数理解析研究所講究録
第389巻 1980年 1-8

Infinite loop space machine の一意性

京大 数理研　　平田浩一

May - Thomason の仕事の結果を紹介する。

Reference :

J. P. May and R. Thomason, The uniqueness of infinite loop space machine, Topology 17 (1978), 205 - 224

§1. Categories of operators

$\mathcal{T}$ を nondegeneratedly based compactly generated weak Hausdorff spaces の category とする。weak homotopy equivarences

$$X \xrightarrow{\sim} Y \xleftarrow{\sim} Z \xrightarrow{\sim} \cdots\cdots \xleftarrow{\sim} W$$

があったとき，X と Y は equivarent であると呼ぶことにする。

category $\mathcal{F}$ を次のように定義する。

$ob(\mathcal{F}) = N \ni m = \{0, 1, 2, \cdots n\}$ with base point 0

$\mathcal{F}(m, n)$: based functions $m \to n$ 全体

$\mathcal{F}$ は Segal の category Γ の opposite category となる。$\mathcal{F}$ の subcategory Π を

$$ob(\Pi) = \mathbb{N}$$

$\Pi(m, n) \ni \phi : m \to n$ s.t. $1 \leq {}^\forall j \leq n,\ |\phi^{-1}(j)| \leqq 1$

ここで $|\phi^{-1}(j)|$ は $\phi^{-1}(j)$ の cardinality を表わす。$\mathcal{F}$ と Π には，discrete topology を入れて，topological category とする。

<u>Def 1.1</u>　category of operators $(\mathcal{G}, \varepsilon)$ ：

$\mathcal{G}$ は $ob(\mathcal{G}) = \mathbb{N}$ となる topological category で inclusion $\Pi \hookrightarrow \mathcal{G}$ があって，augmentation $\varepsilon : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ との composition $\Pi \hookrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F}$ inclusion となるものをいう。ここで $\mathcal{G}(n, n) \ni 1$ は nondegenerate base pt とする。

category of operators $\mathcal{G}$ には，さらに次の2つの仮定を付け加える。

<u>仮定1</u>　injection $\phi \in \Pi(m, n) \subset \mathcal{G}(m, n)$ に対して，

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \coprod_q \mathcal{G}(q, m) & \longrightarrow & \coprod_q \mathcal{G}(q, n) \\ & \psi & \longmapsto & \phi \circ \psi \end{array}$$

は Σ_ϕ equivariant cofibration である。ここで Σ_ϕ とは

$$\Sigma_\phi = \{\text{permutation } \sigma : n \to n \mid \sigma \circ \phi = \phi\}.$$

その作用は，$\coprod_q \mathcal{G}(q, m)$ には trivial に働き，$\coprod_q \mathcal{G}(q, n)$ には $\psi \longmapsto \sigma \circ \psi$ で働くものとする。

<u>仮定2</u>　$\epsilon : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ は equivalence である。即ち，各 m，n に対して，$\mathcal{G}(m, n) \to \mathcal{F}(m, n)$ が equivalence (weak homology equivalence)。

category of operators $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ 間の map としては，次の図式を可換とするものを考える。

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G} \arrow[dr, "\epsilon"] \arrow[d] & \\ \Pi \arrow[ur] \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r, "\epsilon"'] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

また
equivalence とは，各 $\mathcal{G}(m, n) \longrightarrow \mathcal{H}(m, n)$ が equivalence となるものを言うことにする。

<u>Def 1.2</u> $\mathcal{G}$-space $X : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{T}$:
X により n に対応する $\mathcal{T}$ の object を X_n と書くことにするとき，$\mathcal{G}(m, n) \longrightarrow Map(X_m, X_n)$ の adjoint $\mathcal{G}(m, n) \times X_m \longrightarrow X_n$ が continuous となる functor X で次の条件を満たすものをいう。

(1) $X_0 \simeq *$

(2) $\delta_i : n \longrightarrow 1$ を $\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ となる Π の morphism ととしたとき，$(\delta_1, \cdots, \delta_n) : X_n \xrightarrow{\simeq} (X_1)^n$.

(3) injection $\phi \in \Pi(m, n)$ に対して $\phi : X_m \longrightarrow X_n$ は Σ_ϕ-equivariant cofibration.

$\mathcal{G}$-spaces 間の map としては，$\mathcal{G}$ 上の natural transformation をとり，equivalence としては各 n について，$X_n \longrightarrow X'_n$ が equivalence となるものをとることにする。$\mathcal{G}$-spaces の category を $\mathcal{G}[\mathcal{T}]$ と書く。

$\mathcal{F}$ は $\Pi \hookrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{id} \mathcal{F}$ によって category of operators となり，$\mathcal{F}$-space とは Segal の Γ-space にほぼ等しい。(異なる点とし

ては、base point があること、(1),(2) が weak homotopy equivalence であること、Σ_ϕ equivariant cofibration の条件が加えられていること)

functor $\Delta^{op} \to \mathcal{F}$ が canonical に定義されるので、$\mathcal{F}$-space は proper simplicial space とみなせる。

§2. Infinite loop space machine

$\mathcal{S}p$ を connective Ω-spectra の category とする。ここで spectrum $E = \{E_i, \sigma_i\}$ としては、E_i が $(i-1)$ connected, $\sigma_i : E_i \to \Omega E_{i+1}$ が weak homotopy equivalence となるものを考え、map $f: E \to E'$ としては、

$$\begin{array}{ccc} E_i & \longrightarrow & E_i' \\ {\scriptstyle \sigma_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_i'} \\ \Omega E_{i+1} & \longrightarrow & \Omega E_{i+1}' \end{array}$$

が strict に commute するものを考える。また、E, E' が equivalent とは $E \to E_1 \leftarrow E_2 \to \cdots \to E_n \leftarrow E'$ なる map の列があって、各 i に対して $E_i \to E_{1_i} \leftarrow E_{2_i} \to \cdots \to E_{n_i} \leftarrow E'_i$ が全て weak homotopy equivalence になるときをいうことにする。

<u>Def 2.1</u> infinite loop space machine $E : \mathcal{G}[\mathcal{T}] \to \mathcal{S}p$ とは、$X \in \mathcal{G}[\mathcal{T}]$ に対して $EX = \{E_i X, \sigma_i\}$ と書くことにしたとき、natural な group completion $\iota : X_1 \to E_0 X$ を伴なう functor E である。

$\nu : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ を category of operators の map とする。Y が $\mathcal{H}$-space のとき、ν によって Y は $\mathcal{G}$-space となるので、それ

を $\nu^* Y$ と書く。X が $\mathcal{G}$-space のとき $\nu_* X$ を次のように定める。

$$\mathcal{H}_n \equiv \coprod_q \mathcal{H}(q, n)$$

とするとき，$\mathcal{H}_n$ には ν によって $\mathcal{G}$ が右から作用する。また

$$X \equiv \coprod_q X_q$$

とするとき，X に $\mathcal{G}$ が左から作用する。ここで作用と書いたのは，$\mathcal{G}(m, q)$ と $\mathcal{H}(q, n)$ との composition，$\mathcal{G}(q, m) \times X_q \to X_m$ のことである。two side bar construction によって，$B(\mathcal{H}_n, \mathcal{G}, X)$ が定義され，$B(\mathcal{H}_n, \mathcal{G}, *) \longrightarrow B(\mathcal{H}_n, \mathcal{G}, X)$ は cofibration となる。そこで

$$(\nu_* X)_n \equiv B(\mathcal{H}_n, \mathcal{G}, X) / B(\mathcal{H}_n, \mathcal{G}, *)$$

とおけば，$\nu_* X$ への $\mathcal{H}$ の作用も自然に定義されるので，

$$\nu_* X : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{T}$$

は functor となる。

<u>Th. 2.2</u>　$\nu : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ が equivalence のとき，$\mathcal{G}$-space X に対して $\nu_* X$ は $\mathcal{H}$-space となり，

$$\nu^* \nu_* X \longleftarrow 1_* X \longrightarrow X$$

は natural equivalence である。また $\mathcal{H}$-space Y に対して，

$$\nu_* \nu^* Y \longrightarrow Y$$

は natural equivalence である。

これで準備が整ったので May-Thomason の main theorem を述べることにする。

<u>Th. 2.3</u>　$\mathcal{S}$ を $\mathfrak{F}[T]$ (Γ-space) 上で定義される Segal の infinite loop space machine とし，E を $\mathcal{G}[T]$ 上で定義される任意の infinite loop space machine とする。

(1) $Y \in \mathfrak{F}[T]$ のとき，natural equivalence

$$E(\epsilon^* Y) \simeq \mathcal{S}(Y)$$

が存在する。

(2) $X \in \mathcal{G}[T]$ のとき，natural equivalence

$$E(X) \simeq \mathcal{S}(\epsilon_* Y)$$

が存在する。

この定理によって，どんな infinite loop space machine であっても input する data が等しければ equivalent な spectrum を out put することがわかる。

§3. May の infinite loop space machine

May の machine は E_∞-operad $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}(k), \gamma\}$ が作用する space に対して定義されていたが，そのままでは §2 で定義した infinite loop space machine とはならない。そこで May の machine の再構成を以下に述べる。

<u>Def. 3.1</u>　category of operators $\hat{\mathcal{C}}$:

$$\hat{\mathcal{C}}(m,n) \equiv \coprod_{\phi \in \mathfrak{F}(m,n)} \prod_{1 \leq j \leq n} \mathcal{C}(|\phi^{-1}(j)|)$$

$\hat{\mathcal{C}}(m,n)$ の元は $(\phi; c_1, \cdots, c_n)$ または略して $(\phi; c)$ と書くことに

にする。composition は

$$(\phi; c_1, \cdots, c_n) \circ (\psi; d_1, \cdots, d_m) \equiv (\phi \circ \psi; \gamma(c_1; \underset{\phi(i)=1}{\times} d_i)\sigma_1, \cdots, \gamma(c_n; \underset{\phi(i)=n}{\times} d_i)\sigma_n)$$

によって定義する。また $\epsilon: \mathscr{C}(m, n) \to \mathscr{F}(m, n)$ は $(\phi; c) \mapsto \phi$ とする。

X を Π-space とするとき $\hat{C}X$ を次のように定義する

Def 3.2 $\quad \hat{C}_n X = \coprod_{m \geq 0} \hat{\mathscr{C}}(m, n) \times X_m / \sim$

ここで relation は, $(\phi; c) \in \hat{\mathscr{C}}(m, n)$, $\psi \in \Pi(q, m)$, $x \in X_q$ としたとき, $\quad ((\phi; c)\psi, x) \sim ((\phi; c), \psi x)$

Prop 3.3 $\quad \hat{C}X$ は Π-space である。さらに $\hat{C}$ は $\Pi[T]$ 上の monad となる。

$\hat{C}$ が $\Pi[T]$ 上の monad となるので, $\hat{C}$-space, $\hat{C}$-functor が定義される。$\hat{C}$-space について

Prop 3.4 $\quad \hat{\mathscr{C}}$-spaces と $\hat{C}$-spaces とは1対1に対応する。

$\hat{C}$-functor については, $\angle: \Pi[T] \to T$ を $X \mapsto X_1$ によって定義したとき

Prop 3.5 $\quad F$ が C-functor ならば $F\angle$ は $\hat{C}$-functor となる。

そこで May の machine の定義は次のようになる。$\mathscr{C}_n$ を n-th little cubes operad, $\mathscr{D}_n \equiv \mathscr{C} \times \mathscr{C}_n$ とすれば, category of operators $\hat{\mathscr{D}}_n$, monad in $\Pi[T]$ $\hat{D}$ が定まる。X を $\hat{\mathscr{C}}$-space とするとき, X は $\hat{D}$-space となる。Σ^n が C-functor なので, $\Sigma^n \angle$ は $\hat{D}$-functor となる, two side bar construction により

$$B(\Sigma^n L, \hat{D}_n, X)$$

が定義される。そこで May の machine $M : \hat{\mathcal{C}}[T] \longrightarrow \mathcal{S}_p$ を $X \in \hat{\mathcal{C}}[T]$ に対して

$$M_i X = \lim_j \Omega^j B(\Sigma^{i+j} L, \hat{D}_{i+j}, X)$$

と定義する。

<u>Prop 3.6</u> M は infinite loop space machine である。