$, $y = \left(\log \frac{f}{g}\right)_x$,

$$\begin{cases} D_x^2\, f\cdot g = 0 \\ (D_x^3 - xD_x - \alpha)\, f\cdot g = 0 \end{cases} \quad ([4]), \qquad (D_x^6 - 4xD_x^4 - 4\alpha x D_x - 4\alpha^2)\, f\cdot g = 0.$$

[付録 2]　沢田－小寺 KdV 方程式：$(D_x^6 - D_xD_t)\, f\cdot f = 0$, $D_x = D_0$, $D_t = D_2$

$D_0(D_0^5 - D_2)\, f\cdot f = 0$ ([2]), $\quad D_0(3D_0^7 + 7D_0^2D_2 - 10D_3)\, f\cdot f = 0$,

$(D_0^5 - D_2)(D_0^5 + 4D_2)\, f\cdot f = 0$, $\quad (6D_0^5D_2 - D_2^2 - 5D_0^3D_3)\, f\cdot f = 0$,

$D_0^3(D_0^7 - 21D_0^2D_2 + 20D_3)\, f\cdot f = 0$, $\quad (D_0^{12} + 7D_0^7D_2 + 7D_0^2D_2^2 - D_0^5D_3 - 14D_2D_3)\, f\cdot f = 0$.

[付録 3]　SIT 方程式：$\begin{cases} D_x^2\, f\cdot g = 0 \cdots\cdots\cdots ① \\ (-D_t - D_x^2D_t + D_x)\, f\cdot g = 0 \cdots ② \end{cases}$ (Hirota, Oishi [4])

$D_x = D_0$, $D_t = \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m D_m$ と取れば，① のもとで，1個の SIT 方程式②と 1系列の MKdV 方程式：$(D_0^2D_m - D_{m+1})\, f\cdot g = 0 \quad (m=0,1,2,\cdots)$ とは同値である。更に，1個の SIT 方程式：$(D_x^2D_t^2 - 2D_xD_t)\, f\cdot g = 0 \cdots ③$ と 1系列の MKdV 方程式：$(D_0^2 \sum_{\nu=0}^{m} D_\nu D_{m-\nu} + 2D_0D_{m+1})\, f\cdot g = 0 \quad (m=0,1,2,\cdots)$ も同値である。

(表8)

n	$p(n)$	$p^{even}(n)$	$q(n) = p^{odd}(n)$	$q^{even}(n)$	$q^{odd}(n)$	n	$p(n)$	$p^{even}(n)$	$q(n) = p^{odd}(n)$	$q^{even}(n)$	$q^{odd}(n)$	n	$p(n)$	$p^{even}(n)$	$q(n) = p^{odd}(n)$	$q^{even}(n)$	$q^{odd}(n)$
0	1	1	1	1	1	20	627	42	64	10	7	40	37338	627	1113	64	46
1	1	0	1	0	1	21	792	0	76	0	8	41	44583	0	1260	0	49
2	2	1	1	1	0	22	1002	56	89	12	8	42	53174	792	1426	76	52
3	3	0	2	0	1	23	1255	0	104	0	9	43	63261	0	1610	0	57
4	5	2	2	1	1	24	1575	77	122	15	11	44	75175	1002	1816	89	63
5	7	0	3	0	1	25	1958	0	142	0	12	45	89134	0	2048	0	68
6	11	3	4	2	1	26	2436	101	165	18	12	46	105558	1255	2304	104	72
7	15	0	5	0	1	27	3010	0	192	0	14	47	124754	0	2590	0	78
8	22	5	6	2	2	28	3718	135	222	22	16	48	147273	1575	2910	122	87
9	30	0	8	0	2	29	4565	0	256	0	17	49	173525	0	3264	0	93
10	42	7	10	3	2	30	5604	176	296	27	18	50	204226	1958	3658	142	98
11	56	0	12	0	2	31	6842	0	340	0	20	51	239943	0	4097	0	107
12	77	11	15	4	3	32	8349	231	390	32	23	52	281589	2436	4582	165	117
13	101	0	18	0	3	33	10143	0	448	0	25	53	329931	0	5120	0	125
14	135	15	22	5	3	34	12310	297	512	38	26	54	386155	3010	5718	192	133
15	176	0	27	0	4	35	14883	0	585	0	29	55	451276	0	6378	0	144
16	231	22	32	6	5	36	17977	385	668	46	33	56	526823	3718	7108	222	157
17	297	0	38	0	5	37	21637	0	760	0	35	57	614154	0	7917	0	168
18	385	30	46	8	5	38	26015	490	864	54	37	58	715220	4565	8808	256	178
19	490	0	54	0	6	39	31185	0	982	0	41	59	831820	0	9792	0	192

参考文献

[1] G.H. Hardy and S. Ramanujan, Proc. London Math. Soc. 17 (1918).

[2] Y. Sawada and Y. Kotera, Progr. Theor. Phys. 51 (1974).

[3] R. Hirota, Lect. Notes in Math. 515, Springer (1976).

[4] S. Oishi, Generalized Soliton Solutions for Simultaneous Bilinear Soliton Equations, preprint, Waseda Univ. (1979).

[5] Y. Matsuno, Bilinearization of Nonlinear Evolution Equations, preprint, Kyoto Univ. (1980), to appear in J. Phys. Soc. Japan 48 (1980).

[6] Y. Matsuno, Bilinearization of Nonlinear Evolution Equations II. Higher-order modified Korteweg-de Vries Equations, preprint, Kyoto Univ. (1980), submitted to J. Phys. Soc. Japan.

[7] M. Jimbo and T. Miwa, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients II, RIMS preprint 327 (1980).

[8] M. Jimbo and T. Miwa, Deformation of linear ordinary differential equations III, RIMS preprint 329 (1980).